



**Titre:** Commande des Systèmes Aérospatiaux non Linéaires à Dimensions  
Finie et Infinie

**Auteur:** Hugo Lhachemi  
Author:

**Date:** 2017

**Type:** Mémoire ou thèse / Dissertation or Thesis

**Référence:** Lhachemi, H. (2017). Commande des Systèmes Aérospatiaux non Linéaires à  
Dimensions Finie et Infinie [Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal].  
Citation: PolyPublie. <https://publications.polymtl.ca/2875/>

 **Document en libre accès dans PolyPublie**  
Open Access document in PolyPublie

**URL de PolyPublie:** <https://publications.polymtl.ca/2875/>  
PolyPublie URL:

**Directeurs de  
recherche:** Guchuan Zhu, & David Saussié  
Advisors:

**Programme:** génie électrique  
Program:

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

COMMANDE DES SYSTÈMES AÉROSPATIAUX NON LINÉAIRES À DIMENSIONS  
FINIE ET INFINIE

HUGO LHACHEMI  
DÉPARTEMENT DE GÉNIE ÉLECTRIQUE  
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

THÈSE PRÉSENTÉE EN VUE DE L'OBTENTION  
DU DIPLÔME DE PHILOSOPHIÆ DOCTOR  
(GÉNIE ÉLECTRIQUE)  
DÉCEMBRE 2017

UNIVERSITÉ DE MONTRÉAL

ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE MONTRÉAL

Cette thèse intitulée :

COMMANDE DES SYSTÈMES AÉROSPATIAUX NON LINÉAIRES À DIMENSIONS  
FINIE ET INFINIE

présentée par : LHACHEMI Hugo

en vue de l'obtention du diplôme de : Philosophiæ Doctor

a été dûment acceptée par le jury d'examen constitué de :

M. GOURDEAU Richard, Ph. D., président

M. ZHU Guchuan, Ph. D., membre et directeur de recherche

M. SAUSSIÉ David, Ph. D., membre et codirecteur de recherche

M. SAYDY Lahcen, Ph. D., membre

M. SAAD Maarouf, Ph. D., membre externe

## DÉDICACE

*À ma Maman.*

*À mon Papa.*

*À mon Anounouch.*



## REMERCIEMENTS

▲ It's dangerous to go alone ▲

Je tiens en premier lieu à remercier mes deux directeurs de recherche. Tout d'abord Gu-chuan Zhu qui m'a encadré dès mon arrivée à l'École Polytechnique de Montréal. Il a su, à un moment où je ne me destinais pas au monde de la recherche, trouver les mots pour me convaincre d'entreprendre cette thèse. Je remercie également David Saussié dont l'expertise des systèmes aérospatiaux a façonné les thèmes abordés dans cette thèse. Mes deux directeurs de recherche, par leurs conseils éclairés et leur support sans faille, sont pour beaucoup dans la réussite de ce projet. Ils m'ont offert un cadre de travail stimulant et diversifié propice aux activités de recherche. Je leur suis également reconnaissant de m'avoir fait confiance en me proposant des activités d'enseignement.

Je remercie ensuite les membres du jury, Richard Gourdeau, Lahcen Saydy et Maarouf Saad, pour avoir accepté de lire ma thèse et de participer à la soutenance.

Je remercie Florent et Vincent, deux amis qui me sont très chers.

Je tiens particulièrement à remercier Anne. Merci d'avoir vécu à mes côtés ces quatre années de thèse en faisant de chaque instant un petit moment de bonheur. Alors que ce chapitre se referme, j'ai hâte que l'on entame ensemble l'écriture des prochains.

Mes derniers remerciements sont destinés à ma famille qui m'a toujours encouragé et motivé. Je pense en particulier à ma tante Anne et mes grands-parents Chantal et Georges. J'ai également une pensée émue pour mon arrière grand-mère Fernande. Finalement, je tiens plus que tout à exprimer ma profonde gratitude envers mes parents à qui je dédie ce mémoire. Maman, Papa, merci de votre support inconditionnel. Tout ce que j'ai pu accomplir est le fruit de vos efforts et de vos sacrifices.

## RÉSUMÉ

La synthèse de lois de commande pour les systèmes aérospatiaux demeure un problème complexe soumis à de multiples contraintes d'architecture, de performance et de certification. La recherche d'un rapport performance-poids minimal offrant une autonomie de fonctionnement maximisée est une problématique majeure amenant à employer des structures dont la flexibilité est sans cesse accrue. Une telle tendance amène à devoir développer des solutions de commande active des phénomènes aéroélastiques. Dans ce contexte global, cette thèse s'articule autour de deux thèmes majeurs, à savoir la commande des systèmes aérospatiaux non linéaires par la méthode du séquençement des gains et la commande des ailes d'avions flexibles modélisées par des systèmes à paramètres distribués.

Dans la première partie portant sur la méthode du séquençement des gains, on s'attarde plus spécifiquement sur la problématique des termes de couplage cachés (TCC). Ces termes tirent leur origine de la variation du paramètre de séquençement dans le temps. En effet, alors que la synthèse des gains du contrôleur est effectuée en un point de fonctionnement donné supposé invariant dans le temps, l'implémentation finale voit le paramètre de séquençement varier. Cette différence de nature du point de fonctionnement entre la phase de synthèse et l'implémentation finale est la source même des TCC. Lorsque négligés ou non considérés adéquatement, ils sont à même de dégrader les performances du système bouclé, voire le déstabiliser.

La première solution développée dans cette thèse pour gérer les TCC réside dans leur incorporation dans le processus de synthèse. La difficulté majeure d'une telle approche réside dans le fait que les TCC ne dépendent pas uniquement de la valeur des gains au point d'opération courant mais également de leur évolution dans un voisinage de ce dernier. Dès lors, les méthodes de synthèse classiques de contrôleurs séquencés ne permettent par leur inclusion de manière directe. La solution proposée dans cette thèse consiste à tirer profit de méthodes d'autoséquencement des gains, i.e., des méthodes de synthèse de contrôleurs séquencés dont les formules de séquençement sont fixées *a priori*. Trois approches sont investiguées : la synthèse  $H_\infty$  structurée, le placement de structure propre et une approche itérative pouvant se baser sur une méthode de synthèse quelconque.

La seconde solution développée vise à s'affranchir de la problématique des TCC lors de la phase de synthèse afin de la traiter au niveau de la stratégie d'implémentation du contrôleur séquencé. La stratégie employée tire avantage de composantes de filtrage localisées en entrée et en sortie du contrôleur séquencé. Sa validité est confirmée par des analyses théoriques assu-

rant que l'implémentation permet de préserver le comportement entrée-sortie des contrôleurs locaux tout en préservant leurs propriétés de stabilité interne du point de vue des modes non commandables et non observables.

L'efficacité des différentes méthodes développées dans cette thèse quant à la gestion des TCC est démontrée à travers deux études de cas : la commande en tangage d'un missile et la commande des déplacements flexibles d'une section d'aile modélisée en dimension finie.

Dans la seconde partie de la thèse, on s'intéresse au problème de commande des ailes d'avions flexibles. Les modèles en dimension finie d'un tel système ne pouvant capturer qu'un nombre fini de modes flexibles, ils ne sont pas à même d'en fournir une description fidèle tenant compte des modes flexibles dans leur totalité. Il est donc nécessaire de recourir à une modélisation sous la forme d'un système distribué. Plus spécifiquement, on considère un modèle de l'aile décrit par deux équations aux dérivées partielles (EDP) couplées décrivant respectivement les déplacements en flexion et en torsion de l'aile sous l'effet d'efforts aérodynamiques quasi-stationnaires. La stratégie d'actionnement consiste en des volets localisés à l'extrémité libre de l'aile permettant de générer localement une portance et un moment de torsion.

Le problème de commande à la frontière ainsi posé est étudié dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes. On démontre en particulier que le système placé en boucle fermée est bien posé au sens de Hadamard (*well-posed*), permettant de garantir l'existence et l'unicité des trajectoires du système. Dans un second temps, une analyse de stabilité reposant sur une fonction de Lyapunov est effectuée. Elle permet de dégager un ensemble de contraintes, analogues à celles reportées dans la littérature sur des problématiques de commande similaires, sous lesquelles la stabilité exponentielle du système bouclé peut être garantie.

## ABSTRACT

Control system development for aerospace systems remains a complex issue due to multiple architectural constraints, stringent performance requirements, and strict certification processes. As the autonomy of such systems is critical, the balance between weight and performance pushes toward structures exhibiting increased flexibility. Such a trend forces the development of active control strategies for aeroelastic phenomenon. In this context, this thesis investigates two main themes: gain-scheduling control of nonlinear aerospace systems and control of flexible aircraft wings modeled by distributed parameter systems.

The first part of the thesis deals with gain-scheduling control design. The investigations are devoted to the issue of hidden coupling terms (HCTs). The occurrence of HCTs is due to the time-varying nature of the scheduling parameter. Indeed, the operating points that are supposed to be constant in the synthesis phase are time-varying in final implementation, which induces the HCTs. If not considered properly, they can result in a severe performance degradation, and even the destabilization of the closed-loop system.

The first solution developed in this thesis for handling HCTs consists in the explicit inclusion of HCTs in the synthesis process. The main difficulty of such an approach comes from the fact that HCTs do not only depend on the controller gains at the current operating point, but also on their evolution around this point. Thus, classic gain-scheduled control design methods cannot include the effect of HCTs in a straightforward manner. The solution proposed in this thesis takes advantage of self-scheduling methods, i.e., gain-scheduled control synthesis methods allowing to impose *a priori* the scheduling functions. Three approaches are investigated: structured  $H_\infty$  design, eigenstructure assignment, and an iterative approach employing an arbitrary synthesis method.

The second solution developed aims at avoiding the occurrence of the HCTs at the implementation level. Such a solution allows proceeding to the synthesis of the gain-scheduled controller while not considering the impact of the HCTs, as their occurrence can be avoided by an appropriate implementation. The employed strategy takes advantage of filtering components located at both input and output of the gain-scheduled controller. The validity of this scheme is confirmed by theoretical analyses ensuring that the implementation preserves the input-output behavior of the local controllers, while not affecting the internal stability properties corresponding to the uncontrollable and unobservable modes.

The efficiency of the developed methods for handling HCTs is assessed by two case studies: the control of missile pitch axis dynamics and the control of the flexible displacements for a

wing section modeled in finite dimension.

In the second part of this thesis, the control of flexible aircraft wings is investigated. As finite dimensional models of such flexible systems can only capture a finite number of flexible modes, this kind of approach cannot provide a full description of the system embracing all the flexible modes in their globality. To avoid this pitfall, the approach adopted in this thesis consists in resorting to a wing modeled by a distributed parameter system. More specifically, the wing is described by two coupled partial differential equations (PDEs) modeling the bending and twisting flexible displacements under quasi-steady aerodynamic loads. The actuation scheme is composed of flaps located at the wing tip allowing for the generation of aerodynamic efforts.

The underlying boundary control problem is studied under the framework of  $C_0$ -semigroups. It is shown that the system placed in closed-loop is well-posed, ensuring the unique existence of the closed-loop trajectories. Furthermore, a Lyapunov theory-based stability analysis is conducted. An important accomplishment of this research, is that it achieves an assessment on the exponential stability of the closed-loop system, while relaxing some basic constraints commonly used in the existing literature for similar problems.

## TABLE DES MATIÈRES

DÉDICACE . . . . .	iii
REMERCIEMENTS . . . . .	iv
RÉSUMÉ . . . . .	v
ABSTRACT . . . . .	vii
TABLE DES MATIÈRES . . . . .	ix
LISTE DES TABLEAUX . . . . .	xiii
LISTE DES FIGURES . . . . .	xiv
LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS . . . . .	xviii
LISTE DES ANNEXES . . . . .	xx
CHAPITRE 1 INTRODUCTION . . . . .	1
1.1 Contexte . . . . .	1
1.2 Axes de recherche . . . . .	2
1.3 Plan de la thèse . . . . .	4
CHAPITRE 2 MÉTHODE DE SÉQUENCEMENT DES GAINS ET COMMANDE DES PHÉNOMÈNES AÉROÉLASTIQUES . . . . .	6
2.1 Revue de littérature . . . . .	6
2.1.1 Commande de systèmes non linéaires par la méthode du séquençement des gains . . . . .	6
2.1.2 Commande des phénomènes aéroélastiques . . . . .	11
2.2 Objectifs et méthodologie . . . . .	19
2.2.1 Objectifs de la thèse . . . . .	19
2.2.2 Méthodologie et contributions . . . . .	21
2.2.3 Liste de publications . . . . .	24
CHAPITRE 3 PROBLÉMATIQUE DES TERMES DE COUPLAGE CACHÉS IN- TRODUIITS PAR LE SÉQUENCEMENT DES GAINS . . . . .	26

3.1	Rappels généraux sur la méthode du séquençement des gains . . . . .	27
3.1.1	Synthèse et implémentation d'un contrôleur LTI pour un système non linéaire . . . . .	27
3.1.2	Contrôleur séquencé . . . . .	29
3.2	Problématique des termes de couplage cachés . . . . .	31
3.2.1	Exemples illustratifs . . . . .	32
3.2.2	Formulation générale du problème . . . . .	39
3.3	Solutions développées dans la littérature . . . . .	48
3.3.1	Structure de contrôleur séquencé s'affranchissant des termes de couplage cachés . . . . .	48
3.3.2	<i>Dynamical Gain Scheduling</i> . . . . .	51
3.3.3	Bilan des méthodes proposées dans la littérature . . . . .	52
3.4	Motivation pour le recours à des méthodes d'autoséquencement . . . . .	53
3.4.1	Critères de stabilité/performance . . . . .	53
3.4.2	Passage d'un séquençement continu vers un séquençement polynomial . . . . .	55
3.4.3	Problème de retour de sortie avec composante intégrale en présence de termes de couplages cachés . . . . .	57
3.4.4	De l'approximation polynomiale vers l'autoséquencement . . . . .	60
CHAPITRE 4 GESTION DES TERMES DE COUPLAGE CACHÉS PAR DES MÉTHODES D'AUTOSÉQUENCEMENT . . . . .		62
4.1	Approche par la synthèse $H_\infty$ structurée . . . . .	62
4.1.1	Rappels sur la synthèse $H_\infty$ . . . . .	63
4.1.2	De la synthèse $H_\infty$ structurée vers l'autoséquencement des gains . . . . .	68
4.1.3	Inclusion de l'impact des termes de couplage cachés dans la synthèse $H_\infty$ structurée . . . . .	76
4.1.4	Applications . . . . .	83
4.2	Approche modale par placement de structure propre . . . . .	112
4.2.1	Rappels sur le placement de structure propre . . . . .	112
4.2.2	Inclusion des termes de couplage cachés dans le placement de structure propre . . . . .	120
4.2.3	Applications . . . . .	131
4.3	Approche par une méthode de synthèse itérative . . . . .	147
4.3.1	Méthode des noyaux pour l'autoséquencement des gains . . . . .	148
4.3.2	Inclusion de l'impact des termes de couplage cachés dans la méthode des noyaux . . . . .	155

CHAPITRE 5	IMPLÉMENTATIONS DE CONTRÔLEURS SÉQUENCÉS LIBRES	
	DE TERMES DE COUPLAGE CACHÉS . . . . .	162
5.1	Position du problème . . . . .	163
5.2	Implémentation basée sur la dérivée temporelle du signal de sortie . . . . .	167
5.2.1	Solution exacte . . . . .	167
5.2.2	Solution approchée par stratégie de pseudo-dérivation . . . . .	175
5.3	Implémentation évitant le recours à la dérivée temporelle du signal de sortie	182
5.3.1	D'une stratégie de pseudo-dérivation vers l'utilisation de modes cachés	183
5.3.2	Proposition d'une implémentation améliorée . . . . .	188
5.3.3	Propriétés de l'implémentation . . . . .	189
5.4	Applications pour le retour de sortie statique . . . . .	205
5.4.1	Contrôle de la dynamique en tangage d'un missile . . . . .	205
5.4.2	Suppression active du <i>flutter</i> pour le BACT . . . . .	211
5.5	Application pour les contrôleurs dynamiques . . . . .	216
5.5.1	Implémentation de contrôleurs séquencés synthétisés sur la base d'ob- servateurs locaux . . . . .	216
5.5.2	Suppression active du <i>flutter</i> pour le BACT . . . . .	223
CHAPITRE 6	MODÉLISATION D'UNE AILE FLEXIBLE EN DIMENSION INFINIE	
	ET THÉORIE DES OPÉRATEURS DE $C_0$ -SEMI-GROUPE . . . . .	227
6.1	Modèle d'une aile flexible en dimension infinie . . . . .	228
6.2	Théorie des opérateurs de $C_0$ -semi-groupe . . . . .	229
6.2.1	D'un exemple illustratif vers une approche intuitive de la théorie des opérateurs de $C_0$ -semi-groupe . . . . .	230
6.2.2	Définition et propriétés fondamentales des opérateurs de $C_0$ -semi-groupe	238
6.2.3	Générateur infinitésimal d'un $C_0$ -semi-groupe . . . . .	242
6.2.4	Théorèmes de génération des $C_0$ -semi-groupes . . . . .	245
6.2.5	<i>Well-posedness</i> . . . . .	252
6.2.6	Stabilité exponentielle d'un $C_0$ -semi-groupe . . . . .	255
CHAPITRE 7	CONTRÔLE À LA FRONTIÈRE D'UNE AILE FLEXIBLE HOMO-	
	GÈNE . . . . .	257
7.1	Modèle de l'aile homogène, loi de commande et forme abstraite . . . . .	257
7.1.1	Modèle de l'aile homogène et loi de commande . . . . .	257
7.1.2	Reformulation du problème sous forme abstraite . . . . .	258
7.2	<i>Well-posedness</i> . . . . .	262
7.2.1	Motivation et introduction d'un second produit scalaire . . . . .	262



7.2.2	$\mathcal{A}_1$ génère un $C_0$ -semi-groupe . . . . .	266
7.2.3	$\mathcal{A}_2$ est borné . . . . .	278
7.2.4	<i>Well-posedness</i> du problème de Cauchy . . . . .	279
7.3	Stabilité exponentielle . . . . .	280
7.3.1	Décroissance exponentielle de l'énergie du système . . . . .	280
7.3.2	Stabilité exponentielle uniforme des déplacements flexibles . . . . .	285
7.4	Résultats de simulation . . . . .	286
CHAPITRE 8 CONTRÔLE À LA FRONTIÈRE D'UNE AILE FLEXIBLE NON HO-		
MOGÈNE . . . . .		289
8.1	Modèle de l'aile homogène, loi de commande et forme abstraite . . . . .	289
8.1.1	Modèle de l'aile homogène et loi de commande . . . . .	289
8.1.2	Reformulation du problème sous forme abstraite . . . . .	290
8.2	<i>Well-posedness</i> du problème de contrôle à la frontière . . . . .	293
8.2.1	Motivation et introduction d'un second produit scalaire . . . . .	293
8.2.2	$\mathcal{A}_1$ génère un $C_0$ -semi-groupe . . . . .	297
8.2.3	$\mathcal{A}$ génère un $C_0$ -semi-groupe . . . . .	301
8.2.4	<i>Well-posedness</i> du problème de contrôle à la frontière . . . . .	302
8.3	Analyses de stabilité . . . . .	304
8.3.1	Stabilité exponentielle du $C_0$ -semi-groupe . . . . .	305
8.3.2	Analyse de la stabilité pour des entrées de perturbation bornées . . . . .	310
8.4	Résultats de simulation . . . . .	312
CHAPITRE 9 CONCLUSION . . . . .		315
9.1	Contributions des travaux de recherche . . . . .	315
9.2	Perspectives . . . . .	317
RÉFÉRENCES . . . . .		319
ANNEXES . . . . .		337

## LISTE DES TABLEAUX

Tableau 4.1	Résultats de la synthèse $H_\infty$ structurée sur le missile . . . . .	91
Tableau 4.2	Valeurs numériques des paramètres du BACT . . . . .	98
Tableau 4.3	Paramètres de la représentation d'état du BACT . . . . .	99
Tableau 4.4	Résultats de la synthèse $H_\infty$ structurée sur le BACT . . . . .	107
Tableau 4.5	Points d'opération et valeurs propres associées désirées pour le système en boucle fermée . . . . .	119
Tableau 4.6	Position des pôles du système en boucle fermée pour des gains synthétisés en ne tenant pas compte de l'impact des TCC et implémentés avec $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	120
Tableau 4.7	Gains séquencés du missile par placement de structure propre - Synthèse ne tenant pas compte des TCC . . . . .	134
Tableau 4.8	Gains séquencés du missile par placement de structure propre - Synthèse tenant compte des TCC pour $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	134
Tableau 4.9	Gains séquencés du missile par placement de structure propre - Synthèse tenant compte des TCC pour $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	134
Tableau 4.10	Position des pôles du système en boucle fermée pour des gains synthétisés en ne tenant pas compte de l'impact des TCC et implémentés avec $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	135
Tableau 4.11	Points d'opération utilisés pour le design du contrôleur du BACT et pôles en boucle ouverte associés . . . . .	142
Tableau 4.12	Paramètres du placement de pôles pour le contrôle du BACT . . . . .	142
Tableau 4.13	Gains séquencés du BACT par placement de structure propre - synthèse avec/sans TCC . . . . .	143
Tableau 4.14	Position des pôles du système en boucle fermée pour des gains synthétisés en ne tenant pas compte de l'impact des TCC et implémentés avec $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	144
Tableau 4.15	Point d'opération considérés pour mettre en œuvre la méthode des noyaux sur le modèle du missile . . . . .	159

# LISTE DES FIGURES

Figure 3.1	Exemple 1 - Illustration de l'impact de l'implémentation d'un contrôleur séquencé. . . . .	34
Figure 3.2	Exemple 1 - Évolution des valeurs propres du système bouclé après linéarisation pour différentes valeurs d'équilibre du point d'opération . . . . .	36
Figure 3.3	Contrôleur linéaire $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ . . . . .	41
Figure 3.4	Système linéaire en boucle fermée $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$ . . . . .	42
Figure 3.5	Dynamique linéarisée $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\boldsymbol{\theta}_e)$ du contrôleur séquencé . . . . .	44
Figure 3.6	Système linéarisé en boucle fermée $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})(\boldsymbol{\theta}_e)$ . . . . .	47
Figure 4.1	Forme standard pour la synthèse $H_\infty$ . . . . .	65
Figure 4.2	Problème $H_\infty$ standard . . . . .	66
Figure 4.3	Illustration du caractère non lisse des problèmes min-max . . . . .	71
Figure 4.4	Reformulation sous forme standard du problème d'autoséquence- ment en présence de TCC . . . . .	82
Figure 4.5	Missile en boucle fermée avec l'architecture de contrôleur séquencé pro- posée . . . . .	86
Figure 4.6	Dynamique linéarisée du missile en boucle fermée utilisée à des fins de synthèse . . . . .	89
Figure 4.7	Domaine d'opération du missile et domaine des incertitudes aérodyna- miques . . . . .	90
Figure 4.8	Réponse temporelle du missile en boucle fermée pour une série d'éche- lons de référence . . . . .	93
Figure 4.9	Évolution des gains du contrôleur lorsque placé en boucle fermée avec le missile pour une série d'échelons de référence . . . . .	94
Figure 4.10	Réponse du missile en boucle fermée avec des coefficients aérodyna- miques perturbés avec une amplitude maximale de $\pm 25\%$ . . . . .	95
Figure 4.11	Modèle aéroélastique du BACT . . . . .	97
Figure 4.12	Comportement en boucle ouverte du BACT pour la vitesse d'écoule- ment de l'air $U = 15$ m/s . . . . .	100
Figure 4.13	BACT en boucle fermée avec l'architecture de contrôleur séquencé pro- posée . . . . .	103
Figure 4.14	Dynamique linéarisée du BACT en boucle fermée utilisée à des fins de synthèse . . . . .	104
Figure 4.15	Discrétisation du domaine d'opération du BACT . . . . .	106

Figure 4.16	Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du <i>flutter</i> et en suivi de référence pour $U = 15$ m/s . . . . .	108
Figure 4.17	Évolution des gains du contrôleur lorsque placé en boucle fermée avec le BACT . . . . .	109
Figure 4.18	Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du <i>flutter</i> et en suivi de référence $U \in \{10, 11, \dots, 19, 20\}$ m/s . . . . .	110
Figure 4.19	Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du <i>flutter</i> et en suivi de référence pour $U = 16$ m/s et une perturbation du coefficient de rigidité en torsion atteignant les $\pm 10\%$ . . . . .	111
Figure 4.20	Structure du contrôleur nonlinéaire séquencé par retour de sortie avec gain intégral en amont de la composante intégrale $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	123
Figure 4.21	Dynamique linéarisée $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$ du contrôleur séquencé . . . . .	124
Figure 4.22	Structure du contrôleur nonlinéaire séquencé par retour de sortie avec gain intégral en aval de la composante intégrale $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	127
Figure 4.23	Missile en boucle fermée avec le contrôleur séquencé $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ correspondant à un gain intégral situé en amont de la composante intégrale . .	132
Figure 4.24	Réponse du missile en boucle fermée avec $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ pour une série d'échelons de référence . . . . .	136
Figure 4.25	Réponse du missile en boucle fermée avec $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ pour une série d'échelons de référence . . . . .	137
Figure 4.26	Commande du missile - Évolution temporelle des gains des contrôleurs $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ et $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . . .	138
Figure 4.27	Réponse du missile en boucle fermée avec $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ pour des coefficients aérodynamiques perturbés avec une amplitude maximale de $\pm 25\%$ . .	139
Figure 4.28	Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du <i>flutter</i> et en suivi de référence pour $U = 16$ m/s . . . . .	145
Figure 4.29	Commande du BACT - Évolution des gains du contrôleur $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . .	146
Figure 4.30	Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du <i>flutter</i> et en suivi de référence pour $U \in \{12, 13, \dots, 19, 20\}$ . . . . .	147
Figure 4.31	Réponse temporelle du missile en boucle fermée pour une série d'échelons de référence . . . . .	160
Figure 4.32	Commande du missile - Évolution des gains du contrôleur $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . . . .	161
Figure 5.1	Contrôleur linéaire $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ . . . . .	164
Figure 5.2	Système en boucle fermée $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$ . . . . .	165
Figure 5.3	Exemple 1 - Comparaison de l'implémentation naïve et de l'implémentation <i>velocity-based algorithm</i> . . . . .	169

Figure 5.4	Comparaison de la réponse du système en boucle fermée pour l'implémentation naïve $\mathcal{C}_{\text{seq}}$ et l'implémentation <i>velocity-based algorithm</i> $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ pour une entrée de référence de type échelon d'amplitude 0.5 . . . . .	171
Figure 5.5	<i>Velocity-based algorithm</i> $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ . . . . .	172
Figure 5.6	Approximation du <i>velocity-based algorithm</i> avec pseudo-dérivation des entrées $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$ . . . . .	177
Figure 5.7	Exemple 1 - Architecture du système non linéaire en boucle fermée $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel,a}})$ basée sur l'implémentation <i>velocity-based algorithm</i> avec pseudo-dérivation des entrées . . . . .	180
Figure 5.8	Exemple 1 - Lieu des racines pour $\theta_e = 0.5$ illustrant l'impact du paramètre de pseudo-dérivation pour l'implémentation $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$ sur la position des pôles en boucle fermée . . . . .	181
Figure 5.9	Comparaison de la réponse du système en boucle fermée pour l'implémentation <i>velocity-based algorithm</i> $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ et pour l'approche par pseudo-dérivation $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$ pour $\varepsilon = 0.01$ et $\varepsilon = 0.31$ . . . . .	182
Figure 5.10	Exemple 1 - Architecture du système non linéaire en boucle fermée $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel+}})$ basée sur l'implémentation d'une version modifiée du <i>velocity-based algorithm</i> avec stratégie de pseudo-dérivation du contrôleur séquentiel. . . . .	185
Figure 5.11	Comparaison de la réponse du système en boucle fermée pour l'implémentation <i>velocity-based algorithm</i> $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$ pour $\tau = 0.31$ et $\tau = 1$ avec l'implémentation $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ et son approximation par pseudo-dérivation pour $\varepsilon = 0.31$ . . . . .	187
Figure 5.12	Architecture de l'implémentation améliorée d'un contrôleur séquentiel $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$ . . . . .	189
Figure 5.13	Amélioration de l'implémentation <i>velocity-based algorithm</i> : discussion de la stratégie de pré/post-filtrage . . . . .	203
Figure 5.14	Comparaison de la réponse du missile en boucle fermée pour les trois stratégies d'implémentation . . . . .	208
Figure 5.15	Comparaison de la réponse du missile en boucle fermée pour les trois stratégies d'implémentation . . . . .	209
Figure 5.16	Réponse du missile en boucle fermée pour $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$ et $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$ en présence de bruits de mesure . . . . .	210
Figure 5.17	Évolution des états de pré/post-filtrage de $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$ avec $\tau = 0.02$ pour le contrôle du missile . . . . .	211

Figure 5.18	Comparaison de la réponse du BACT en boucle fermée pour les trois stratégies d'implémentation . . . . .	214
Figure 5.19	Évolution des composantes de pré/post-filtrage de $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ avec $\tau = 0.05$ pour le contrôle du BACT . . . . .	215
Figure 5.20	Comparaison de la réponse du BACT en boucle fermée avec $U = 16$ m/s pour les trois stratégies d'implémentation . . . . .	225
Figure 5.21	Évaluation sur le BACT de signaux internes à l'implémentation $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ dans le cas d'observateurs locaux de Luenberger . . . . .	226
Figure 7.1	Réponse du système en boucle ouverte . . . . .	287
Figure 7.2	Réponse du système en boucle fermée . . . . .	287
Figure 7.3	Comportement du système bouclé à l'extrémité de l'aile et effort de commande associé . . . . .	288
Figure 8.1	Réponse du système en boucle ouverte . . . . .	313
Figure 8.2	Réponse du système en boucle fermée . . . . .	313
Figure 8.3	Comportement du système bouclé à l'extrémité de l'aile et effort de commande associé . . . . .	314
Figure B.1	Simulation de la solution de l'équation différentielle $\dot{x} = f_{0.45,0.45}(x)$ pour les conditions initiales $x_1(0) = -10^{-6}$ et $x_2(0) = 10^{-6}$ . . . . .	353
Figure B.2	Couples $(\alpha, \beta)$ pour lesquels la stabilité de l'origine du système $\dot{x} = f_{\alpha,\beta}(x)$ a été établie par application du Théorème B.8 . . . . .	366

## LISTE DES SIGLES ET ABRÉVIATIONS

### Acronymes

BACT	<i>Benchmark Active Control Technology</i>
BMI	<i>Bilinear Matrix Inequality</i>
DGS	<i>Dynamical Gain-Scheduling</i>
EDO	Équation Différentielle Ordinaire
EDP	Équation aux Dérivées Partielles
HALE	<i>High Altitude Long Endurance</i>
LFT	<i>Linear Fractionnal Transformation</i>
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i>
LPV	<i>Linear Parameter-Varying</i>
LQR	<i>Linear Quadratic Regulator</i>
LTI	Linéaire à Temps Invariant
MIMO	<i>Multi Input Multi Output</i>
NASA	<i>National Aeronautics and Space Administration</i>
PI	Proportionnel Intégral
PID	Proportionnel Intégral Dérivé
SISO	Single Input Single Output
TCC	Termes de Couplage Cachés

### Notations mathématiques

$\mathbb{N}$	Ensemble des entiers naturels
$\mathbb{R}$	Corps des nombres réels
$\mathbb{R}^*$	Ensemble des nombres réels non nuls
$\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+^*$	Ensemble des nombres réels positifs, strictement positifs
$\mathbb{C}$	Corps des nombres complexes
$\mathbb{C}^*$	Ensemble des nombres complexes non nuls
$\mathbb{R}^n, \mathbb{C}^n$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ espace vectoriel de dimension $n$
$\mathcal{S}^{n-1}$	Hypersphère unité de $\mathbb{R}^n$
$\mathbb{R}^{n \times m}, \mathbb{C}^{n \times m}$	Anneau des matrices de dimension $n \times m$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$
$\mathcal{G}_n(\mathbb{R}), \mathcal{G}_n(\mathbb{C})$	Ensemble des matrices carrées de dimension $n$ inversibles
$\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$	Sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n \times n}$ constitué des matrices symétriques

$\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices symétriques semi-définies positives et définies positives
$\mathcal{S}_n^-(\mathbb{R}), \mathcal{S}_n^{-*}(\mathbb{R})$	Ensemble des matrices symétriques semi-définies négatives et définies négatives
$\mathbb{R}[X]$	Anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbb{R}$ .
$\mathbb{R}_n[X]$	Groupe des polynômes de degré inférieur ou égal à $n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$ .



**LISTE DES ANNEXES**

Annexe A	ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ D'UNE FONCTION . . . . .	337
Annexe B	EXTENSION DE LA PREMIÈRE MÉTHODE DE LYAPUNOV AU CAS DES CHAMPS DE VECTEURS NON CONTINÛMENT DIF- FÉRENTIABLES . . . . .	343
Annexe C	NON LINÉARISABILITÉ PAR RETOUR DE SORTIE DU MODÈLE BACT . . . . .	371
Annexe D	RAPPELS MATHÉMATIQUES . . . . .	377
Annexe E	SIMULATION DU MODÈLE EDP DE L'AILE FLEXIBLE . . . . .	390

## CHAPITRE 1 INTRODUCTION

### 1.1 Contexte

L'automatique a joué un rôle prépondérant dans le développement des technologies aéronautiques et spatiales lors du dernier siècle. En alliant des aspects de modélisation, d'analyse et de commande des systèmes dynamiques, l'automatique a permis de développer des stratégies sophistiquées assurant la commande et le guidage de technologies complexes telles que (en se limitant aux domaines de l'aéronautique et du spatial) les avions, les missiles, les lanceurs spatiaux, les satellites, les sondes spatiales, etc. La démocratisation de telles stratégies de commande a été rendue possible grâce à l'essor combiné des calculateurs numériques et de technologies d'actionnement fiables et performantes. Dans le cadre de systèmes avec un être humain aux commandes, dont un exemple typique est l'avion, l'émergence des systèmes de commande a permis un allègement significatif de la tâche du pilote, allant des systèmes d'augmentation de stabilité et de contrôlabilité jusqu'aux systèmes de guidage et de pilotage automatique. Les systèmes de commande ont également permis l'émergence de technologies s'affranchissant de la présence directe d'un être humain afin d'être opéré en temps réel. C'est par exemple le cas des sondes spatiales dont l'éloignement à plusieurs minutes ou heures lumières de la Terre empêche tout contrôle en temps réel par un être humain.

Dans le domaine de l'aviation, la démocratisation des systèmes de commandes de vol s'est accompagnée de l'explosion du trafic aérien. On compte aujourd'hui plus de 100,000 vols par jour, soit un total annuel excédant les 37 millions de vols. Cette croissance du trafic aérien, combinée avec le prix croissant du pétrole, incite les aviateurs, sous l'impulsion des compagnies aériennes, à concevoir des avions de plus en plus performants tout en étant de plus en plus économes en carburant. Une des principales approches engagées dans l'industrie réside dans la réduction de la masse des avions. La piste privilégiée consiste à intégrer massivement aux avions modernes des matériaux composites, dont le rapport performance-poids constitue un atout majeur. La même problématique se pose pour les avions militaires et les drones qui doivent allier un haut niveau de performance et une autonomie maximisée. Cette flexibilité accrue induit de nombreux nombreux défis en termes de commande. En effet, de par l'interaction de phénomènes aérodynamiques, élastiques et inertiels, les phénomènes aéroélastiques peuvent aboutir à une sévère dégradation des performances de l'appareil, voire compromettre totalement son intégrité structurelle. On retrouve ici une problématique inhérente aux applications spatiales telles que les lanceurs et les panneaux solaires de satellite en termes de compromis entre masse minimale et rigidité suffisante de la structure.

La principale conséquence de cette plus grande flexibilité se situe au niveau des fréquences d'excitation des modes flexibles de l'avion (ou modes de vibration) qui viennent se recouper avec la bande de fréquence utilisée pour le contrôle. Dans le passé, les avions étaient conçus avec des matériaux dont la rigidité était importante. De cette manière, les fréquences d'excitation des modes flexibles de l'avion ne se recoupaient que très peu avec la bande de fréquence utilisée pour les commandes de vol. Des solutions passives étaient alors mises en place pour limiter le couplage à travers l'implémentation de filtres coupe-bande (*notch filters*) de manière à atténuer les fréquences susceptibles d'introduire des phénomènes de vibration au niveau de la structure de l'appareil. Une telle approche se révèle aujourd'hui insuffisante dans le cadre des avions flexibles afin d'assurer la stabilité et l'intégrité de la structure.

La modélisation et le contrôle des avions flexibles constituent l'un des principaux défis à relever pour les décennies à venir, comme en atteste l'éditeur en chef du *IEEE Control Systems Magazine*, Jonathan P. How : « *Can the control field develop and publish a set of benchmark problems that capture and clearly identify the current key challenges in the field, such as [...] control of nonlinear flexible aircraft ?* » (*IEEE Control Systems Magazine*, février 2015).

## 1.2 Axes de recherche

Deux axes de recherche principaux sont investigués dans le cadre de cette thèse. Le premier porte sur la commande de systèmes non linéaires par le recours à la méthode populaire dans le contexte aéronautique du séquençement des gains. Le second porte sur le contrôle d'une aile flexible en dimension infinie.

### Axe de recherche portant sur le séquençement des gains

Les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial sont soumis à des critères de fiabilité et de performance très stricts. Plus encore, le domaine de l'aviation civile, sous l'impulsion des agences gouvernementales, est soumis à un processus de certification exigeant. C'est pour cela que les ingénieurs privilégient généralement dans ces domaines des architectures de contrôle simples, dont le réglage est relativement intuitif sur la base de considérations physiques et disposant d'un retour d'expérience sur plusieurs années. Dans ce contexte, l'une des méthodes privilégiées est celle du séquençement des gains, également connue sous le terme de *gain-scheduling*. Cette méthode permet de commander un système non linéaire sur la base d'une famille de contrôleurs linéaires à temps invariant (LTI), chacun ayant été synthétisé afin de fournir un niveau de performance adéquat en un point de fonctionnement spécifique du système. Dès lors, les gains du contrôleur séquencé sont mis à jour en temps réel en fonction

du point d'opération courant du système.

Bien que la méthode du séquençement des gains est aujourd'hui largement employée dans les domaines de l'aéronautique et de l'aérospatial avec un très fort retour d'expérience, des défis demeurent. Celui investigué dans le cadre de cette thèse est référé sous la dénomination de termes de couplage cachés (TCC), encore appelés *hidden coupling terms* en anglais. Ces « termes cachés » tirent leur origine du fait que la synthèse des contrôleurs locaux est effectuée en un point de fonctionnement constant, alors que ce dernier est en réalité amené à varier dans le temps au sein du contrôleur séquencé final. De manière plus spécifique, la linéarisation du contrôleur séquencé fait en général apparaître des termes supplémentaires, les TCC, dont l'origine provient des variations temporelles du point d'opération. Dès lors, ces TCC introduisent une disparité entre la dynamique utilisée lors de la synthèse et celle réellement obtenue une fois le contrôleur séquencé implémenté sur le système d'origine.

Dans le cas d'un point d'opération uniquement fonction de signaux exogènes, les TCC ont pour effet d'introduire une entrée de type perturbation et n'ont donc pas d'impact sur la stabilité locale du système bouclé. Ce n'est pas le cas lorsque le point d'opération dépend d'un signal endogène telle une variable d'état ou une sortie du système. Dans cette configuration, la dynamique du contrôleur devient non linéaire et les TCC introduisent des boucles internes cachées. De telles boucles internes, lorsque non gérées adéquatement, sont à même de dégrader la performance du système bouclé, voire de le déstabiliser.

Dans ce contexte, le premier axe de recherche de cette thèse vise à développer des méthodes permettant une gestion explicite des TCC, en particulier en présence d'un séquençement endogène. Pour cela, deux méthodes sont investiguées. La première consiste en la gestion explicite des TCC durant la phase de synthèse des gains du contrôleur. La seconde vise à fournir une implémentation générique et systématique évitant de manière structurelle l'apparition des TCC lors de la phase d'implémentation du contrôleur séquencé.

### **Axe de recherche portant sur le contrôle d'une aile en dimension infinie**

L'émergence de structures de plus en plus flexibles dans les domaines de l'aéronautique et de l'espace conduit à une interaction toujours plus prononcée entre dynamique rigide et dynamique flexible. Dans ce contexte, les phénomènes aéroélastiques, introduits par l'interaction des forces structurelles, inertielles et aérodynamiques, jouent un rôle de plus en plus prépondérant et sont à même de dégrader de manière dramatique les performances d'un avion et de compromettre l'intégrité de sa structure. Le développement de solutions de commande pour contrer ces effets néfastes devient primordial.

L'un des phénomènes aéroélastiques les plus critiques pour les avions conventionnels est le

*flutter*, parfois traduit en français sous l'expression de « battement des ailes ». Ce dernier est une instabilité aéroélastique de type oscillatoire caractérisée par une sévère dégradation de l'amortissement de la structure résultant de la présence d'efforts aérodynamiques instationnaires. Il en résulte de manière générale l'émergence d'un cycle limite d'oscillations causant la dégradation de la manœuvrabilité de l'appareil et la réduction de sa durée de vie en fatigue dû aux cycles de contraintes sous-jacents.

Des études ont été menées afin de développer des modèles et des dispositifs expérimentaux pour supprimer par des stratégies de commande ce phénomène de *flutter*. Néanmoins, la majorité des approches se limitent au recours à un modèle en dimension finie ne capturant que les premiers modes flexibles de l'aile. Or, la dynamique d'une aile peut être modélisée de manière plus précise en dimension infinie par un système d'équations aux dérivées partielles (EDP) couplées modélisant respectivement la dynamique en flexion et en torsion. Dans le cadre de cette thèse, un tel système à paramètres distribués est considéré avec une commande à la frontière exercée à l'extrémité de l'aile. Plus spécifiquement, l'aile considérée dispose de volets localisés en bout d'aile permettant de générer localement des efforts aérodynamiques en portance et en torsion.

Il existe deux approches afin de commander un tel système à paramètres distribués. La première consiste en la discrétisation du problème en un jeu d'équations différentielle ordinaire (EDO) en utilisant par exemple les méthodes de Galerkin ou de Rayleigh-Ritz. Une telle approche présente l'avantage de pouvoir tirer profit des méthodes de commande en dimension finie. Cependant, il n'existe en général pas de garantie que la transposition de la loi de commande ainsi obtenue fonctionne adéquatement sur le système à paramètres distribués d'origine. *A contrario* la seconde approche, qui est celle employée dans cette thèse, consiste à procéder à la synthèse de la loi de commande directement sur le modèle EDP.

### 1.3 Plan de la thèse

Le Chapitre 2 est consacré à la revue de littérature portant sur les différents thèmes abordés dans cette thèse. Les principaux éléments passés en revue portent sur la méthode du séquençement des gains et les TCC associés, et sur la problématique d'une aile flexible modélisée par un système à paramètres distribués. Le chapitre se conclut sur les objectifs et contributions de la thèse.

La suite de la thèse se divise en deux parties. La première correspond aux Chapitres 3 à 5 et est consacrée à la problématique du séquençement des gains en présence de TCC. Le Chapitre 3 vise à effectuer des rappels généraux et à introduire la problématique des TCC. Après

avoir illustré à travers des exemples académiques le phénomène d'apparition des TCC, le problème dans sa généralité est introduit. Les solutions et limitations des méthodes disponibles dans la littérature sont finalement présentées. Après avoir motivé le recours à des méthodes d'autoséquencement dans le cadre de la gestion explicite des TCC, le Chapitre 4 détaille la stratégie ainsi proposée à travers trois méthodes de synthèse de contrôleurs autoséquencés. La première tire profit des méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée. La deuxième repose sur une méthode de placement de structure propre. La dernière emploie une approche de type synthèse itérative. L'efficacité de ces différentes méthodes est illustrée sur deux exemples tirés du domaine aérospatial, à savoir la commande en tangage d'un missile et la commande des déplacements flexibles d'une section d'aile à deux degrés de liberté. À contre-courant de la stratégie présentée dans le chapitre précédent, le Chapitre 5 propose une méthode d'implémentation des contrôleurs séquencés qui permet d'éviter structurellement l'apparition des TCC. Une comparaison avec l'approche pré-existante reportée dans la littérature y est documentée.

La seconde partie de la thèse est développée au sein des Chapitres 6 à 8. Elle est consacrée au problème de commande d'une aile flexible actionnée à son extrémité et modélisée par un système à paramètres distribués de deux EDP couplées. Le Chapitre 6 introduit dans un premier temps le modèle de l'aile étudié. Dans un second temps, les outils théoriques de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes permettant de traiter les problèmes de commande en dimension infinie sont brièvement présentés. Le Chapitre 7 est dévolu au problème de commande de l'aile homogène, où l'on s'attarde en particulier sur les propriétés de *well-posedness* (problème « bien posé ») et de stabilité exponentielle. Finalement, le Chapitre 8 étend l'étude du chapitre précédent aux cas d'une aile non homogène et en présence de perturbations en entrée de commande.

Le Chapitre 9 fait office de conclusion de la thèse, tirant le bilan sur les objectifs de recherche accomplis et les perspectives qui en résultent.

## **CHAPITRE 2 MÉTHODE DE SÉQUENCEMENT DES GAINS ET COMMANDE DES PHÉNOMÈNES AÉROÉLASTIQUES**

Cette thèse s'ouvre par une revue de littérature visant à effectuer l'état de l'art concernant les différentes problématiques évoquées en introduction et qui motivent les différents axes de recherche. Deux axes de recherche principaux se dégagent : la commande de systèmes non linéaires par séquencement des gains et la commande de systèmes de dimension infinie. La revue de littérature aborde ces aspects en deux temps dans le contexte d'applications aéronautiques.

La premier thème concernant la commande des systèmes non linéaires est abordé sous l'angle de la problématique du séquencement de gains à architecture fixe. Cette problématique vise à concilier le recours à des architectures de contrôle simples dont le réglage est effectué par des méthodes linéaires avec la nécessité de commander des systèmes non linéaires sur un large domaine d'opération. La revue de littérature sur ce thème est abordée de manière à s'attaquer plus spécifiquement au problème des TCC qui représente le cœur des travaux de recherche conduits.

Le second thème concerne la commande d'une aile flexible modélisée par un système à paramètres distribués. La revue de littérature vise à placer cette problématique dans le cadre général de la commande des phénomènes aéroélastiques. Les contributions portant sur la commande de tels systèmes, modélisés autant en dimension finie qu'en dimension infinie, sont passées en revue.

Tirant profit de cette revue de littérature, les objectifs de la thèse ainsi que les contributions apportées seront exposés.

### **2.1 Revue de littérature**

#### **2.1.1 Commande de systèmes non linéaires par la méthode du séquencement des gains**

La synthèse de systèmes de commandes reposant sur le séquencement de contrôleurs à architecture fixe est un problème complexe au confluent de plusieurs champs d'étude de l'automatique. Bien que largement employée dans l'industrie aérospatial depuis plusieurs décennies, la méthode du séquencement des gains présente encore à l'heure actuelle un certain nombre de défis. L'un d'entre eux, investigué dans cette thèse, est celui des TCC dont la gestion demeure un problème épineux. Les différents aspects de cette problématique sont détaillés

ci-dessous.

### 2.1.1.1 Synthèse de contrôleurs LTI à architecture fixe

La synthèse d'un contrôleur LTI à architecture fixe est l'une des problématiques majeures de l'automatique. Elle correspond à un problème de stabilisation par retour de sortie pour une architecture définie *a priori*. De nombreuses méthodes ont été développées pour résoudre ce problème (Blondel et al., 1995; Syrmos et al., 1997). Parmi les plus élémentaires on trouve les méthodes de placement de pôles via le lieu des racines ou les critères algébriques de type Routh-Hurwitz (Dorf and Bishop (2010)). Parmi les plus sophistiquées on peut mentionner celles impliquant la résolution d'inégalités matricielles linéaires (en anglais *Linear Matrix Inequality* (LMI)) (Apkarian et al., 2003; Benton and Smith, 1998; Cao and Sun, 1998; Dong and Yang, 2013; Ebihara et al., 2004; Kim et al., 2007) dans le cadre de la théorie de Lyapunov (Rugh, 1996) ou des méthodes d'optimisation non lisse (Burke and Overton, 1994; Toscano, 2013). La majorité de ces méthodes repose sur une procédure itérative. Il est à souligner que la synthèse d'un contrôleur à architecture fixe demeure un sujet de recherche actif présentant encore à l'heure actuelle de nombreux défis. Cela s'explique en partie dû au fait que même dans le cas d'un simple contrôleur statique par retour de sortie, le problème à résoudre se reformule naturellement sous la forme d'inégalités matricielles bilinéaires (en anglais *Bilinear Matrix Inequality* (BMI)) et est généralement NP-difficile (Toker and Ozbay, 1995).

Le problème de synthèse à architecture fixe peut se voir augmenter du problème de synthèse robuste (Sadabadi and Peaucelle, 2016). Dans cette configuration, le contrôleur doit être ajusté de façon à ce que le système en boucle fermée rencontre les performances de manière robuste quant aux incertitudes du modèle. Les solutions classiques en termes de synthèse robuste, à savoir la synthèse  $H_\infty$  (Zames, 1981; Doyle, 1982) et la  $\mu$ -synthèse (Doyle, 1982), mènent à l'obtention de contrôleurs d'ordre élevé et dont la structure ne peut être imposée *a priori*. L'émergence d'outils d'analyse robuste (Kharitonov, 1981; Saydy et al., 1990) a permis de lever ces limitations en permettant la synthèse robuste à architecture fixe (Saussié et al., 2011). De nombreux travaux ont été menés sur l'extension des méthodes  $H_\infty$  classiques au problème de synthèse à architecture fixe. Ils aboutissent soit à la résolution de BMI (Safonov et al., 1994), soit à une approche d'optimisation non lisse (Clarke et al., 2008; Clarke, 2013) donnant lieu aux méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurées (Apkarian and Noll, 2006, 2007; Burke et al., 2006; Gahinet and Apkarian, 2011).



### 2.1.1.2 Séquencement des gains

Les méthodes de synthèse de contrôleurs LTI évoquées précédemment permettent de commander un système non linéaire au voisinage d'un point d'équilibre donné. À cet effet, la synthèse est effectuée sur la dynamique linéarisée du système au point d'équilibre d'intérêt. Le contrôleur ainsi obtenu ne peut, en règle générale, assurer la stabilité et la performance du système non linéaire qu'au voisinage du point d'équilibre considéré. Dans le cas d'un système devant être opéré sur un large domaine d'opération, une telle approche se révèle en général insuffisante.

L'approche classique consiste alors à procéder à un séquencement des gains, plus connu sous le terme anglais de *gain-scheduling*. Il s'agit d'actualiser la valeur des gains du contrôleur en temps réel en fonction du point de fonctionnement courant du système (Rugh and Shamma, 2000; Leith and Leithead, 2000a). À cette fin, des contrôleurs LTI sont synthétisés pour un nombre fini de points de fonctionnement couvrant le domaine d'opération. Les gains ainsi obtenus sont interpolés en fonction des variables dites de séquencement, celles-ci étant choisies de manière à être représentatives du point d'opération courant. Des exemples typiques de variables de séquencement dans le contexte aéronautique sont la vitesse, l'altitude, la pression dynamique et l'angle d'attaque. La procédure usuellement employée pour le séquencement des gains est la suivante :

1. Sélection d'un nombre fini de points d'opérations couvrant la plage de fonctionnement du système.
2. Linéarisation de la dynamique du système en chacun de ces points d'opération.
3. Pour chaque modèle linéaire ainsi obtenu, synthèse d'un contrôleur LTI pour une architecture fixée *a priori*.
4. Obtention des gains du contrôleur séquencé en interpolant les gains des contrôleurs précédemment synthétisés.

Bien que simple en apparence, la méthode du séquencement des gain soulève de nombreux défis, notamment en regard des étapes 1 et 4. En effet, une sélection adéquate des points d'opération est nécessaire afin de capturer efficacement l'évolution de la dynamique du système sur l'intégralité du domaine d'opération. L'une des tentatives les plus notables permettant de formaliser un tel choix réside dans le recours à la *gap metric* qui permet de mesurer, en un certain sens, la distance entre deux modèles LTI (Georgiou, 1988). Le recours à une telle métrique dans l'aide à la sélection des points d'opération pour le séquencement des gains a été reporté dans (Li and Zheng, 2008; Theodoulis and Duc, 2009). La phase d'interpolation est également une phase délicate car ne fournissant généralement aucune garantie quant au bon fonctionnement du système entre deux points de design (Stilwell and Rugh, 2000). Des

travaux ont néanmoins été entrepris de manière à pouvoir fournir, sous certaines conditions, de telles garanties (Stilwell and Rugh, 1999, 2000). Dans le cas où la phase d'interpolation aboutit à la stabilité du système bouclé en tout point de fonctionnement, la stabilité du système d'origine placé en boucle fermée avec le contrôleur séquencé peut alors être assurée pour des variations suffisamment lentes du point d'opération (Lawrence et al., 1990; Shamma and Athans, 1991). Il s'agit donc de vérifier *a posteriori* que les variables de séquençement employées varient suffisamment lentement pour préserver la stabilité du système bouclé (Shamma and Athans, 1992).

Afin d'éviter une telle vérification *a posteriori*, des méthodes ont été développées pour tenter de fournir des garanties *a priori*. Supposons que le système non linéaire à commander peut être directement écrit sous une forme *linear parameter-varying* (LPV) avec un point d'opération dépendant exclusivement de variables exogènes. Dans ce cas, des approches basées sur des fonctions de Lyapunov permettent l'obtention d'un contrôleur LPV assurant la stabilité du système bouclé avec un niveau adéquat de performance pour une vitesse de variation maximum prédéfinie des variables de séquençement (Biannic and Apkarian, 1999; Vesely and Ilka, 2013; Wu et al., 1997). Cependant, l'écriture du système non linéaire d'origine sous forme LPV n'est en général pas une tâche aisée. En particulier, l'obtention d'un modèle LPV basé sur la linéarisation de la dynamique du système en chaque point d'opération peut s'avérer non représentative de la dynamique du système d'origine (Leith and Leithead, 2000b). Une approche systématique permettant d'obtenir une formulation quasi-LPV, où le préfixe « quasi » indique que le point d'opération dépend en partie de variables endogènes, réside dans la *velocity-based linearization* (Leith and Leithead, 1998). Elle consiste à prendre la dérivée temporelle des équations de la représentation d'état, donnant lieu à un modèle quasi-LPV dont l'entrée et la sortie sont respectivement les dérivées temporelles de l'entrée et de la sortie du système d'origine. Cependant, une telle approche pose trois difficultés majeures. La première réside dans le fait que le contrôleur quasi-LPV prend comme entrée la dérivée temporelle de la sortie du système qui n'est en général pas accessible pour une commande temps réel. La deuxième tient au fait que le modèle quasi-LPV ainsi obtenu présente un point d'opération qui dépend de l'état du système et qui doit donc être mesuré afin d'être utilisé pour implémenter le contrôleur quasi-LPV. Finalement, la nature endogène du point d'opération rend caduque les garanties quant à la stabilité du système quasi-LPV bouclé pour une vitesse de variation maximum prédéfinie des variables de séquençement (Scorletti et al., 2015).

### 2.1.1.3 Problématique des termes de couplage cachés

Dans cette thèse, on s'intéresse de manière spécifique à la problématique des TCC dans le séquençement des gains. Leur origine provient de la transition entre les étapes 3 et 4 de la procédure générale de synthèse d'un contrôleur séquencé tel qu'exposée précédemment. En effet, alors que la synthèse de la famille de contrôleurs LTI locaux est effectuée à point d'opération constant, ce dernier est en réalité amené à évoluer dans le temps au niveau du contrôleur séquencé final. Cette disparité de nature du point de fonctionnement entre la phase de synthèse et l'implémentation finale est la source même de l'apparition des TCC (Rugh and Shamma, 2000). Plus spécifiquement, les TCC font référence aux termes qui apparaissent lors de la linéarisation de la dynamique du contrôleur séquencé de par les variations induites par le point d'opération ; termes qui n'étaient pas présent au moment de la synthèse car effectuée en supposant le point d'opération constant.

Dans le cas où les variables de séquençement sont exogènes, les TCC ne donnent lieu qu'à l'émergence d'une entrée de perturbation externe dans la dynamique du contrôleur. Ces termes n'ont pas d'impact sur la stabilité locale du système car il y a préservation du placement de pôle entre la phase de synthèse et l'implémentation finale. La situation devient plus complexe lorsqu'au moins l'une des variables de séquençement est endogène (sortie ou variable d'état du système). Les TCC se traduisent alors par l'introduction de bouclages internes cachés dans la dynamique du système en boucle fermée. S'ils ne sont pas considérés adéquatement, ces termes sont alors à même de modifier le positionnement des pôles obtenu lors de la synthèse point à point. Cela induit en général une sévère dégradation des performances, voire la déstabilisation du système bouclé (Rugh and Shamma, 2000; Leith and Leithead, 2000a). Les solutions reportées dans la littérature afin de gérer l'impact de ces TCC sont passées en revue ci-dessous.

La première famille de solutions vise à incorporer la contribution des TCC dans la phase de synthèse du contrôleur. Une approche possible consiste en un choix adéquat de l'architecture du contrôleur séquencé de manière à annuler les TCC (Lawrence and Rugh, 1993; Rugh and Shamma, 2000; Lawrence, 2001a). Cette approche a notamment été employée pour la commande de la dynamique en tangage d'un missile (Nichols et al., 1993) ou le système dit du *ball and beam* (Ignatov and Lawrence, 2001; Lawrence, 2001b; Lawrence and Sznajder, 2004; Wu et al., 2016). Une seconde approche, nommée le *dynamical gain-scheduling* (DGS), consiste à procéder en une synthèse classique et de n'intégrer l'impact des TCC qu'*a posteriori* pour obtenir les gains du contrôleur séquencé (Yang et al., 2010, 2015). Comme exemples d'applications, citons la commande de l'avion de combat américain F-16 (Yang et al., 2012) et la commande d'une aile volante (Jones et al., 2006). Ces deux approches sont essentiellement

basées sur la résolution d'un système d'EDP impliquant les dérivées partielles des gains du contrôleur relativement aux variables de séquençement. Cependant, la résolution de ces EDP aboutit généralement à imposer de fortes contraintes sur l'architecture du contrôleur ou le choix des fonctions de séquençement. De plus, ce type de solution est mis en œuvre sur le modèle nominal du système, induisant des problématiques de robustesse en présence d'incertitudes paramétriques.

La seconde famille de solutions vise à fournir une implémentation générique des contrôleurs séquencés qui évite de manière structurelle l'apparition des TCC. De la sorte, la synthèse du contrôleur séquencé peut être effectuée de manière classique, sans avoir à se soucier de la problématique des TCC. La solution existante pour résoudre ce problème est connue sous la dénomination de *velocity-based algorithm* (Kaminer et al., 1995) et a été appliquée dans différentes configurations : contrôleurs proportionnel intégral dérivé (PID) en réseau (Rong et al., 2002), véhicule à actionnement hydrostatique (Backas et al., 2017), véhicule sous-marin (Upadhyay et al., 2015), hélicoptère (Paulino et al., 2006), dirigeable (do Valle et al., 2014), etc. Afin d'être mise en œuvre, cette stratégie nécessite de disposer en temps réel de la dérivée temporelle de la sortie du système. Un tel signal n'étant que rarement disponible en pratique, la forme exacte du *velocity-based algorithm* ne peut généralement pas être employée. La solution usuelle consiste à recourir à une stratégie de pseudo-dérivation. Il a en particulier été montré que l'implémentation ainsi obtenue permet de recouvrir de manière asymptotique les performances de la stratégie d'origine lorsque le paramètre de pseudo-dérivation tend vers zéro (Kaminer et al., 1995).

### 2.1.2 Commande des phénomènes aéroélastiques

Depuis les origines de l'aéronautique, l'interaction entre les effets structurels, effets aérodynamiques et la commande, résumée sous le terme *aéroservoélasticité*, est un problème de recherche majeur en aéroélasticité et en commande. L'étude des phénomènes aéroélastiques traite de divers problèmes tels que les vibrations, le *flutter*, la *divergence*, les cycles limites d'oscillation, le phénomène de *reversal*, l'efficacité des surfaces de contrôle et l'impact des turbulences atmosphériques (Dowell, 2005; Hodges and Pierce, 2011). Un historique complet de ces phénomènes, autant au niveau expérimental que dans ses développements théoriques, peut être trouvé dans (Mukhopadhyay, 2003). Le premier incident impliquant les phénomènes aéroélastiques remonte probablement à 1903 avec la machine à voler conçue par Langley. Lors du second essai de catapultage de l'appareil, une défaillance technique, sans doute liée au phénomène de *divergence* (instabilité résultant de la torsion de l'aile sous l'effet de l'écoulement de l'air), provoqua le crash de l'appareil. Ce n'est que quelques semaines plus tard que

les frères Wright réalisèrent leur vol historique. Le contrôle de l'appareil était assuré par un système de câbles permettant de déformer les ailes. Bien que l'aéronautique n'en était qu'à ses balbutiements, les phénomènes aéroélastiques étaient déjà mis à profit pour le contrôle de l'appareil.

La difficulté inhérente à la modélisation et au contrôle des phénomènes aéro-servoélastiques tire son origine dans les interactions complexes qui existent entre la structure, l'aérodynamique et les gouvernes. Un des aspects prépondérants de ces couplages réside dans les effets rétroactifs, e.g., un effort aérodynamique qui amène une déformation de la structure, induisant elle-même une modification des efforts aérodynamiques s'exerçant sur cette dernière. Ces rétroactions expliquent en grande partie les difficultés rencontrées lors de la modélisation, l'analyse et le contrôle de tels phénomènes. Ils impliquent en effet de combiner des théories aussi diverses et variées que la mécanique du vol (Nelson, 1998; Stevens and Lewis, 2003), l'aérodynamique stationnaire (Anderson, 2011; Bertin and Cummings, 2009) et instationnaire (Gülçat, 2010), la théorie des structures déformables (Allen, 2012) et la théorie de la commande (Dorf, 1995; Khalil and Grizzle, 2002; Rugh, 1996; Skogestad and Postlethwaite, 2007; Zhou et al., 1996).

Comme mentionné précédemment, les couplages aéro-servoélastiques se manifestent à travers une multitude de phénomènes. Ces derniers peuvent avoir des conséquences plus ou moins importantes aussi bien sur le confort des passagers que sur les qualités de manœuvrabilité, le cycle de vie ou l'intégrité de l'appareil.

### 2.1.2.1 Phénomène de *flutter* et de cycles limites d'oscillation

Bien qu'une multitude de phénomènes aéroélastique soit répertoriée (Dowell, 2005; Hodges and Pierce, 2011; Mukhopadhyay, 2003), la présente revue de littérature se focalise plus spécifiquement sur les phénomènes de *flutter* et de cycles limites d'oscillation.

***Flutter*** Le phénomène de battement, ou de *flutter*, tire son origine de l'interaction entre les modes rigides de l'avion et les modes flexibles de la structure (Livne and Weisshaar, 2003; Shearer and Cesnik, 2007; Su and Cesnik, 2011; Su and S. Cesnik, 2010). Pour des structures suffisamment rigides, il existe un découplage naturel entre la bande de fréquences des modes rigides de l'avion, située à basses fréquences, et les modes flexibles de la structure, situés à plus hautes fréquences. Cette séparation s'amenuise dès lors que la rigidité de la structure se réduit, ce qui est par exemple le cas lorsque l'on réduit sa masse. Lorsque les plages de fréquences des modes rigides se recoupent avec les modes flexibles de plus basses fréquences, un fort couplage se produit entre la dynamique de l'avion et celle de la structure. Dans ce

contexte, les modes flexibles peuvent être excités par la dynamique rigide de l'appareil et inversement, causant une déstabilisation oscillatoire du système. Un tel couplage est connu sous le terme de *flutter*. Cette situation peut être aisément illustrée en considérant un modèle linéarisé du système (Beranek et al., 2010). Pour cela, notons respectivement  $x_R$  et  $x_F$  les vecteurs d'état des modes rigides et des modes flexibles. La dynamique linéarisée de l'avion souple prend la forme :

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{x}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{RR} & \mathbf{A}_{RF} \\ \mathbf{A}_{FR} & \mathbf{A}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_R \\ x_F \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{B}_R \\ \mathbf{B}_F \end{bmatrix} \mathbf{u}, \quad (2.1)$$

avec :

- $\mathbf{A}_{RR}$  : dynamique des modes rigides en l'absence des modes flexibles ;
- $\mathbf{A}_{FF}$  : dynamique des modes flexibles en l'absence des modes rigides ;
- $\mathbf{A}_{FR}$  : couplage des modes flexibles sur les modes rigides ;
- $\mathbf{A}_{RF}$  : couplage des modes rigides sur les modes flexibles.

La configuration traditionnelle, qui se caractérise par un découplage des modes flexibles et rigides, i.e.,  $\mathbf{A}_{FR} \approx 0$  et  $\mathbf{A}_{RF} \approx 0$ , se retrouve dans les avions de ligne et les avions de combat classiques tels que le F-16 *Fighting Falcon*. La configuration intermédiaire dans laquelle modes flexibles et modes rigides se recoupent de manière limitée est par exemple illustrée par l'aile volante expérimentale et sans pilote *Polcat* développée par Lockheed Martin au milieu des années 2000. La configuration critique pour laquelle modes flexibles et modes rigides deviennent indissociables est associée à des avions dont les ailes sont hautement flexibles. C'est particulièrement le cas des aéronefs de type *high altitude long endurance* (HALE) qui se caractérisent par une structure légère et une envergure importante (Patil et al., 2001a). Un autre exemple de ce type est fourni via l'étude menée par Lockheed Martin Aeronautics au sein du *Air Force Research Laboratory* (Beranek et al., 2010). L'objectif du projet est d'étudier la faisabilité pratique d'avions autonomes et volant à hautes altitudes à des fins de surveillance et de reconnaissance (avions placés sous l'appellation *SensorCraft*). Ces études aboutirent au design d'une aile volante dont le dimensionnement de la structure a été optimisé de manière à la rendre aussi légère que possible. Ce dimensionnement agressif de par la légèreté de la structure et les contraintes en carburant<sup>1</sup> rend les phénomènes aéroélastiques prépondérants. En particulier, bien que le système soit stable pour de faibles vitesses de vol, il devient instable aux alentours de 130 km/h. Cette déstabilisation du système est causée par le couplage d'un mode rigide de l'appareil (le mode *Short Period*) avec le premier mode de flexion symétrique des ailes. Ce couplage se révèle d'autant plus important que le moment

---

1. Au décollage, la masse de carburant représente environ 50% de la masse totale de l'appareil.

d'inertie en tangage de la structure est faible (Gaukroger et al., 1950).

D'un point de vue énergétique, le *flutter* tire son origine de l'extraction de l'énergie provenant de l'écoulement de l'air le long des ailes. Le *flutter* se produit lorsque cette énergie extraite dépasse un certain seuil limite au-dessus duquel l'amortissement naturel de la structure n'est plus suffisant pour la dissiper. Pour une altitude de vol donnée, l'énergie extraite étant d'autant plus élevée que la vitesse de vol de l'appareil est élevée, il existe une vitesse limite appelée *flutter speed* à partir de laquelle on observe la déstabilisation de l'appareil. Cette vitesse se définit comme la première vitesse à laquelle la matrice  $\mathbf{A}$  de la représentation d'état du système aéroélastique devient instable via la présence d'un couple de pôles complexes conjugués imaginaires purs (Tuzcu, 2008).

Comme indiqué précédemment, le phénomène de *flutter* est fortement lié à la rigidité et à l'inertie de la structure. Une solution dite passive consiste alors en la conception d'une structure plus rigide et avec une meilleure inertie, ce qui permet de rejeter la vitesse de *flutter* au-delà de l'enveloppe de vol. Néanmoins, une telle solution conduit à augmenter significativement la masse de l'appareil et donc à réduire son efficacité autant en terme d'autonomie que de performances atteignables. *A contrario*, une structure légère amène non seulement un faible amortissement des modes flexibles, mais également à un couplage accru des modes rigides et élastiques. Le faible amortissement des modes flexibles a pour conséquence directe des vibrations plus importantes de la structure, réduisant son cycle de vie en fatigue. Plus problématiques encore, les phénomènes aéroélastiques peuvent déstabiliser l'appareil. Dès lors, tout effort aérodynamique induit par des turbulences atmosphériques ou par des rafales de vent peut potentiellement amener l'avion à dépasser la vitesse de *flutter* et ainsi provoquer sa déstabilisation. Dans un tel cas de figure, des solutions dites actives sont mises en place ; le système est placé en boucle fermée avec un contrôleur de manière à améliorer à la fois l'amortissement du système et repousser la vitesse de *flutter* en dehors de l'enveloppe de vol.

**Cycles limites d'oscillation** La théorie des systèmes linéaires prévoit que le système linéarisé est exponentiellement stable pour une vitesse d'écoulement de l'air inférieure à la vitesse de *flutter* et diverge exponentiellement pour toute vitesse supérieure. Bien que permettant de caractériser la nature de l'équilibre du système réel, les conclusions qui découlent de l'analyse du modèle linéarisé doivent être affinées par l'étude de l'impact des non linéarités présentes dans le système. Ce besoin d'affiner l'analyse des phénomènes aéroélastiques a été motivé par la volonté d'améliorer la compréhension des phénomènes observés expérimentalement. En effet, des tests en vol effectués sur différents avions militaires tels que les avions de combat F-16 et F/A-18 (Bunton and Denegri, 2000; Chen et al., 1998; Denegri, 2000), ainsi que pour le bombardier B-2 (Jacobson et al., 1998) ont montré l'existence de

cycles limites d'oscillation, alors même que ces derniers n'étaient initialement prévus théoriquement que pour des vitesses de vol bien supérieures à celles de l'enveloppe de vol. De tels résultats sont également reportés dans le cas d'une aile flexible de grande envergure dans (Patil et al., 2001b). Ces cycles limites se produisent autant pour un vol de type croisière que lors de manœuvres, et se caractérisent par des mouvements antisymétriques des ailes et par des déplacements latéraux de l'appareil. Ils peuvent être induits autant par des commandes du pilote que par des perturbations atmosphériques ou de larges déviations relativement au point d'équilibre (Bunton and Denegri, 2000). Ils sont néfastes car ils induisent des vibrations, réduisent la durée de vie en fatigue de la structure, diminuent la manœuvrabilité de l'appareil et rendent le travail du pilote plus difficile (Thompson and Strganac, 2000; Thompson Jr and Strganac, 2005).

De manière à élaborer des modèles reflétant fidèlement la dynamique des systèmes aéroélastiques, les experts en aéronautique ont étudié les sources potentielles des non linéarités pouvant induire les cycles limites d'oscillation. Dans ce cadre, il a été montré que la non linéarité de la rigidité en torsion et en flexion de l'aile joue un rôle crucial (Chen et al., 1998; Berggren et al., 2004; O'Neil et al., 1996; Price et al., 1995). De plus, plusieurs séries de tests ont montré le fort lien qu'il existe entre les caractéristiques du matériel placé sous les ailes (masse, inertie, position du centre de gravité) et l'apparition des cycles limites d'oscillation et leurs caractéristiques (fréquence et amplitude), résultats qui furent ultérieurement confirmés par des études numériques (Abbas et al., 2008; Dawson and Maxwell, 2005; Dowell et al., 2009; Fazlzadeh et al., 2009; Lee and Chen; Parker et al., 2007).

Les phénomènes de cycles limites d'oscillation peuvent se produire aussi bien pour des vitesses supérieures mais également inférieures à la vitesse de *flutter*. En effet, lorsque la vitesse de vol est supérieure à la vitesse de *flutter*, l'étude du système linéarisé laisse penser que le système aura une divergence exponentielle. Néanmoins, une fois sortie du domaine de validité du modèle linéaire, la dynamique du système est alors dominée par les effets non linéaires qui amènent le système aéroélastique dans un cycle limite d'oscillation. *A contrario*, pour une vitesse de vol inférieure à la vitesse de *flutter*, bien que l'origine du système soit un point d'équilibre stable, une large déformation de l'aile ou une forte perturbation peuvent amener le système en dehors du domaine de stabilité de l'origine, amenant également le système dans un cycle limite d'oscillation (Patil et al., 2001b; Block and Strganac, 1998). Dans ce cadre, certaines études s'intéressent à déterminer le domaine de stabilité de l'origine (Gujjula et al., 2004) et l'impact des limites en saturation de la gouverne sur le domaine de contrôlabilité autour de l'origine (Goman and Demenkov, 2004).

Ces phénomènes de cycles limites d'oscillation peuvent être observés sur l'aile seule sous les



effets des phénomènes aéroélastiques. Le phénomène se complexifie lorsque l'on couple ces phénomènes avec la dynamique du vol. Il en a été montré que la dynamique de ces oscillations se couple avec la dynamique des modes rigides (Patil et al., 2000). En particulier, l'amplitude des oscillations pour des vitesses supérieures à la vitesse de *flutter* sont limitées par le phénomène de décrochage. De plus, le couplage entre ces cycles limites d'oscillation et la dynamique du vol est d'autant plus important que la masse du fuselage est réduite. Dans ce cadre, des études plus poussées ont montré que le *flutter* et les cycles limites d'oscillation qu'il génère, entraîne un accroissement de la traînée de l'appareil pouvant résulter en une oscillation de la vitesse de vol de l'appareil autour de la vitesse de *flutter* (Patil, 2002, 2003).

### 2.1.2.2 Commande des phénomènes aéroélastiques en dimension finie

Dans le but d'étudier les phénomènes aéroélastiques subsoniques et transsoniques, la *National Aeronautics and Space Administration* (NASA) a mis en place un programme d'étude de modèles de référence de systèmes aéroélastiques (Bennett et al., 1992). En particulier, le projet *benchmark active control technology* (BACT) a permis de collecter des données aérodynamiques expérimentales (Bennett et al., 2000; Scott et al., 2000) mettant en évidence les phénomènes de *flutter*, d'instabilité en flexion et de décrochage. Il a également pour objectif de démontrer l'applicabilité des lois de commande sur le système réel. Le dispositif expérimental utilisé se compose de deux parties. La première est l'aile munie d'un aileron à des fins de commande. La seconde est le support sur lequel est fixé l'aile qui a été conçu de manière à permettre des mouvements en torsion/rotation et en flexion/déplacement vertical de l'aile.

La mise en place de lois de commande pour un tel système nécessite de disposer d'un modèle de référence reproduisant fidèlement le comportement du système réel. Le modèle utilisé au cours du projet, ainsi que dans la grande majorité des publications liées à ce dispositif, se base sur le modèle développé par la NASA (Waszak, 1996). Cette modélisation fait l'hypothèse d'une section d'aile à deux dimensions et à deux degrés de liberté, i.e., l'angle de torsion et le déplacement vertical. Les efforts aérodynamiques sont généralement modélisés sous forme quasi-stationnaires. Certaines études prennent néanmoins en compte des phénomènes aérodynamiques instationnaires en augmentant le modèle du système via la théorie de Theodorsen (Theodorsen and Mutchler, 1935) portant sur les écoulements instationnaires le long d'une aile. L'application de cette théorie au problème considéré conduit à l'obtention d'un système d'équations augmenté de plusieurs états liés aux effets aérodynamiques instationnaires (Librescu et al., 2005).

Historiquement, les premières techniques qui ont été employées dans le cadre du contrôle du BACT sont des techniques linéaires. En premier lieu, des approches basées sur le dia-

gramme de Nyquist et le lieu des racines ont été expérimentées pour un modèle tenant compte des phénomènes aérodynamiques instationnaires (Mukhopadhyay, 2000). Ces stratégies, bien que particulièrement simples, ont permis de démontrer expérimentalement qu'il est possible de contrôler le BACT au-delà du *flutter*, avec une frontière d'instabilité repoussée de l'ordre de 50% en termes de pression dynamique à nombre de Mach fixé. Des méthodes de commande classiques se basant sur la représentation d'état du système ont également été investiguées. La synthèse LQR (*Linear Quadratic Regulator*) a été mise en œuvre, démontrant de meilleures performances en robustesse (Block and Strganac, 1998; Friedmann et al., 1997; Mukhopadhyay, 2000). Des techniques de  $\mu$ -synthèse (itérations *D-K*), et de synthèse  $H_2$  ont été comparées en simulation et expérimentalement (Vipperman et al., 1999). Les résultats concluent sur la meilleure performance du contrôleur obtenu par  $\mu$ -synthèse en terme d'augmentation de la vitesse en *flutter* et de rejet des perturbations. L'intérêt de l'utilisation de plusieurs surfaces de contrôle et de plusieurs capteurs dans le cadre du contrôle MIMO (*Multi Input Multi Output*) a été étudié via la synthèse  $H_\infty$  et la  $\mu$ -synthèse (Waszak, 2001). La comparaison avec les résultats obtenus dans la cadre des systèmes SISO (*Single Input Single Output*) démontre la meilleure efficacité des contrôleurs MIMO autant en termes de robustesse que de performance et de sollicitation des actionneurs (Mukhopadhyay, 2000). Les contrôleurs mentionnés jusqu'à présent ont été synthétisés pour une vitesse d'écoulement de l'air donnée. De manière à étendre la plage de fonctionnement de la stratégie de commande, des approches tirant profit du séquençement des gains ont été reportées (Barker et al., 1999; Barker and Balas, 2000).

Les techniques linéaires se montrent efficaces tant que le contrôle est activé lorsque le système n'est pas entré en cycle limite d'oscillation. Dans le cas contraire, i.e., si le contrôle est activé alors que le système est déjà entré en cycle limite d'oscillation, les méthodes linéaires peuvent parfois se révéler insuffisantes pour faire sortir le système de ce mouvement oscillatoire (Block and Strganac, 1998). Dans ces conditions, des méthodes de commande non linéaires tenant compte de la nature non linéaire du phénomène de cycle limite ont été considérées. La majorité des approches proposées reposent sur la technique de linéarisation par retour de sortie (Strganac et al., 2000) avec composantes adaptatives pour gérer les incertitudes paramétriques (Ko et al., 1999; Strganac et al., 2000; Behal et al., 2006a; Lee and Singh, 2009; Cassaro et al., 2014). D'autres approches incluant des aspects de commande adaptative ont également été proposées parmi lesquelles la commande par méthode de glissement (Behal et al., 2006b; Lin and Chin, 2006), le *backstepping* (Xing and Singh, 2000; Singh and Wang, 2002; Behal et al., 2006a; Reddy et al., 2007), le *modular adaptive control* (Bhoir and Singh, 2004a; Singh and Brenner, 2003), le *model reference adaptive control* (Ioannou and Sun, 2012), etc.

L'une des difficultés majeures de ces approches basées sur la technique de linéarisation par retour de sortie réside dans le fait que lorsque la sortie est choisie comme étant l'angle de torsion ou le déplacement en flexion, la linéarisation du système n'est que partielle. De plus, la dynamique des zéros ainsi obtenue voit ses propriétés de stabilité dépendre de la vitesse d'écoulement de l'air et de la position de l'axe d'élasticité de l'aile (Ko et al., 1997, 1998). De manière à contourner ce problème, il a été proposé de recourir à l'utilisation de deux gouvernes de contrôle, permettant alors de rendre le système (complètement) linéarisable par retour de sortie (Ko et al., 1997; Platanitis and Strganac, 2004; Lee and Singh, 2015).

### 2.1.2.3 Approche par des systèmes à paramètres distribués

L'investigation intensive de la commande du BACT, autant en simulation qu'expérimentalement, a permis de démontrer la capacité des stratégies de commande à supprimer le phénomène de *flutter*. Néanmoins, une telle approche en dimension finie ne peut capturer qu'un nombre restreint des modes flexibles de l'aile. Dans le cas d'une aile dont la flexibilité est accrue, une telle approche peut se révéler insuffisante, nécessitant de recourir à un modèle plus fidèle des déplacements élastiques de la structure. En effet, de tels phénomènes sont plus naturellement décrits en dimension infinie par un système à paramètres distribués composé d'EDP (Bialy et al., 2016; Zhang et al., 2005; Ziabari and Ghadiri, 2010).

Il existe deux approches afin de commander un tel système. La première consiste en la discrétisation du problème en un jeu d'EDO en utilisant par exemple les méthodes de Galerkin ou de Rayleigh-Ritz (Christofides and Daoutidis, 1997; Baker and Christofides, 2000; Shawky et al., 2002). Le système se décompose ainsi en un modèle à dimension finie et un modèle résiduel à dimension infinie qui est généralement négligé pour effectuer la synthèse du contrôleur. Une telle approche présente l'avantage de pouvoir tirer profit du large éventail de méthodes qu'offre la théorie de la commande en dimension finie. Néanmoins, il n'existe en général aucune garantie que la transposition de la loi de contrôle ainsi obtenue fonctionne adéquatement sur le système à paramètres distribués d'origine (Bontsema and Curtain, 1988). Ce phénomène, dû au couplage entre le modèle approché et le modèle résiduel, est connu sous le terme anglais de *spillover* (Balas, 1978; Meirovitch and Baruh, 1983; Hagen and Mezic, 2000). Cette problématique inhérente à la première approche pousse à adopter la seconde approche qui consiste à procéder au design de la loi de commande directement sur le modèle EDP.

L'élaboration de lois de commande directement sur le système à paramètres distribués a fait l'objet de nombreuses travaux dans les années récentes. Parmi les plus notables, on trouve le *backstepping* (Krstic and Smyshlyaev, 2008; Smyshlyaev et al., 2009), la méthode de Lyapunov

(De Queiroz et al., 2012; Luo et al., 2012; Rahn and Rahn, 2001), la commande passive (Henikl et al., 2016; Rahn and Rahn, 2001), l’approche par platitude (Aoustin et al., 1997; Meurer, 2012), l’analyse spectrale (Curtain and Zwart, 2012; Luo et al., 2012) et la commande optimale (Bensoussan et al., 1993; Curtain and Zwart, 2012; Lasiecka and Triggiani, 2000). L’extension de ces méthodes au cas d’EDP couplées demeure un problème épineux pour lequel de récentes contributions ont été reportées (Di Meglio et al., 2013; Vazquez et al., 2011; Vazquez and Krstic, 2014).

Dans ce contexte, des modèles distribués ont récemment été considérés pour la commande d’une aile dont la dynamique est décrite par deux EDP couplées et avec des actionneurs de type volets situés à son extrémité. Une approche de type commande adaptative a été présentée dans (Bialy et al., 2016). Un problème similaire dans le contexte de drones miniatures à ailes battantes a été reportée dans (Paranjape et al., 2011a,b, 2013a,b) où la technique du *backstepping* a été employée de manière à commander la force aérodynamique globale s’exerçant le long de l’aile. Le même modèle a été utilisé dans (He and Zhang, 2017) où une approche de type fonction de Lyapunov a été employée pour garantir que les déplacements flexibles demeurent bornés en présence de perturbations aérodynamiques.

## 2.2 Objectifs et méthodologie

À la lumière de la revue de littérature, deux principaux objectifs se dégagent, l’un portant sur la commande de systèmes non linéaires en dimension finie par la méthode du séquençement des gains, l’autre portant sur la commande d’une aile flexible modélisée par un système à paramètres distribués en dimension infinie. Ces deux objectifs principaux, ainsi que les sous-objectifs sous-jacents et les contributions associées sont détaillées ci-après.

### 2.2.1 Objectifs de la thèse

#### 2.2.1.1 Objectifs pour la commande des systèmes non linéaires par la méthode du séquençement des gains

L’objectif principal de la première partie portant sur le séquençement des gains peut être résumé de la façon suivante :

**Objectif 1 : Développer des méthodes de synthèse et/ou d’implémentation de contrôleurs séquencés à architecture fixe en présence de termes de couplage cachés.**

Comme cela a été vu lors de la revue de littérature, il existe deux familles de solutions

permettant de gérer l'impact des TCC. La première vise à en tenir compte lors de la phase de synthèse du contrôleur séquencé. La seconde vise quant à elle à proposer une stratégie d'implémentation générique permettant d'éviter de manière structurelle leur apparition. Dans ce contexte, l'objectif principal tel qu'énoncé précédemment se scinde sous la forme de deux sous-objectifs :

- La revue de littérature a mis en avant les difficultés des méthodes existantes quant à la gestion des TCC dans le processus de synthèse. En particulier, la résolution des EDP sous-jacentes imposent des contraintes structurelles, aboutissant généralement à des architectures de contrôle et/ou des formules de séquençement complexes. Il est donc désirable de disposer de nouvelles approches permettant de tenir compte de l'impact des TCC tout en maintenant une architecture de contrôle pré-définie. Le premier sous-objectif prend la forme suivante :

**Sous-objectif 1.1 : Développer des méthodes de synthèse de contrôleurs séquencés à architecture fixe permettant d'inclure de manière explicite l'impact des termes de couplage cachés dans le processus de synthèse.**

- La seconde solution existante réside dans le recours en une stratégie d'implémentation des contrôleurs séquencés qui évite l'apparition des TCC. La solution classique de ce problème est le *velocity-based algorithm* (Kaminer et al., 1995) mais nécessite de disposer de la dérivée temporelle de la sortie du système pour être implémentée. L'approche par pseudo-dérivation permet de contourner le problème mais n'est qu'une solution approchée du problème d'origine introduisant une dynamique parasite. Dans ce contexte, le second sous-objectif est formulé de la façon suivante :

**Sous-objectif 1.2 : En supposant que seule la sortie du système est disponible pour la commande, proposer une stratégie d'implémentation générique et systématique de contrôleurs séquencés évitant de manière structurelle l'émergence des TCC.**

### 2.2.1.2 Objectifs pour la commande d'une aile flexible modélisée en dimension infinie

Dans les travaux reportés dans la revue de littérature portant sur la commande d'une aile flexible modélisée par un système à paramètres distribués, l'hypothèse commune émise à des fins de design du contrôleur est que : 1) l'énergie du système est bornée ; 2) l'état du système et ses dérivées partielles existent, sont suffisamment réguliers et sont uniformément bornés jusqu'à un certain ordre. De telles hypothèses peuvent être motivées sur la base d'intuitions physiques (De Queiroz et al., 2012; De Queiroz and Rahn, 2002) et visent à

simplifier l'analyse de la stabilité du système bouclé. Cependant, ces hypothèses *ad hoc* émises *a priori* n'ont pas de fondement mathématiques rigoureux. En particulier, elles balayent la question fondamentale de la *well-posedness* du problème étudié telle que définie au sens de Hadamard (Hadamard, 1902), i.e., la question de l'étude de l'existence d'une solution, de son unicité et de sa continuité vis-à-vis des conditions initiales. Or, l'analyse de tout système démarre par l'étude de cette question cruciale. Dans le cadre des systèmes en dimension infinie, la réponse à cette question s'inscrit dans le cadre de la théorie des opérateurs de  $C_0$ -semi-groupe à travers les théorèmes de Hille-Yosida et Lumer-Phillips (Curtain and Zwart, 2012; Luo et al., 2012) qui jouent un rôle analogue au théorème de Cauchy-Lipschitz et ses corollaires (Khalil and Grizzle, 2002; Perko, 2013) en dimension finie. Dans ce contexte, le second objectif de cette thèse peut être résumé de la façon suivante :

**Objectif 2 : Proposer et étudier dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupe une stratégie de commande d'une aile flexible décrite par un système couplé de deux EDP décrivant les déplacements en flexion et en torsion de l'aile sous l'effet d'efforts aérodynamiques instationnaires.**

## 2.2.2 Méthodologie et contributions

### 2.2.2.1 Méthodologie et contributions à la gestion des termes de couplage cachés

Les contributions apportées au premier objectif sont décrites à travers celles apportées à ses deux sous-objectifs.

**Méthodologie et contribution au sous-objectif 1.1 (Chapitre 4) :** La difficulté majeure dans la gestion des TCC par les méthodes de séquençement classiques réside dans le fait que ces termes font généralement intervenir les dérivées partielles des gains séquencés relativement aux variables de séquençement. Dès lors, une synthèse point à point classique des contrôleurs LTI locaux ne permet pas de tenir compte de l'impact de ces termes puisqu'ils ne dépendent pas exclusivement de la valeur des gains du contrôleur au point de fonctionnement courant, mais également de leur évolution dans un voisinage de ce dernier. De manière à contourner cette difficulté tout en évitant le recours à la résolution d'EDP, l'idée développée dans cette thèse se base sur le recours à des méthodes de synthèse de type autoséquençement. L'autoséquençement consiste à éviter la phase d'interpolation *a posteriori* des gains des contrôleurs LTI locaux par un choix *a priori* des formules de séquençement. En adoptant une telle stratégie, il est possible de calculer de manière explicite les dérivées partielles des gains du contrôleur relativement aux variables de séquençement, et donc de surcroît la contribution des TCC. Ces derniers peuvent dès lors être intégrés dans le processus de synthèse.

Au-delà de l'idée générale du recours à des méthodes d'autoséquencement telle qu'énoncée précédemment, la mise en œuvre d'une telle stratégie requiert de disposer de méthodes de synthèse permettant de résoudre numériquement un tel problème.

1. La première approche explorée repose sur les méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée (Apkarian and Noll, 2006, 2007; Burke et al., 2006; Gahinet and Apkarian, 2011) dont les capacités de synthèse multimodèle peuvent être mises à profit pour la synthèse de contrôleurs autoséquenceés. L'extension de cette méthode de synthèse quant à l'inclusion des TCC est développée dans cette thèse.
2. La seconde solution proposée est une approche modale tirant profit de la méthode de placement de structures propres (Le Gorrec et al., 1998; Magni, 1999). Il est en particulier montré que les capacités d'autoséquencement de cette méthode (Magni, 1999) peuvent être mises à profit pour incorporer la contribution des TCC.
3. La dernière approche investiguée est une procédure de synthèse générique de contrôleurs autoséquenceés ne reposant pas sur une méthode de synthèse spécifique contrairement aux deux solutions précédentes. Elle consiste à venir ajuster de manière successive les degrés de liberté offerts par les formules de séquencement sélectionnées *a priori*. En particulier, le résultat de synthèse obtenu en un point d'opération donné du système est préservé lors des itérations suivantes en choisissant les degrés de liberté ajustables dans le noyau d'une application linéaire judicieusement sélectionnée.

Au détour de la mise en application de ces différentes approches s'est posé le problème de l'extension de la première méthode de Lyapunov (Khalil and Grizzle, 2002) au cas de champs de vecteurs qui ne sont pas continûment différentiables. En effet, lorsque le champ de vecteur est de classe  $\mathcal{C}^1$ , on sait que la stabilité locale d'un système est assurée si son linéarisé tangent est exponentiellement stable. Or, certaines des formules de séquencement employées dans les études de cas ne sont pas de classe  $\mathcal{C}^1$ , ce qui ne permet donc pas une application directe du résultat précédent. L'étude de cette problématique est reportée en Annexe B.

### **Méthodologie et contribution au sous-objectif 1.2 (Chapitre 5) :**

L'implémentation de contrôleurs séquenceés introduite dans cette thèse permet d'éviter l'apparition des TCC tout en présentant l'avantage majeur de ne pas recourir à la dérivée temporelle du signal de sortie. L'approche proposée consiste au recours de stratégies de pré- et post-filtrage. La composante de pré-filtrage est utilisée pour éviter l'émergence des TCC. La composante de post-filtrage est quant à elle employée afin de préserver la dynamique entrée-sortie du contrôleur à implémenter. En particulier, elle vise à incorporer la dynamique du pré-filtrage au sein des modes cachés de manière à éviter l'introduction d'une dynamique parasite. Il est montré qu'une telle stratégie peut être employée avec succès de manière à

remplir le sous-objectif 1.2.

### 2.2.2.2 Méthodologie et contribution à la commande d'une aile flexible en dimension infinie

Le modèle étudié ainsi que des rappels portant sur la théorie des  $C_0$ -semi-groupes sont présentés dans le Chapitre 6. Les contributions apportées au second objectif sont brièvement décrites ci-dessous.

**Méthodologie et contribution à l'objectif 2 (Chapitres 7 et 8) :** L'étude menée porte sur une version linéaire des modèles utilisés dans (Bialy et al., 2016; He and Zhang, 2017). L'aile est modélisée par un système à paramètres distribués de deux EDP couplées décrivant respectivement la dynamique en flexion et en torsion des déplacements flexibles. La loi de commande proposée consiste en un retour de sortie se basant sur la position, la vitesse et l'accélération des déplacements en flexion et en torsion à l'extrémité de l'aile. Il est à noter qu'une telle loi de commande est similaire à celle proposée dans (He and Zhang, 2017) mais, contrairement à cette dernière, présente l'avantage d'éviter l'implémentation d'un contrôleur dynamique nécessitant l'introduction de deux filtres d'ordre 1.

Dans un premier temps, la validité de la stratégie de commande proposée est évaluée pour le cas particulier d'une aile homogène. De manière à s'assurer de l'existence et de l'unicité des trajectoires du système bouclé, le problème de sa *well-posedness* est investigué dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes. Une analyse de stabilité du système bouclé est ensuite effectuée dans le cadre des méthodes des multiplicateurs d'énergie<sup>2</sup> (Luo et al., 2012) à travers la recherche d'une fonction de Lyapunov. Sous l'hypothèse de contraintes structurelles portant sur les paramètres physiques du système (Bialy et al., 2016; He and Zhang, 2017), cette analyse permet de garantir que l'énergie du système décroît exponentiellement vers zéro. Des analyses complémentaires permettent alors de conclure que les déplacements en flexion et en torsion de l'aile convergent uniformément le long de l'aile de manière exponentielle vers zéro.

Dans un second temps, l'extension des résultats précédents au cas plus réaliste d'une aile non homogène en présence de perturbations en entrée de commande est étudiée. Il est montré qu'un tel problème peut être reformulé comme étant un problème de commande à la frontière sous forme abstraite dont la *well-posedness* est analysée dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes. En adoptant une démarche similaire à celle employée pour l'aile non homogène, on retrouve en l'absence de perturbation en entrée les mêmes propriétés de stabilité de

---

2. Plus communément connues dans la littérature sous le terme anglais de *energy multiplier methods*.



l'énergie et des déplacements flexibles. En présence de perturbations bornées, il est montré que l'énergie et les déplacements flexibles demeurent bornés.

### 2.2.3 Liste de publications

Les travaux présentés dans cette thèse ont été publiés ou sont l'objet de soumissions dans différents journaux et conférences.

#### Articles de journaux avec comité de relecture

- [1] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "A structured  $H_\infty$ -based optimization approach for integrated plant and self-scheduled flight control system design", *Aerospace Science and Technology*, vol. 45, pp. 30–38, 2015.
- [2] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "Gain-scheduling control design in the presence of hidden coupling terms", *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 39, no. 8, pp. 1872-1880, 2016.
- [3] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "Explicit hidden coupling terms handling in gain-scheduling control design via eigenstructure assignment", *Control Engineering Practice*, vol. 58, pp. 1–11, 2017.
- [4] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "An enhanced velocity-based algorithm for safe implementations of gain-scheduled controllers", *International Journal of Control*, vol. 90, no. 9, pp. 1973–1989, 2017.
- [5] H. Lhachemi, Y. Chu, D. Saussié et G. Zhu, "Flutter suppression for underactuated aeroelastic wing section : nonlinear gain-scheduling approach", *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 40, no. 8, pp. 2102-2109, 2017.
- [6] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "An extension of Lyapunov's first method to nonlinear systems with non-continuously differentiable vector fields", *IEEE Control Systems Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 74-79, 2017.

#### Articles de journaux soumis en date du 1er Novembre 2017

- [7] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "Dynamic output feedback gain-scheduling control for active flutter suppression", *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, première soumission en Décembre 2016, révision soumise en Septembre 2017.
- [8] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, "Boundary control for flutter suppression of a flexible wing under unsteady aerodynamic loads", *Automatica*, soumis en Mars 2017.

- [9] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Boundary control of a nonhomogeneous flexible wing with bounded input disturbances”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, soumis en Juillet 2017.

### Articles de conférence

- [1] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “A robust and self-scheduled longitudinal flight control system : a multi-model and structured  $H_\infty$  approach”, *AIAA Scitech Guidance Navigation and Control Conference* 2014, AIAA-0601.
- [2] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Performance enhancement of a self-scheduled longitudinal flight control system via multi-objective optimization”, *American Control Conference (ACC)* 2014, pp. 1377–1383.
- [3] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Handling hidden coupling terms in gain-scheduling control design : application to a pitch-axis missile autopilot”, *AIAA Scitech Guidance Navigation and Control Conference* 2016, AIAA-0365.
- [4] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Gain-scheduling control design in the presence of hidden coupling terms via eigenstructure assignment : Application to a pitch-axis missile autopilot”, *American Control Conference (ACC)* 2016, pp. 4041-4046.
- [5] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Hidden coupling terms inclusion in gain-scheduling control design : extension of an eigenstructure assignment-based technique”, *20th IFAC Symposium on Automatic Control in Aerospace, IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 17, pp. 403-408, 2016.
- [6] H. Lhachemi, D. Saussié et G. Zhu, “Flutter suppression for a two degrees of freedom aeroelastic wing section : a structured  $H_\infty$ -based gain-scheduling approach with explicit hidden coupling terms handling”, *AIAA Scitech Guidance Navigation and Control Conference* 2017, AIAA-1735.

### Article de conférence portant sur un autre sujet de recherche

- [7] H. Lhachemi, J. A. R. de Azua Ortega, D. Saussié et G. Zhu, “Partition modeling and optimization of ARINC 653 operating systems in the context of IMA”, *Digital Avionics Systems Conference (DASC), 2016 IEEE/AIAA 35th*, pp. 1-8.

### CHAPITRE 3 PROBLÉMATIQUE DES TERMES DE COUPLAGE CACHÉS INTRODUICTS PAR LE SÉQUENCEMENT DES GAINS

Ce chapitre vise à rappeler les fondements du contrôle par séquençement des gains et à introduire plus particulièrement la problématique des TCC. Le séquençement des gains est une méthode employée lorsqu'un système doit être commandé sur un large domaine d'opération et pour lequel un simple contrôleur LTI ne permet pas d'assurer la stabilité et le niveau de performance requis, de par la forte dépendance de la dynamique du système vis-à-vis du point d'opération. Un exemple typique d'un tel système est l'avion. En effet, un avion doit être opéré sur un large domaine de vol constitué des altitudes et vitesses de vol admissibles. Ces paramètres ayant un impact très important sur la dynamique-même de l'avion, un simple contrôleur LTI se révèle insuffisant. Dans ce cadre, l'approche par séquençement des gains vise à synthétiser un contrôleur non linéaire permettant le contrôle du système sur l'intégralité du domaine d'opération en tirant profit des méthodes de synthèse de contrôleurs LTI. Les gains du contrôleurs sont alors amenés à varier en fonction du point d'opération courant du système.

Dans le cadre général de la problématique du séquençement des gains, le problème traité dans la première partie de cette thèse concerne la problématique des TCC. Cette problématique surgit lorsque les gains du contrôleur sont séquencés par l'intermédiaire d'une variable endogène du système, qui est typiquement une variable d'état ou une sortie du système à commander. Dans cette configuration, le contrôleur voit ses gains varier en fonction d'une grandeur qu'il cherche, directement ou indirectement, à contrôler. Cette dualité entre variable de séquençement et variable à contrôler est à même d'introduire des bouclages internes « cachés » dans le système bouclé, pouvant parasiter, s'ils ne sont pas adéquatement considérés lors de la phase de synthèse, le comportement du système bouclé.

La Section 3.1 est consacrée à l'introduction et aux motivations de la méthode de séquençement des gains. La Section 3.2 s'attache à mettre en exergue le phénomène des TCC dans le cadre des contrôleurs séquencés. On s'attarde en particulier sur la raison de leur apparition et leur impact sur la dynamique du système en boucle fermée. Les solutions développées dans la littérature pour gérer l'émergence des TCC sont présentées dans la Section 3.3. Finalement, tirant profit de l'une des méthodes existantes dans la littérature, la Section 3.4 introduit la motivation qui amènera aux solutions proposées dans la cadre de cette thèse et qui seront présentées dans le Chapitre 4.

### 3.1 Rappels généraux sur la méthode du séquençement des gains

Cette première section vise à effectuer des rappels généraux portant sur la synthèse et l'implémentation de contrôleurs LTI afin d'effectuer le contrôle d'un système non linéaire. Dans le cas plus complexe d'un système devant être opéré pour un point de fonctionnement amené à évoluer au cours du temps, on présente l'extension de ces approches à la méthode dite du séquençement des gains.

#### 3.1.1 Synthèse et implémentation d'un contrôleur LTI pour un système non linéaire

On suppose que le système à commander est sous la forme d'une représentation d'état dont la dynamique est décrite par une EDO :

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \end{cases} \quad (3.1)$$

avec  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée et  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie. Le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente la dynamique du système et la fonction  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  génère le vecteur de sortie. On suppose par la suite que  $f$  et  $h$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ , i.e., continûment différentiables.

Supposons que  $\mathcal{S}$  admette un point d'équilibre  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  caractérisé par  $f(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) = \mathbf{0}$ . Notons  $\mathbf{y}_e = h(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e) \in \mathbb{R}^p$  la sortie associée à cette condition d'équilibre. La dynamique linéarisée du système en ce point d'équilibre est donnée par :

$$\mathcal{S}_l \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{y} = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)} \delta \mathbf{x} + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)} \delta \mathbf{u} \end{cases} \quad (3.2)$$

où  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\delta \mathbf{u}$  et  $\delta \mathbf{y}$  s'interprètent comme étant les déviations des vecteurs  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{y}$  relativement à leur valeur à l'équilibre. Sur la base de cette dynamique linéaire, il est possible de synthétiser un contrôleur LTI grâce aux nombreuses méthodes disponibles dans la littérature (e.g., placement de pôles, synthèse  $H_\infty$ , LQR, ...). Supposons que l'on ait synthétisé, par

l'une de ces méthodes, un contrôleur sous la forme :

$$\mathcal{C}_l \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^{\mathcal{C}} \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^{\mathcal{C}} \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_y^{\mathcal{C}} \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^{\mathcal{C}} \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}} \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_y^{\mathcal{C}} \delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (3.3)$$

où  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  est un signal de référence que doit suivre  $\mathbf{y}_1(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  qui correspond à un sous-vecteur de  $\mathbf{y}(t)$ . Dans cette configuration, la synthèse consiste à choisir la structure des matrices  $\mathbf{A}_c^{\mathcal{C}}, \dots, \mathbf{D}_y^{\mathcal{C}}$  du contrôleur ainsi que d'en ajuster (numériquement) les degrés de liberté de manière à ce que  $\mathcal{C}_l$ , une fois implémenté sur  $\mathcal{S}_l$ , soit stable et offre un niveau de performance satisfaisant (temps de réponse, dépassement, etc).

Une fois le contrôleur  $\mathcal{C}_l$  synthétisé il faut l'implémenter sur le système non linéaire d'origine  $\mathcal{S}$ . Pour cela, la solution classique est de substituer dans (3.3) les symboles «  $\delta$  » par les déviations des signaux du système non linéaire par rapport à leur valeur à l'équilibre<sup>1</sup>. Cela donne lieu à l'implémentation suivante :

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^{\mathcal{C}} \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^{\mathcal{C}} \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_y^{\mathcal{C}} [\mathbf{y} - \mathbf{y}_e] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e + \mathbf{C}_c^{\mathcal{C}} \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}} \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_y^{\mathcal{C}} [\mathbf{y} - \mathbf{y}_e] \end{cases} \quad (3.4)$$

Il s'agit à présent de vérifier que l'implémentation  $\mathcal{C}$  ainsi proposée est conforme à la dynamique LTI d'origine. Pour cela, le contrôleur  $\mathcal{C}$  est placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}$ . À l'équilibre du système, on obtient bien  $\mathbf{r}_e = \mathbf{y}_{1,e}$ , assurant ainsi le suivi de référence désiré et

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^{\mathcal{C}} & \mathbf{A}_i^{\mathcal{C}} \\ \mathbf{C}_c^{\mathcal{C}} & \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e} \\ \mathbf{x}_{i,e} \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.5)$$

Sous réserve que la matrice intervenant dans (3.5) est de colonne rang plein<sup>2</sup>, on obtient  $\mathbf{x}_{c,e} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_{i,e} = \mathbf{0}$ . La linéarisation en ce point d'équilibre de  $\mathcal{C}$ , caractérisé par (3.4), redonne bien la dynamique LTI d'origine  $\mathcal{C}_l$  donnée par (3.3).

Une telle approche, à savoir synthétiser un contrôleur LTI sur la dynamique linéarisée pour ensuite l'implémenter sur le système non linéaire d'origine, se justifie par deux théorèmes au

---

1. Cette approche se justifie intuitivement par le fait que la dynamique linéarisée est obtenue en effectuant un développement de Taylor à l'ordre 1 des fonctions  $f$  et  $h$  au voisinage du point d'équilibre étudié.

2. Cette hypothèse sera largement reprise dans les prochains développements. Elle permet de garantir l'unicité de la condition d'équilibre du contrôleur. En effet, si elle n'était pas vérifiée, le vecteur d'état à l'équilibre du contrôleur  $[\mathbf{x}_{c,e}^{\top} \quad \mathbf{x}_{i,e}^{\top}]^{\top}$  serait libre de prendre n'importe quelle valeur dans le sous-espace vectoriel  $\text{Ker} \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^{\mathcal{C}} & \mathbf{A}_i^{\mathcal{C}} \\ \mathbf{C}_c^{\mathcal{C}} & \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}} \end{bmatrix} \right) \supsetneq \{0\}$ .

fondement de l'étude de la dynamique des systèmes non linéaires par leur linéarisé tangent. En supposant que le champ de vecteurs est de classe  $\mathcal{C}^1$  :

- le théorème dit de la *première méthode de Lyapunov* (Khalil, 1996) assure qu'un point d'équilibre est localement exponentiellement stable si et seulement si la matrice jacobienne du champs de vecteur évaluée au point d'équilibre est Hurwitz (cf. Théorème B.5) ;
- si la matrice jacobienne évaluée au point d'équilibre étudié ne présente aucune valeur propre à partie réelle nulle, le théorème de Hartman-Grohman (Perko, 2013) assure l'existence d'un homéomorphisme local (dans l'espace d'état et en temps) entre les trajectoires du système non linéaire et de son linéarisé tangent au voisinage du point d'équilibre.

### 3.1.2 Contrôleur séquencé

Dans de nombreuses applications, le contrôle du système au voisinage d'un point d'équilibre unique s'avère souvent trop limité, voire insuffisant. C'est par exemple le cas de l'avion qui doit être opéré sur un large domaine de vol (i.e., l'ensemble des altitudes et des vitesses atteignables par l'avion). Dans ce type de configuration, un seul contrôleur LTI ne permet pas d'assurer un niveau de performance adéquat du système bouclé sur l'intégralité du domaine d'opération. On a alors recours à la méthode dite du *séquencement des gains* (*gain-scheduling*) dont on présente ici les principales caractéristiques.

Supposons que le système à commander prend la forme de la représentation d'état paramétrique suivante :

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\theta} \in \Theta \end{cases} \quad (3.6)$$

où, comparativement à la configuration (3.1) précédemment étudiée, on observe la présence du terme supplémentaire  $\boldsymbol{\theta}(t)$ , évoluant dans l'ensemble  $\Theta \subset \mathbb{R}^s$  appelé *domaine d'opération*, et qui intervient en argument des fonctions  $f$  et  $h$ . On suppose que ce paramètre est exogène et lentement variant dans le temps<sup>3</sup>. Il permet ainsi de capturer des changements dans la dynamique du système lors de son fonctionnement. On suppose que pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  fixé, en prenant  $\boldsymbol{\theta}(t) = \boldsymbol{\theta}_e$  pour  $t \geq 0$ , le système  $\mathcal{S}$  décrit par (3.6) admet un unique point d'équilibre caractérisé par  $(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e)) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$  vérifiant  $f(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ . On introduit la sortie à l'équilibre associée  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^p$  définie par  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = h(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \boldsymbol{\theta}_e)$ .

Pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e$  fixé, on peut procéder similairement à la sous-section précédente. Dans un premier temps on linéarise le système au voisinage du point d'équilibre associé au point

---

3. Lentement variant dans le temps signifie qu'il existe  $\varrho > 0$  tel que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|\dot{\boldsymbol{\theta}}(t)\| \leq \varrho$ .

d'opération  $\theta_e$ , donnant lieu à la dynamique LTI  $\mathcal{S}_l(\theta_e)$ . Dans un second temps on procède à la synthèse d'un contrôleur LTI, par exemple sous la forme suivante :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_y^c(\theta_e) \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_y^c(\theta_e) \delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (3.7)$$

où, dans la synthèse, on impose que  $\mathbf{A}_c^c(\theta), \dots, \mathbf{D}_y^c(\theta)$  dépendent de manière  $\mathcal{C}^1$  du point de fonctionnement courant.

Selon les développements précédents, la famille de contrôleurs LTI ainsi synthétisée peut être implémentée sous la forme suivante :

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta) \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\theta) \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_y^c(\theta) [\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\theta)] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e(\theta) + \mathbf{C}_c^c(\theta) \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\theta) \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_y^c(\theta) [\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\theta)] \end{cases} \quad (3.8)$$

Comme précédemment l'équilibre du contrôleur au point d'opération  $\theta_e \in \Theta$ , lorsque placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}$ , est caractérisé par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c(\theta_e) & \mathbf{A}_i^c(\theta_e) \\ \mathbf{C}_c^c(\theta_e) & \mathbf{C}_i^c(\theta_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\theta_e) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\theta_e) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.9)$$

Sous réserve que la matrice intervenant dans (3.9) est de colonne rang plein pour tout  $\theta_e \in \Theta$ , on obtient  $\mathbf{x}_{c,e}(\theta_e) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}(\theta_e) = \mathbf{0}$ . La linéarisation de  $\mathcal{C}$  en un point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  arbitraire redonne bien la dynamique LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donnée par (3.7). Ainsi,  $\mathcal{C}$  est bien une implémentation adéquate de la famille de contrôleurs LTI précédemment synthétisée. Le contrôleur obtenu est dit *séquenté* par rapport au point d'opération  $\theta$  et prend la dénomination de *contrôleur séquenté*. On dit que  $\theta$  est un paramètre ou une variable de séquentement.

En plaçant le système  $\mathcal{S}$  en boucle fermée avec le contrôleur séquenté  $\mathcal{C}$ , on obtient un système bouclé pouvant s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{X}} = \tilde{f}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \\ \mathbf{y} = \tilde{h}(\mathbf{X}, \mathbf{U}) \end{cases} \quad (3.10)$$

où  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}^\top \quad \mathbf{x}_i^\top \quad \mathbf{x}_c^\top]^\top$  et  $\mathbf{U} = [\mathbf{r}^\top \quad \boldsymbol{\theta}^\top]^\top$ . Le point d'équilibre au point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  est alors caractérisé par  $\mathbf{X}_e(\theta_e) = [\mathbf{x}_e(\theta_e)^\top \quad \mathbf{0}^\top \quad \mathbf{0}^\top]^\top$ ,  $\mathbf{U}_e(\theta_e) = [\mathbf{y}_{1,e}(\theta_e)^\top \quad \boldsymbol{\theta}_e^\top]^\top$  et  $\mathbf{y}_e(\theta_e) = \tilde{h}(\mathbf{X}_e(\theta_e), \mathbf{U}_e(\theta_e))$ . En supposant que la famille de contrôleurs LTI a été synthétisée

de manière à ce que pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  le système bouclé composé de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  et de  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  est stable, alors le théorème de la première méthode de Lyapunov permet de garantir la stabilité exponentielle locale de  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  pour tout point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  invariant dans le temps. La question est alors de savoir si, en un certain sens à définir, le système  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C})$  demeure stable pour de « lentes » variations du paramètre de séquençement  $\boldsymbol{\theta}$  et de l'entrée exogène de référence  $\mathbf{r}$ . Une réponse positive peut, sous certaines hypothèses, être apportée par le résultat suivant.

**Théorème 3.1 (Lawrence et al. (1990))** *Soit  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^2$ . Fixons  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . On suppose que les hypothèses suivantes sont vérifiées.*

- *Il existe un ensemble ouvert borné  $U \subset \mathbb{R}^m$  et une fonction  $\mathbf{x}_e : \bar{U} \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $\mathcal{C}^1$  telle que pour tout  $\mathbf{u} \in U$ ,  $f(\mathbf{x}_e(\mathbf{u}), \mathbf{u}) = \mathbf{0}$ .*
- *Il existe un nombre réel  $\lambda > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{u} \in U$ , les valeurs propres de la matrice jacobienne  $(\partial f / \partial \mathbf{x})(\mathbf{x}_e(\mathbf{u}), \mathbf{u})$  ont toutes une partie réelle inférieure ou égale à  $-\lambda$ .*

*Alors, il existe  $\varrho^* > 0$  tel que pour tout  $\varrho \in [0, \varrho^*)$  et tout  $T > 0$ , on puisse trouver  $\delta_1(\varrho), \delta_2(\varrho, T) > 0$  de telle sorte que, pour toute fonction  $\mathbf{u} : [t_0, +\infty) \rightarrow U$  de classe  $\mathcal{C}^1$  vérifiant :*

1.  $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}_e(\mathbf{u}(t_0))\| < \delta_1(\varrho) ;$
2. *pour tout  $t \geq t_0$ ,  $\frac{1}{T} \int_t^{t+T} \|\dot{\mathbf{u}}(\tau)\| d\tau < \delta_2(\varrho, T)$ ,*

*la solution de l'EDO  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  pour la condition initiale  $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$  vérifie, pour tout  $t \geq t_0$ ,  $\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_e(\mathbf{u}(t))\| < \varrho$ .*

De manière intuitive, le théorème précédent, appliqué au cas du séquençement de gain, établit que des variations suffisamment lentes du paramètre de séquençement et de l'entrée de référence permettent d'assurer que l'état du système demeure proche de la valeur de l'état à l'équilibre associé au point de fonctionnement courant.

### 3.2 Problématique des termes de couplage cachés

La problématique des TCC est intrinsèquement liée à la nature instationnaire du paramètre de séquençement  $\boldsymbol{\theta}$ . Plus précisément, cette problématique émerge lorsque le contrôleur est séquençé par l'intermédiaire d'une variable endogène, typiquement une variable d'état ou un signal de sortie du système à commander. Dans ce cas, le contrôleur présente des gains qui varient en fonction d'une grandeur qu'il cherche, directement ou indirectement, à contrôler. Cette dualité entre variable de séquençement et variable à contrôler est la source de l'introduction de bouclages internes « cachés » dans le système en boucle fermée. Cette section vise à identifier ces TCC et à évaluer leur impact sur la dynamique du système en boucle fermée.



### 3.2.1 Exemples illustratifs

De manière à bien cerner la problématique des TCC, on considère deux exemples académiques. Le premier traite du cas du contrôle d'un système dont la dynamique est non linéaire par un retour d'état avec composante intégrale. Le second traite du contrôle par retour de sortie avec composante intégrale d'un système dont la dynamique est linéaire mais l'équation de sortie est non linéaire.

#### 3.2.1.1 Exemple 1 - Non linéarité dans la dynamique du système

Soit le système non linéaire d'ordre 2 décrit par (Khalil, 1996) :

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_1 = \tan x_1 + x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1 + u \\ y = x_2 \end{cases} \quad (3.11)$$

où  $u$  et  $y$  représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. On suppose que les variables d'état  $x_1$  et  $x_2$  sont utilisables pour procéder à un retour d'état. L'objectif de cet exemple est de synthétiser un contrôleur séquencé permettant de garantir que la sortie  $y$  suit le signal de référence  $r$ . Pour cela, le point d'équilibre du système (3.11) associé à  $y_e = \theta_e \in \mathbb{R}$  est caractérisé par :

$$x_{1,e}(\theta_e) = -\tan^{-1} \theta_e, \quad x_{2,e}(\theta_e) = y_e(\theta_e) = \theta_e, \quad u_e(\theta_e) = \tan^{-1} \theta_e. \quad (3.12)$$

La linéarisation du système  $\mathcal{S}$  au point d'équilibre  $\theta_e$  est donnée par :

$$\mathcal{S}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_1 = (1 + \theta_e^2) \delta x_1 + \delta x_2 \\ \delta \dot{x}_2 = \delta x_1 + \delta u \\ \delta y = \delta x_2 \end{cases} \quad (3.13)$$

où  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta y$  et  $\delta u$  représentent les déviations de  $x_1$ ,  $x_2$ ,  $y$  et  $u$  relativement à  $x_{1,e}(\theta_e)$ ,  $x_{2,e}(\theta_e)$ ,  $y_e(\theta_e)$  et  $u_e(\theta_e)$ . Pour chaque point d'équilibre  $\theta_e \in \mathbb{R}$  donné, le contrôleur par retour d'état avec composante intégrale  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donné ci-dessous est proposé (Khalil, 1996) :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = k_i(\theta_e) \delta x_i + k_1(\theta_e) \delta x_1 + k_2(\theta_e) \delta x_2 \end{cases} \quad (3.14)$$

où  $\delta r$  dénote la déviation du signal de référence  $r$  de la valeur d'équilibre  $r_e = \theta_e$ . La fonction de transfert du système bouclé liant l'entrée de référence  $\delta r$  à la sortie  $\delta y$  est alors donnée par :

$$T(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e)) \quad (3.15)$$

$$= \frac{k_i(\theta_e)(s - (1 + \theta_e^2))}{s^3 - [k_2(\theta_e) + (1 + \theta_e^2)]s^2 + [-k_1(\theta_e) + k_2(\theta_e)(1 + \theta_e^2) + k_i(\theta_e) - 1]s - k_i(\theta_e)(1 + \theta_e^2)}.$$

Les gains  $k_i(\theta_e)$ ,  $k_1(\theta_e)$  et  $k_2(\theta_e)$  sont calculés de manière à placer les trois pôles du système en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  en  $-1$  et  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ . On obtient alors que :

$$k_i(\theta_e) = -\frac{1}{1 + \theta_e^2}, \quad k_1(\theta_e) = -3 - (1 + \theta_e^2)(3 + \theta_e^2) - \frac{1}{1 + \theta_e^2}, \quad k_2(\theta_e) = -3 - \theta_e^2. \quad (3.16)$$

Ce choix de gains donne lieu à la fonction de transfert en boucle fermée :

$$T(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e)) = \frac{-s/(1 + \theta_e^2) + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}. \quad (3.17)$$

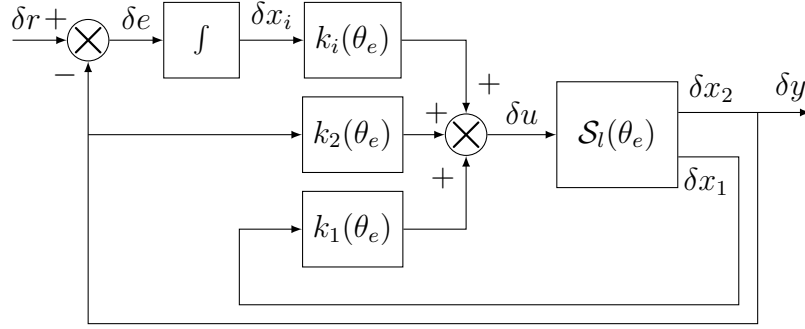
L'architecture du système linéaire bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  est illustrée à la Fig. 3.1(a).

Il s'agit à présent de proposer un contrôleur (non linéaire) séquencé permettant d'implémenter sur le système non linéaire d'origine  $\mathcal{S}$  la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l = (\mathcal{C}_l(\theta_e))_{\theta_e \in \mathbb{R}}$ . Pour cela, deux approches sont classiquement utilisées. La première consiste à substituer dans (3.14)  $\theta_e$  par sa valeur courante  $y$  ainsi que de remplacer les déviations  $\delta x_1$ ,  $\delta x_2$ ,  $\delta y$  et  $\delta u$  par  $x_1 - x_{1,e}(y)$ ,  $x_2 - x_{2,e}(y)$ ,  $y - y_e(y)$  et  $u - u_e(y)$  respectivement. Néanmoins, cette approche n'est ici clairement pas adéquate puisqu'elle aboutirait à remplacer  $\delta x_2$  par  $x_2 - x_{2,e}(y) = y - y = 0$ , amenant donc à annuler le retour de sortie de gain  $k_2$ . La seconde approche consiste en l'implémentation du contrôleur non linéaire donné par :

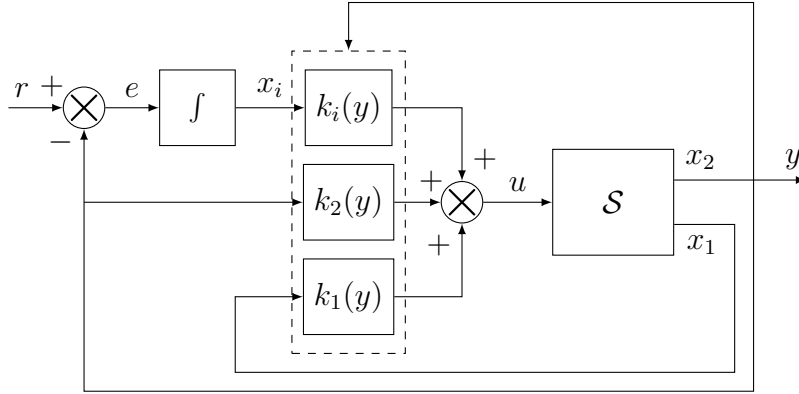
$$\mathcal{C}_{\text{seq}} = \begin{cases} \dot{x}_i = r - y \\ u = k_i(y)x_i + k_1(y)x_1 + k_2(y)y \end{cases} \quad (3.18)$$

L'architecture du système en boucle fermée consistant en l'interconnexion du système  $\mathcal{S}$  et du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$ , notée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})$ , est illustrée à la Fig. 3.1(b).

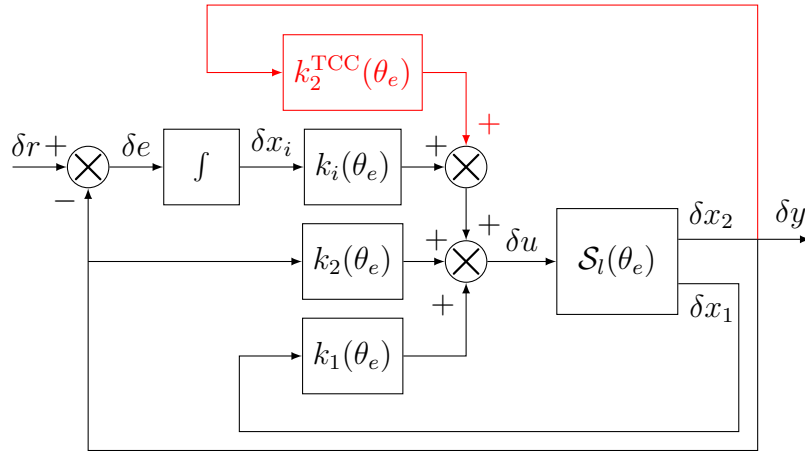
Afin de valider le choix du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$ , on cherche à évaluer si le placement de pôles effectué lors de la synthèse est bien satisfait. La linéarisation de la dynamique de  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$



(a) Architecture du système linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  au point d'opération  $\theta_e$  utilisé lors de la synthèse.



(b) Architecture du système non linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})$  basée sur le séquençement des gains du contrôleur.



(c) Architecture du système linéarisé  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})(\theta_e)$  résultant de la linéarisation du système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})$  au point d'opération  $\theta_e$ .

Figure 3.1 Exemple 1 - Illustration de l'impact de l'implémentation d'un contrôleur séquencé.

au point d'opération  $\theta_e$  donne la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e)$  caractérisée par :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = k_i(\theta_e)\delta x_i + k_1(\theta_e)\delta x_1 + (k_2(\theta_e) + k_2^{\text{TCC}}(\theta_e))\delta y \end{cases} \quad (3.19)$$

où, en introduisant  $x_{i,e}(\theta_e) = [u_e(\theta_e) - k_1(\theta_e)x_{1,e}(\theta_e) - k_2(\theta_e)\theta_e]/k_i(\theta_e)$  la condition d'équilibre associée à la composante intégrale du contrôleur,

$$\begin{aligned} k_2^{\text{TCC}}(\theta_e) &= \left. \frac{dk_i}{dy} \right|_{\theta_e} x_{i,e}(\theta_e) + \left. \frac{dk_1}{dy} \right|_{\theta_e} x_{1,e}(\theta_e) + \left. \frac{dk_2}{dy} \right|_{\theta_e} \theta_e \\ &= -4(1 + \theta_e^2) + \frac{4}{1 + \theta_e^2} + 2 \left[ \theta_e(7 + 3\theta_e^2) + \frac{2\theta_e}{1 + \theta_e^2} \right] \tan^{-1}(\theta_e). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  présente donc une dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e)$  différente de celle donnée par  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  qui a été utilisée lors de la phase de synthèse. En particulier, on observe que le gain du retour portant sur la seconde variable d'état  $\delta x_2$  est augmenté d'un terme supplémentaire  $k_2^{\text{TCC}}(\theta_e)$ , référencé sous la dénomination TCC. Ce terme fait intervenir la dérivation des gains séquencés du contrôleur par rapport au signal de séquençement  $y$ , ainsi que les conditions d'équilibre du système. Il introduit une boucle interne « cachée » lors de la linéarisation du système bouclé au point d'opération  $\theta_e$ , noté  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})(\theta_e) = \mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e))$ , comme l'illustre la Fig. 3.1(c). On note en particulier que cette boucle n'a pas été considérée lors de la phase de synthèse, cette dernière étant basée sur  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  (comparaison des Figs. 3.1(a) et 3.1(c)).

Cette boucle « cachée » introduite par les TCC a un impact sur la dynamique du système bouclé, et en particulier sur le placement de pôles. Dès lors, n'ayant pas tenu compte de sa contribution lors de la synthèse des gains du contrôleur, le placement précédent n'est plus assuré par le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$ . La Fig. 3.2 illustre la position des pôles du système bouclé  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})$  après linéarisation pour différentes valeurs d'équilibre du point d'opération  $\theta_e$ . Le placement de pôles désiré est uniquement satisfait pour  $\theta_e = 0$  (pour lequel le TCC est nul). De plus, il s'avère que le système est stable en boucle fermée uniquement pour  $|\theta_e| < \theta_{\text{lim}}$  où  $\theta_{\text{lim}} \approx 0.417$ .

Ce premier exemple met en lumière le problème de l'émergence des TCC lors du design d'un contrôleur séquencé et l'éventuelle perte de stabilité et de performance associée.

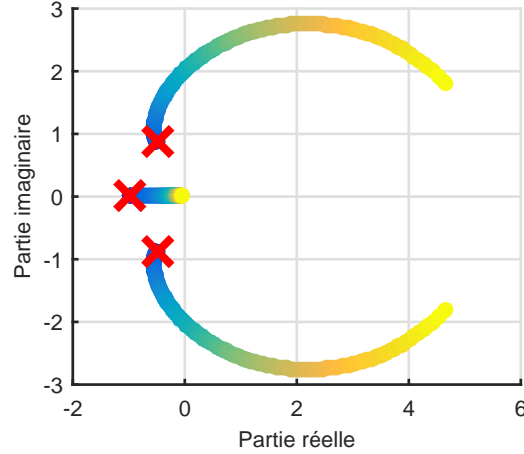


Figure 3.2 Exemple 1 - Évolution des valeurs propres du système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})$  après linéarisation pour différentes valeurs d'équilibre du point d'opération  $|\theta_e| \in [0, 1]$ , en bleu pour  $|\theta_e|$  proche de 0 et en jaune pour  $|\theta_e|$  proche de 1. Les croix rouges indiquent le placement de valeurs propres souhaité.

### 3.2.1.2 Exemple 2 - Non linéarité dans l'équation de sortie du système

Ce second exemple montre que le problème des TCC peut également survenir quand la non linéarité est présente uniquement dans l'équation de sortie. Soit le système non linéaire d'ordre 1 décrit par (Rugh and Shamma, 2000) :

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{cases} \dot{x} = -x + u \\ y = \tanh(x) \end{cases} \quad (3.21)$$

où  $u$  et  $y$  représentent respectivement l'entrée et la sortie du système. L'objectif de cet exemple est de synthétiser un contrôleur séquencé par retour de sortie permettant de garantir que la sortie  $y$  suive le signal de référence  $r$ . Pour cela, le point d'équilibre du système (3.21) associé à  $y_e = \theta_e \in (-1, 1)$  est caractérisé par :

$$x_e(\theta_e) = u_e(\theta_e) = \tanh^{-1} \theta_e. \quad (3.22)$$

La linéarisation du système  $\mathcal{S}$  au point d'équilibre  $\theta_e$  est alors donnée par :

$$\mathcal{S}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x} = -\delta x + \delta u \\ \delta y = (1 - \theta_e^2) \delta x \end{cases} \quad (3.23)$$

où  $\delta x$ ,  $\delta y$  et  $\delta u$  représentent les déviations de  $x$ ,  $y$  et  $u$  relativement à  $x_e(\theta_e)$ ,  $y_e(\theta_e)$  et  $u_e(\theta_e)$ . Pour chaque point d'équilibre  $\theta_e \in (-1, 1)$  donné, le contrôleur proportionnel intégral (PI) suivant est proposé (Rugh and Shamma, 2000) :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = k_i(\theta_e) \delta x_i + k_p(\theta_e) (\delta r - \delta y) \end{cases} \quad (3.24)$$

où  $\delta r$  dénote la déviation du signal de référence  $r$  de la valeur d'équilibre  $r_e = \theta_e$ . Les gains  $k_i(\theta_e)$  et  $k_p(\theta_e)$  sont donnés par :

$$k_i(\theta_e) = \frac{1}{1 - \theta_e^2}, \quad k_p(\theta_e) = \frac{1}{3(1 - \theta_e^2)}, \quad (3.25)$$

et permettent d'assurer que la fonction de transfert du système bouclé est indépendante du point d'opération courant  $\theta_e$ , soit :

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta R(s)} = \frac{(1/3)s + 1}{s^2 + (4/3)s + 1}, \quad (3.26)$$

où  $\Delta R$  et  $\Delta Y$  dénotent respectivement les transformées de Laplace de  $\delta r$  et  $\delta y$ .

On cherche dès lors un contrôleur (non linéaire) séquencé permettant d'implémenter sur le système non linéaire d'origine  $\mathcal{S}$  la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l = (\mathcal{C}_l(\theta_e))_{\theta_e \in (-1, 1)}$ . Pour cela, l'implémentation suivante est classiquement suggérée :

$$\mathcal{C}_{\text{seq}} = \begin{cases} \dot{x}_i = r - y \\ u = k_i(y)x_i + k_p(y)(r - y) \end{cases} \quad (3.27)$$

La linéarisation de la dynamique du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  au point d'opération  $\theta_e$  donne alors :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},l} = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = k_i(\theta_e) \delta x_i + k_p(\theta_e) (\delta r - \delta y) + k_y^{\text{TCC}}(\theta_e) \delta y \end{cases} \quad (3.28)$$

où, en introduisant  $x_{i,e}(\theta_e) = u_e(\theta_e)/k_i(\theta_e)$  la condition d'équilibre associée à la composante intégrale du contrôleur,

$$k_y^{\text{TCC}}(\theta_e) = \left. \frac{dk_i}{dy} \right|_{\theta_e} x_{i,e}(\theta_e) = \frac{2\theta_e \tanh^{-1} \theta_e}{1 - \theta_e^2}. \quad (3.29)$$

Le contrôleur séquencé linéarisé  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}$  présente donc une dynamique différente de celle de  $\mathcal{C}_l$ . En particulier, on observe que le gain du retour de sortie est augmenté d'un terme supplé-

mentaire  $k_y^{\text{TCC}}(\theta_e)$ . Tout comme dans le cas de l'exemple précédent, ce terme additionnel introduit une boucle interne « cachée » qui va venir perturber la dynamique du système bouclé relativement à ce qui est attendu lors de la synthèse des gains. De manière plus spécifique, en tenant compte de l'impact du TCC, la fonction de transfert du système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e))$  est donnée par :

$$\frac{\Delta Y(s)}{\Delta R(s)} = \frac{(1/3)s + 1}{s^2 + (4/3 - 2\theta_e \tanh^{-1} \theta_e)s + 1}. \quad (3.30)$$

En comparant la fonction de transfert ainsi obtenue après implémentation (3.30) à celle imposée lors de la synthèse (3.26), on note que la présence des TCC se traduit par l'introduction d'un terme supplémentaire dans le coefficient de degré 1 au dénominateur de la fonction de transfert (3.30). L'application du critère de Routh-Hurwitz garantit alors que (3.30) est stable si et seulement si  $\theta_e \tanh^{-1} \theta_e < 2/3$ . Or, la fonction  $\varphi : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  définie par  $\varphi(\theta) = \theta \tanh^{-1}(\theta)$  est paire, strictement croissante sur  $[0, 1)$ , admet un minimum global en  $\theta = 0$  tel que  $\varphi(0) = 0$  et vérifie  $\varphi(\theta) \xrightarrow{|\theta| \rightarrow 1^-} +\infty$ . Le théorème des valeurs intermédiaires garantit alors l'existence d'un unique  $\theta_{\text{lim}} \in (0, 1)$  tel que  $\varphi(\theta_{\text{lim}}) = 2/3$ . On obtient numériquement que  $\theta_{\text{lim}} \approx 0.725$ . Dès lors, le système non linéaire bouclé composé de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  est localement exponentiellement stable pour  $|\theta_e| < \theta_{\text{lim}}$  et instable pour  $|\theta_e| \geq \theta_{\text{lim}}$ .

### 3.2.1.3 Analyse et bilan des deux exemples

Les deux exemples développés précédemment montrent l'émergence d'un problème manifeste lors de la synthèse de contrôleurs séquencés. De manière plus spécifique, la difficulté surgit lors de la transition entre :

1. la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l = (\mathcal{C}_l(\theta_e))_{\theta_e \in \Theta}$  qui a été synthétisée pour chaque point de fonctionnement  $\theta_e$  du domaine d'opération  $\Theta$  ;
2. l'obtention d'un contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  obtenu par le séquençement de  $\mathcal{C}_l$  avec une variable endogène (variable d'état ou signal de sortie) .

Un séquençement non adéquat de  $\mathcal{C}_l$  donne lieu à un contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  dont la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e)$  ne coïncide généralement pas avec celle de  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  à cause de l'apparition des TCC. Cette différence provient du fait que lors de la synthèse des gains du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$ , on suppose de manière implicite que le point d'opération ne varie pas. Or, le point d'opération étant fonction de certaines variables endogènes<sup>4</sup>, les gains du contrôleur séquencé sont amenés à évoluer en fonction de la valeur courante de certaines variables internes du système bouclé ; c'est la source même des boucles internes « cachées » introduites

---

4. Pour les deux exemple développés, le point d'opération coïncide avec le signal de sortie du système.

par les TCC. Lorsqu'ils ne sont pas considérés adéquatement lors de la phase de synthèse, ils peuvent conduire à des résultats non conformes aux attentes dont, potentiellement, la déstabilisation du système en boucle fermée.

### 3.2.2 Formulation générale du problème

On s'attache à présent à introduire la problématique des TCC dans le cadre général d'un contrôleur séquencé par retour de sortie.

#### 3.2.2.1 Système non linéaire, système linéarisé et paramétrisation

On suppose que le système à commander est sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \end{cases} \quad (3.31)$$

avec  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée de commande,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur d'entrée exogène et  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie (où  $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$ ). Le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente la dynamique du système et la fonction  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \rightarrow \mathbb{R}^p$  génère les sorties du système. On suppose par la suite que  $f$  et  $h$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ .

On s'attache ici au problème de suivi pour des signaux de référence lentement variant dans le temps. On introduit alors  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  le vecteur de référence et on suppose sans perte de généralité que le vecteur de sortie s'écrit sous la forme  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_2^\top]^\top$ , où  $\mathbf{y}_1(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  contient les sorties du système qui doivent suivre  $\mathbf{r}(t)$ , et où  $\mathbf{y}_2(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$  contient les sorties supplémentaires utilisables par la loi de commande avec  $p_1 + p_2 = p$  (où  $p_1 \in \mathbb{N}^*$  et  $p_2 \in \mathbb{N}$ ). Dès lors, l'équation de sortie de (3.31) se scinde sous la forme  $\mathbf{y}_1 = h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  et  $\mathbf{y}_2 = h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w})$  de telle sorte que  $h = [h_1^\top h_2^\top]^\top$ . Le vecteur d'entrées exogènes est décomposé sous la forme  $\mathbf{w} = [\mathbf{d}^\top \mathbf{w}_m^\top]^\top$ , où  $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  est le vecteur représentant les perturbations non mesurables (e.g., bruit des capteurs),  $\mathbf{w}_m(t) \in \mathbb{R}^{q_2}$  le vecteur des entrées exogènes mesurables (e.g, dans le contexte aéronautique, altitude, vitesse de vol, pression dynamique) avec  $q_1 + q_2 = q$  (où  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ ).

Dans la mesure où l'objectif du contrôle est d'assurer que  $\mathbf{y}_1$  suive le signal de référence  $\mathbf{r}$ , on s'intéresse aux points d'équilibre tels que leur valeur à l'équilibre coïncident. Cela se traduit pas la contrainte  $\mathbf{y}_{1,e} = \mathbf{r}_e \in \Omega$ , où  $\Omega$  est un sous-ensemble fermé et connexe par arc de  $\mathbb{R}^{p_1}$  dans lequel on souhaite faire évoluer le signal de référence  $\mathbf{r}$ . De plus, on considère des perturbations  $\mathbf{d}$  de faible amplitude autour de leur valeur nominale  $\mathbf{d}_e \in \mathbb{R}^{q_1}$ . Sans perte de



généralité, on peut supposer que  $\mathbf{d}_e = \mathbf{0}$ . On considère alors la famille de points d'équilibres définie par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q &\triangleq \{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q : \\ &\quad f(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) = \mathbf{0}, h_1(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) = \mathbf{r}_e, \mathbf{d}_e = \mathbf{0}, \mathbf{r}_e \in \Omega\}, \end{aligned} \quad (3.32)$$

où  $\mathbf{x}_e$ ,  $\mathbf{u}_e$  et  $\mathbf{w}_e$  représentent respectivement les valeurs prises à l'équilibre par  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{w}$ . On suppose que  $\mathcal{E}_q$  peut être paramétrisé de manière  $\mathcal{C}^1$  par un vecteur, référé sous la dénomination de « point d'opération »,  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , où  $\Theta$  est un sous-ensemble fermé connexe par arc de  $\mathbb{R}^s$  (où  $s \in \mathbb{N}^*$ ), i.e., il existe une fonction  $\mu : \Theta \rightarrow \mathcal{E}_q$  bijective, de classe  $\mathcal{C}^1(\Theta; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q)$  et telle que :

$$(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) \in \mathcal{E}_q \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta : (\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) = \mu(\boldsymbol{\theta}_e). \quad (3.33)$$

De plus, on suppose que le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e = \mu^{-1}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e)$  dépend uniquement de la mesure de la sortie du système  $\mathbf{y}_e$  et des sorties exogènes mesurables  $\mathbf{w}_{m,e}$ . Cette hypothèse implique que pour tout vecteur admissible  $\mathbf{y}_e$  et  $\mathbf{w}_{m,e}$ , il existe un couple unique de vecteurs  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e)$  tel que  $(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) \in \mathcal{E}_q$  et  $h(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) = \mathbf{y}_e$ . De manière plus spécifique, on suppose qu'il existe une fonction  $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \Theta$  bijective, de classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{R}, \mathbb{R}^s)$  avec

$$\mathcal{R} = \{(\mathbf{y}_e, \mathbf{w}_{m,e}) \in \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^{q_2} : h(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) = \mathbf{y}_e, (\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) \in \mathcal{E}_q\}, \quad (3.34)$$

et telle que

$$(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e) = \mu(\boldsymbol{\theta}_e) \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta}_e = \nu(\mathbf{y}_e, \mathbf{w}_{m,e}). \quad (3.35)$$

Par la suite, lorsque l'on considérera un point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  donné, on notera  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta})^\top]^\top \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{w}_{m,e}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{q_2}$  les grandeurs associées au point d'équilibre  $\mu(\boldsymbol{\theta})$ . Dès lors, les grandeurs précédemment énumérées sont assimilées à des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies sur le domaine d'opération  $\Theta$  (la régularité  $\mathcal{C}^1$  provient du fait que  $\mu$ ,  $h_1$  et  $h_2$  sont supposées continûment différentiables).

Dans le cadre de la synthèse d'un contrôleur séquencé, le système  $\mathcal{S}$  est linéarisé pour chacun des points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  (i.e., autour du point d'équilibre associé  $\mu(\boldsymbol{\theta}_e)$ ). Introduisant respectivement  $\delta \mathbf{x}$ ,  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{w}$  et  $\delta \mathbf{y}$ , les déviations de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{y}$  relativement à la condition d'équilibre  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ , la linéarisation de  $\mathcal{S}$  donne le système LTI suivant :

$$\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{u} + \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{w} \\ \delta \mathbf{y} = \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x} + \mathbf{D}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{u} + \mathbf{D}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{w} \end{cases} \quad (3.36)$$

où

$$\mathbf{A}^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e)} \in \mathbb{R}^{n \times n}, \quad \mathbf{B}_u^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e)} \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad \mathbf{B}_w^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e)} \in \mathbb{R}^{n \times q}, \quad (3.37)$$

$$\mathbf{C}^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e)} \in \mathbb{R}^{p \times n}, \quad \mathbf{D}_u^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e)} \in \mathbb{R}^{p \times m}, \quad \mathbf{D}_w^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e)} \in \mathbb{R}^{p \times q}. \quad (3.38)$$

On définit alors la famille de modèles LTI associée au système  $\mathcal{S}$  indexée par le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  comme suit :

$$\mathcal{S}_l \triangleq \{\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e) : \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta\}. \quad (3.39)$$

### 3.2.2.2 Famille de contrôleurs LTI

Dans le contexte d'une synthèse de contrôleur par séquençement des gains, le premier objectif est de synthétiser, pour chaque modèle  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathcal{S}_l$ , un contrôleur  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Plusieurs méthodes existent pour synthétiser une telle famille de contrôleurs, que ce soit par une approche de synthèse point à point classique ou par des méthodes modernes de type LPV.

Soit le contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  illustré à la Fig. 3.3 et de la forme :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{r} + \mathbf{B}_y^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{y} \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{r} + \mathbf{D}_y^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (3.40)$$

où  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{y}_1$  et  $\delta \mathbf{y}_2$  désignent les déviations de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  par rapport à leur valeur d'équilibre  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$ , et où le vecteur d'état du contrôleur est constitué de la composante intégrale  $\delta \mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  et du vecteur  $\delta \mathbf{x}_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  (avec  $n_c \in \mathbb{N}$ ).

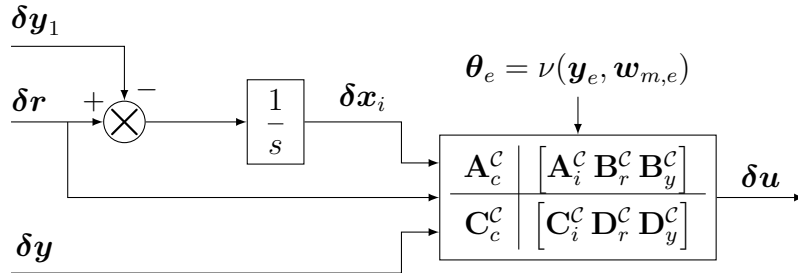


Figure 3.3 Contrôleur linéaire  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$

On suppose que les entrées des matrices  $\mathbf{A}_c^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}, \dots, \mathbf{D}_2^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont des fonctions  $\mathcal{C}^1$  du paramètre de séquençement  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . On suppose de plus que pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ ,

la matrice suivante est de colonne rang plein :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+m) \times (n_c+p_1)}, \quad (3.41)$$

c'est-à-dire,  $\text{rg}(\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)) = n_c + p_1$  pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ . Cette hypothèse implique en particulier que  $m \geq p_1$ , indiquant que le système présente un plus grand nombre d'entrées  $m$  que le nombre de sorties impliquées dans le suivi de référence  $p_1$ . Elle sera utilisée par la suite afin de garantir l'unicité du vecteur d'état du contrôleur à l'équilibre pour un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  donné. On peut alors introduire la famille de contrôleurs LTI indexée par le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  comme suit :

$$\mathcal{C}_l \triangleq \{\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) : \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta\}. \quad (3.42)$$

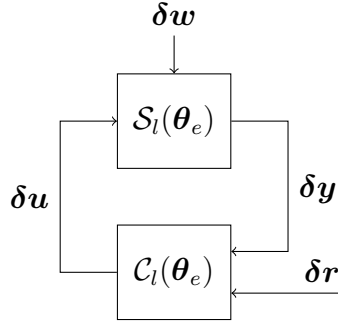


Figure 3.4 Système linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$

Dans ce contexte, l'objectif est donc d'ajuster les gains du contrôleur à architecture fixe de manière à garantir qu'à chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ , le système en boucle fermée dénoté  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  (cf. Fig. 3.4) est asymptotiquement stable et présente un niveau de performance qui rencontre les requis. Dans le cas d'un design basé sur une approche LPV, on peut également chercher à garantir que la stabilité et les performances du système LPV en boucle fermée soient satisfaites pour un niveau prédéfini de la vitesse de variation des paramètres à temps variant.

### 3.2.2.3 Contrôleur séquencé et émergence des termes de couplage cachés

Deux architectures de contrôleurs séquencés sont classiquement proposées pour implémenter la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  précédemment synthétisée. La première s'inspire directement de la méthode d'implémentation d'un contrôleur LTI conçu pour fonctionner autour d'un point de fonctionnement donné du système non linéaire. Pour cela, si l'on souhaite

implémenter pour un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  fixé le contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  sur le système non linéaire  $\mathcal{S}$  afin de le commander au voisinage du point d'équilibre  $\mu(\boldsymbol{\theta}_e)$ , on aurait recours à l'implémentation suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e)[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)] + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}_e)[\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e)] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e)[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)] + \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta}_e)[\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e)] \end{cases} \quad (3.43)$$

En effet, une fois ce contrôleur placé en boucle fermée avec le système non linéaire  $\mathcal{S}$ , son point d'équilibre associé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  est caractérisé par

$$\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e), \quad \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (3.44)$$

Cela implique, puisque la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est supposée de colonne rang plein, que  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ . Dès lors, la linéarisation de (3.43) au point d'équilibre associé au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  permet bien de retrouver le contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  d'origine donné par (3.40). Néanmoins, l'implémentation (3.43) n'est valable que dans un voisinage du point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ . De manière à ce que la stratégie de contrôle s'adapte aux variations du point d'opération, une approche classique pour obtenir le contrôleur séquencé consiste à remplacer  $\boldsymbol{\theta}_e$  par sa valeur courante dans (3.43) :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},1} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})] + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta})] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})] + \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta})] \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (3.45)$$

Bien que  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  semble être à première vue une simple extension de l'implémentation valable autour d'un point de fonctionnement fixé tel que donnée en (3.43), le fait de remplacer  $\boldsymbol{\theta}_e$  par sa valeur courante  $\boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m)$  introduit un couplage supplémentaire qui va modifier la dynamique du contrôleur. Pour le montrer, on caractérise dans un premier temps l'équilibre de  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  associé au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  lorsque placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}$ . La composante intégrale garantit que  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Comme précédemment, la présence des conditions d'équilibre dans l'architecture du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  et le fait que  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est supposé de colonne rang plein assure que  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ . La dynamique

linéarisée de  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$ , illustrée à la Fig. 3.5, est alors donnée par :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y_1 \\ \delta \dot{x}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta_e) \delta x_c + \mathbf{A}_i^c(\theta_e) \delta x_i + \mathbf{B}_r^c(\theta_e) \delta r + \mathbf{B}_y^c(\theta_e) \delta y + \mathbf{B}_\theta^c(\theta_e) \delta \theta \\ \delta u = \mathbf{C}_c^c(\theta_e) \delta x_c + \mathbf{C}_i^c(\theta_e) \delta x_i + \mathbf{D}_r^c(\theta_e) \delta r + \mathbf{D}_y^c(\theta_e) \delta y + \mathbf{D}_\theta^c(\theta_e) \delta \theta \\ \delta \theta = \left. \frac{\partial \nu}{\partial y} \right|_{\nu^{-1}(\theta_e)} \delta y + \left. \frac{\partial \nu}{\partial w_m} \right|_{\nu^{-1}(\theta_e)} \delta w_m \end{cases} \quad (3.46)$$

où  $\mathbf{B}_\theta^c(\theta_e) \in \mathbb{R}^{n \times s}$  et  $\mathbf{D}_\theta^c(\theta_e) \in \mathbb{R}^{p \times s}$  sont les TCC qui prennent la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\theta^c(\theta_e) &= -\mathbf{B}_r^c(\theta_e) \left. \frac{\partial y_{1,e}}{\partial \theta} \right|_{\theta_e} - \mathbf{B}_y^c(\theta_e) \left. \frac{\partial y_e}{\partial \theta} \right|_{\theta_e}, \\ \mathbf{D}_\theta^c(\theta_e) &= \left. \frac{\partial u_e}{\partial \theta} \right|_{\theta_e} - \mathbf{D}_r^c(\theta_e) \left. \frac{\partial y_{1,e}}{\partial \theta} \right|_{\theta_e} - \mathbf{D}_y^c(\theta_e) \left. \frac{\partial y_e}{\partial \theta} \right|_{\theta_e}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

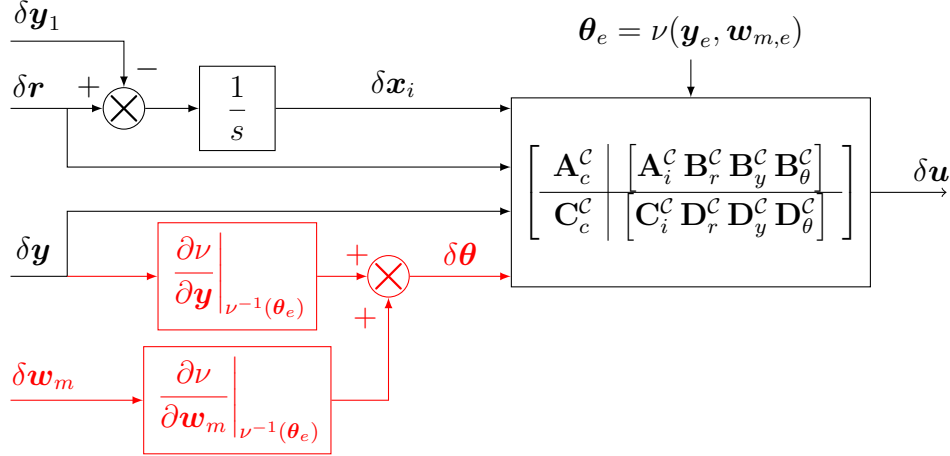


Figure 3.5 Dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e)$  du contrôleur séquencé

On observe donc que l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  ne permet pas de retrouver, après linéarisation, l'architecture du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donnée par (3.40) dû à l'émergence des TCC. Ces termes de couplages sont ici la conséquence directe du recours aux conditions d'équilibre du système  $\mathcal{S}$  au sein du contrôleur séquencé et de leur évolution en fonction du point d'opération courant  $\theta$ . En effet, les TCC (3.47) dépendent ici des dérivées partielles des conditions d'équilibre relativement au paramètre de séquencement  $\theta$ . Ces résultats tendraient à indiquer que la problématique des TCC est conditionnée par l'utilisation des conditions d'équilibre du système  $\mathcal{S}$  dans l'architecture du contrôleur séquencé. On verra cependant que ce n'est pas le cas à travers l'exemple d'une seconde architecture.

L'architecture  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$ , au-delà de l'émergence des TCC, présente le défaut d'utiliser explicitement les conditions d'équilibre du système  $\mathcal{S}$ . De manière à éviter cela, la seconde approche classique consiste à directement utiliser l'architecture du contrôleur LTI (3.40) en remplaçant simplement le point d'équilibre  $\boldsymbol{\theta}_e$  par sa valeur courante  $\boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m)$ . Le contrôleur séquencé ainsi obtenu prend la forme :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},2} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r} + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r} + \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (3.48)$$

Cette architecture présente l'avantage d'être la plus simple possible, ne nécessitant que la connaissance des gains du contrôleur à travers le domaine d'opération. De manière à évaluer sa dynamique linéarisée, on cherche à caractériser l'équilibre du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$  associé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  lorsque placé en boucle fermée avec le système non linéaire  $\mathcal{S}$ . La composante intégrale garantit que  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ . De plus, l'équilibre du vecteur d'état du contrôleur est caractérisé par l'équation :

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix}. \quad (3.49)$$

La matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  étant supposée de colonne rang plein,  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathcal{GL}_{n_c+m}(\mathbb{R})$ . Ainsi, sous l'hypothèse que l'équation (3.49) admette une solution, celle-ci est unique et est donnée par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)^\dagger \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_e), \quad (3.50)$$

où  $(\cdot)^\dagger$  correspond à la matrice pseudo-inverse de Moore-Penrose qui, dans le cas présent, s'exprime sous la forme  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)^\dagger = (\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top$ . Il est à noter que sous les hypothèses actuelles, l'existence d'un tel point d'équilibre n'est pas assurée, dans la mesure où (3.49) n'admet pas nécessairement de solution lorsque  $m > p_1$ . Ainsi, dès lors que  $\mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_e) \notin \text{Im}(\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e))$ , le contrôleur, et donc *a fortiori* le système en boucle fermée, n'admet pas de point d'équilibre pour le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ . Une condition nécessaire et suffisante garantissant l'existence d'un point d'équilibre pour chacun des points de fonctionnement à travers le domaine d'opération est donnée par :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.51)$$

Cette condition prend la forme d'une contrainte faisant intervenir les matrices de la représen-

tation d'état de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  et les conditions d'équilibre du système en boucle ouverte  $\mathcal{S}$ . En général, elle impose des contraintes sur le choix de l'architecture du contrôleur. En supposant que la contrainte (3.51) est satisfaite, la dynamique linéarisée du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$  coïncide avec celle de (3.47) tel qu'illustré à la Fig 3.5. Cependant, les TCC diffèrent de ceux obtenus avec l'architecture de contrôle  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  (3.47) et prennent la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\theta,l}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) &= \left. \frac{\partial \mathbf{A}_c^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}_i^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}_r^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}_y^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \\ \mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) &= \left. \frac{\partial \mathbf{C}_c^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{D}_r^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) + \left. \frac{\partial \mathbf{D}_y^{\mathcal{C}}}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e), \end{aligned} \quad (3.52)$$

où  $\mathbf{B}_{\theta,l}^{\mathcal{C}}$  et  $\mathbf{D}_{\theta,l}^{\mathcal{C}}$  correspondent respectivement à la  $l$ -ième colonne des matrices  $\mathbf{B}_{\theta}^{\mathcal{C}}$  et  $\mathbf{D}_{\theta}^{\mathcal{C}}$ , et  $\theta_l$  représente la  $l$ -ième composante du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ .

Il est à noter que les développements précédents se simplifient lorsque le nombre de sorties impliquées dans le suivi de référence coïncide avec la dimension du vecteur d'entrée, i.e.,  $m = p_1$ . En effet, la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est dans ce cas carrée et l'hypothèse de colonne rang plein est alors équivalente à l'inversibilité de la matrice. La condition (3.51) est alors trivialement vérifiée puisque pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^\dagger = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ . Il en découle donc que l'équation (3.49) admet toujours une unique solution, permettant de caractériser le vecteur d'état du contrôleur à l'équilibre au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  par  $[\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top]^\top = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)^{-1} \mathbf{F}(\boldsymbol{\theta}_e)$ .

Ainsi, bien que le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$  ne fasse pas intervenir les conditions d'équilibre du système  $\mathcal{S}$ , on observe tout de même l'apparition de TCC. Contrairement au contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  dont les TCC (3.47) font intervenir les dérivées partielles des conditions d'équilibre du système  $\mathcal{S}$ , les TCC (3.52) engendrés par le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$  font intervenir des dérivées partielles portant sur les matrices de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ .

### 3.2.2.4 Bilan

L'étude de la dynamique linéarisée des deux contrôleurs séquencés précédemment introduits indique que l'apparition des TCC est une problématique inhérente au séquençement des gains et tire son origine de la nature instationnaire du point d'opération. En effet, lors de la synthèse point à point des contrôleurs LTI, on suppose de manière implicite que le point d'opération et les gains du contrôleur sont statiques. Hors, ces hypothèses sont mises en défaut lors de l'étape de séquençement des gains puisque le contrôleur séquencé voit alors son point d'opération varier dans le temps. Cette dualité entre synthèse sur un point d'opération constant et implémentation pour un point d'opération variant dans le temps est la source

même de l'introduction des TCC (3.47) et (3.52).

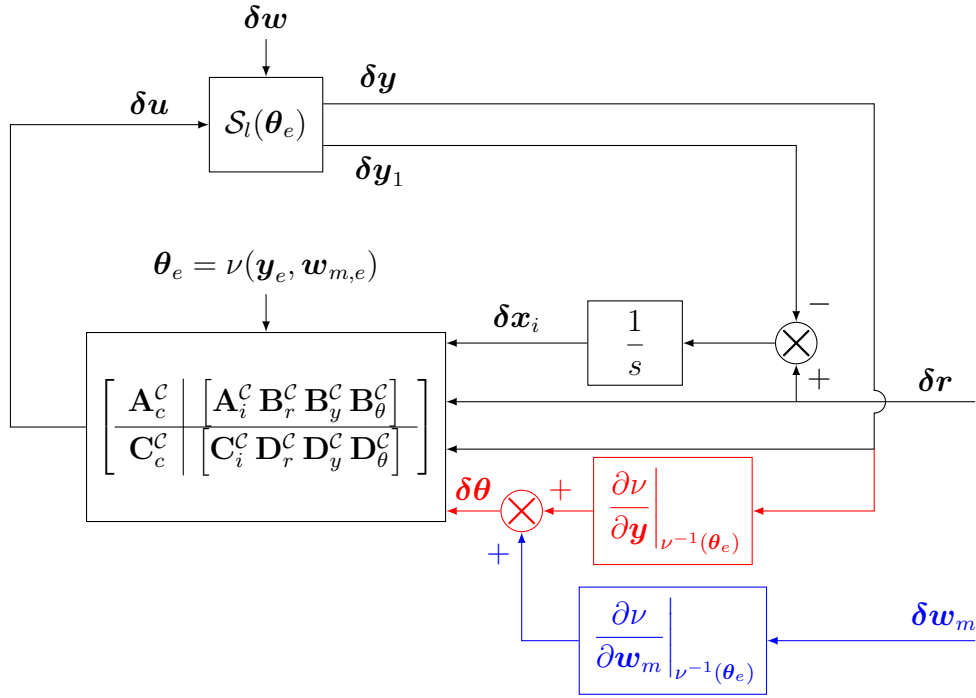


Figure 3.6 Système linéarisé en boucle fermée  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})(\theta_e)$

De manière à analyser l'impact des TCC, l'architecture  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})(\theta_e)$  du système en boucle fermée linéarisée au point de fonctionnement  $\theta_e$  est illustrée à la Fig. 3.6. Cette architecture est à comparer à celle du système linéaire  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  utilisée à des fins d'ajustement des gains du contrôleur de la Fig. 3.4. On observe que le passage d'un point d'opération invariant dans le temps  $\theta_e$  pour la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  vers un point d'opération qui varie dans le temps  $\theta(t) = \nu(\mathbf{y}(t), \mathbf{w}_m(t))$  pour le contrôleur séquentiel  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  résulte en l'apparition des TCC qui ont un double impact sur la dynamique du système bouclé. Le premier consiste en une contribution de type perturbation externe induite par les variations du signal de séquençement exogène  $\mathbf{w}_m$ . Cette contribution correspond à la partie en bleu sur le schéma bloc de la Fig. 3.6. La nature exogène de cette perturbation n'a alors pas d'impact sur le positionnement des pôles du système en boucle fermée et n'est donc pas de nature à modifier les propriétés de stabilité locale du système non linéaire en boucle fermée. Ce n'est pas le cas de la seconde contribution des TCC dont l'impact est illustré par la partie en rouge sur le schéma bloc de la Fig. 3.6. En effet, la contribution des TCC est ici liée à la variation du paramètre de séquençement en fonction du signal endogène  $\mathbf{y}$ . Il introduit dès lors un bouclage interne qui impacte la position des pôles du système linéarisé en boucle fermée et modifie donc les propriétés de stabilité locale du système non linéaire en boucle



fermée (confère les deux exemples de la Sous-Section 3.2.1). Il s'agit donc d'intégrer ou de contrer l'impact des TCC lors de la synthèse du contrôleur séquencé.

### 3.3 Solutions développées dans la littérature

L'objectif de cette sous-section est de passer en revue les méthodes reportées dans la littérature permettant de traiter la problématique des TCC au niveau du design du contrôleur séquencé.

#### 3.3.1 Structure de contrôleur séquencé s'affranchissant des termes de couplage cachés

La première approche consiste à chercher une architecture de contrôle qui permet de garantir l'annulation des TCC (Lawrence and Rugh, 1993; Rugh and Shamma, 2000; Lawrence, 2001a). Pour les contrôleurs séquencés  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  et  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$  donnés respectivement par (3.47) et (3.52), il s'agit donc, au vu de la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  donnée par (3.46), d'assurer que :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}}^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{0}_{n_c \times p}, \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{0}_{m \times p}, \quad (3.53)$$

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \mathbf{B}_{\boldsymbol{\theta}}^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{0}_{n_c \times q_2}, \quad \mathbf{D}_{\boldsymbol{\theta}}^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{0}_{m \times q_2}. \quad (3.54)$$

La condition (3.53) vise à prévenir l'apparition d'un bouclage interne non désiré lié au séquençement par des variables endogènes, tandis que (3.54) vise à annuler l'effet de perturbations externes causées par les variables de séquençement exogènes. De par leur nature différente, la satisfaction de la contrainte (3.53) revêt un caractère prioritaire comparativement à la contrainte (3.54). Les contraintes (3.53) et (3.54) imposent des contraintes structurelles pour les architectures des contrôleurs séquencés  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  et  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$ . Si l'on considère à titre d'exemple le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$ , la contrainte (3.53) revient à imposer<sup>5</sup> que pour tout  $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta$  :

$$\begin{aligned} & \left\{ \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \right\} \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{0}_{n \times p}, \\ & \left\{ \left. \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \right\} \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{0}_{m \times p}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

---

5. La satisfaction de la contrainte (3.54) donne lieu à une contrainte similaire à (3.55) dans laquelle les dérivée partielles de  $\nu$  relativement à  $\mathbf{y}$  sont remplacées par les dérivée partielles de  $\nu$  relativement à  $\mathbf{w}_m$ .

Les conditions d'équilibre étant fixées par le système à commander  $\mathcal{S}$ , les degrés de liberté afin de satisfaire la contrainte précédente sont donc 1) le choix du séquençement  $\nu$  et 2) la structure des matrices impliquées dans la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ , ainsi que leur dépendance vis-à-vis du paramètre de séquençement  $\theta$ . Il est à noter que dans le cadre du contrôleur séquençé  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$ , les contraintes (3.53) et (3.54) impliquent uniquement les matrices  $\mathbf{B}_r^c$ ,  $\mathbf{B}_y^c$ ,  $\mathbf{D}_r^c$  et  $\mathbf{D}_y^c$  issues du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  (3.40). Ce constat ne s'applique pas dans le cas de l'architecture de contrôleur séquençé  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$  pour laquelle les TCC donnés par (3.52) impliquent l'ensemble des matrices de la représentation d'état du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$ .

Les conditions (3.53) et (3.54) s'avèrent très restrictives, imposant de sévères contraintes sur la structure des matrices impliquées dans le contrôleur séquençé. Plusieurs degrés de liberté du contrôleur doivent être fixés, généralement au détriment des critères de stabilité et de performance. De plus, la satisfaction de ces conditions d'annulation des TCC va à l'encontre des méthodes traditionnelles de synthèse de contrôleurs séquençés. En effet, la satisfaction des conditions (3.53) et (3.54) nécessite, dès la phase de synthèse des gains, d'anticiper ce que seront les TCC une fois le contrôleur séquençé obtenu de manière à identifier correctement les contraintes structurelles sous-jacentes visant à leur annulation. Ces contraintes structurelles devront alors être intégrées dans le design dès la phase de synthèse point à point.

Une solution alternative consiste à annuler les TCC lors de l'implémentation de (3.40) grâce l'architecture suivante (Rugh and Shamma, 2000) :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},3} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta)[\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{c,e}(\theta)] + \mathbf{A}_i^c(\theta)[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i,e}(\theta)] \\ \quad + \mathbf{B}_r^c(\theta)[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\theta)] + \mathbf{B}_y^c(\theta)[\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\theta)] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e(\theta) + \mathbf{C}_c^c(\theta)[\mathbf{x}_c - \mathbf{x}_{c,e}(\theta)] + \mathbf{C}_i^c(\theta)[\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{i,e}(\theta)] \\ \quad + \mathbf{D}_r^c(\theta)[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\theta)] + \mathbf{D}_y^c(\theta)[\mathbf{y} - \mathbf{y}_e(\theta)] \\ \theta = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (3.56)$$

où  $\mathbf{x}_{c,e} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{n_c}$  et  $\mathbf{x}_{i,e} : \Theta \rightarrow \mathbb{R}^{p_1}$  sont deux fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  dont le choix est dicté par la volonté de prévenir l'apparition des TCC. La notation de ces fonctions tire son origine du fait que pour tout point d'opération  $\theta_e \in \Theta$ ,  $\mathbf{x}_{c,e}(\theta_e)$  et  $\mathbf{x}_{i,e}(\theta_e)$  coïncident, sous l'hypothèse que  $\mathbf{E}(\theta_e)$  est de colonne rang plein, avec les conditions d'équilibre du vecteur d'état du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{seq},3}$  (au point d'opération  $\theta_e$ ) lorsque ce dernier est placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}$ . Il est à noter que  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  est un cas particulier de  $\mathcal{C}_{\text{seq},3}$ , obtenu lorsque l'on impose  $\mathbf{x}_{c,e} \equiv \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_{i,e} \equiv \mathbf{0}$ . La linéarisation de la dynamique du contrôleur séquençé (3.56) au point d'opération  $\theta_e$  résulte une nouvelle fois en la dynamique  $\mathcal{C}_{\text{seq},l}(\theta_e)$

donnée par (3.46) mais dont les TCC prennent cette fois la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_\theta^c(\theta_e) &= -\mathbf{A}_c^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{c,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{A}_i^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{i,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{B}_r^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{B}_y^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e}, \\ \mathbf{D}_\theta^c(\theta_e) &= \left. \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{C}_c^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{c,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{C}_i^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{i,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{D}_r^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e} - \mathbf{D}_y^c(\theta_e) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\theta_e}. \end{aligned} \quad (3.57)$$

L'introduction des fonctions  $x_{c,e}$  et  $x_{i,e}$  fait apparaître dans l'expression des TCC deux termes supplémentaires par rapport aux TCC résultant du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{seq},1}$  donnés par (3.47). De manière à garantir l'annulation de ces TCC, les contraintes (3.53) et (3.54) doivent alors être satisfaites. En particulier, la condition (3.53) est équivalente à la contrainte<sup>6</sup> que pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,

$$\begin{aligned} &\left\{ \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{c,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{i,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \right\} \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{0}, \\ &\left\{ \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{c,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{x}_{i,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} - \left. \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \right\} \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (3.58)$$

En comparant les contraintes (3.55) et (3.58), l'introduction des fonctions  $\mathbf{x}_{c,e}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}$  permet de donner plus de degrés de liberté lors de l'implémentation du contrôleur séquencé. Alors que la condition (3.55) fait porter des contraintes uniquement sur l'architecture des matrices de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ , une partie de ces contraintes peut dans le cas du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{seq},3}$  être transférée sur le choix des fonctions  $\mathbf{x}_{c,e}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}$ . Dans une configuration idéale, on peut alors envisager d'effectuer la synthèse de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  indépendamment de la problématique des TCC, et de n'intégrer cette problématique que dans la phase d'implémentation de  $\mathcal{C}_l$  via le recours au contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},3}$  dont les composantes  $\mathbf{x}_{c,e}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}$  (ainsi qu'éventuellement le séquencement  $\nu$ ) sont déterminées de manière à satisfaire les contraintes (3.58). Cependant, il n'existe pas de garantie quant à l'existence de fonctions  $\mathbf{x}_{c,e}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}$  solutions de (3.58) pour une famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  donnée *a priori*. Il faut donc en général recourir à une solution intermédiaire où la contrainte (3.58) est satisfaite à la fois par le choix des fonctions  $\mathbf{x}_{c,e}$  et  $\mathbf{x}_{i,e}$ , ainsi que par la restriction de certains degrés de liberté dans la structure des matrices des contrôleurs LTI.

Remarquons pour conclure que dans le cas courant où le nombre de composantes intégrales

---

6. La satisfaction de la contrainte (3.54) donne lieu à une contrainte similaire à (3.58) dans laquelle les dérivée partielles de  $\nu$  relativement à  $\mathbf{y}$  sont remplacées par les dérivée partielles de  $\nu$  relativement à  $\mathbf{w}_m$ .

coïncide avec le nombre d'entrées du système, i.e.,  $p_1 = m$ , et sous l'hypothèse habituelle que la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})$  est de colonne rang plein pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , la condition (3.58) se simplifie en se réduisant pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  à :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{x}_{c,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} \\ \frac{\partial \mathbf{x}_{i,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta})} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^{-1} \begin{bmatrix} - \left\{ \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} \right\} \\ \left\{ \frac{\partial \mathbf{u}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{y}_{1,e}}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} - \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \mathbf{y}_e}{\partial \boldsymbol{\theta}} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} \right\} \end{bmatrix} \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta})}. \quad (3.59)$$

Cette approche dans la gestion des TCC a notamment été employée pour la commande de la dynamique en tangage d'un missile (Nichols et al., 1993) ou le système dit du *ball and beam* (Ignatov and Lawrence, 2001; Lawrence, 2001b; Lawrence and Szaier, 2004; Wu et al., 2016).

### 3.3.2 Dynamical Gain Scheduling

La méthode du DGS consiste à effectuer une synthèse point à point classique sans se soucier des TCC puis à intégrer l'impact de ces derniers au niveau de la recherche d'un contrôleur séquencé (Yang et al., 2010, 2015). On ne cherche donc pas à imposer *a priori* de contrainte sur l'architecture des contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  mais de faire directement peser l'ensemble des contraintes sur le choix de l'architecture du contrôleur séquencé. Pour illustrer le concept, considérons à nouveau la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  dont l'architecture est donnée par (3.40). On cherche alors à implémenter cette dernière via le recours à un contrôleur séquencé du type :

$$\mathcal{C}_{\text{seq},4} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r} + \mathbf{B}_y^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{r} + \mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (3.60)$$

où les matrices  $\mathbf{A}_c^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times n_c}$ ,  $\mathbf{A}_i^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times p_1}$ ,  $\dots$ ,  $\mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont à spécifier de manière à garantir pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  1) l'existence et l'unicité d'un point d'équilibre pour le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},4}$  lorsque placé en boucle fermée avec  $\mathcal{S}$ ; 2) la dynamique linéarisée du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{seq},4}$  coïncide avec  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  donnée par (3.40). En procédant de manière analogue aux développements menés lors de l'étude du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{seq},2}$ , on montre que cela revient à imposer  $\mathbf{A}_c^* = \mathbf{A}_c^c$ ,  $\mathbf{A}_i^* = \mathbf{A}_i^c$ ,  $\mathbf{B}_r^* = \mathbf{B}_r^c$ ,  $\mathbf{C}_c^* = \mathbf{C}_c^c$ ,  $\mathbf{C}_i^* = \mathbf{C}_i^c$ ,  $\mathbf{D}_r^* = \mathbf{B}_r^c$ , et que les matrices  $\mathbf{B}_y^*(\boldsymbol{\theta})$  et  $\mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta})$  doivent satisfaire les contraintes

suivantes :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \mathbf{B}_y^*(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}_\theta^*(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{D}_\theta^*(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.61)$$

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \mathbf{B}_y^*(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{B}_\theta^*(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{0}_{n_c \times q_2}, \quad \mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{D}_\theta^*(\boldsymbol{\theta}) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} = \mathbf{0}_{m \times q_2}. \quad (3.62)$$

Les  $l$ -ième colonnes de  $\mathbf{B}_\theta^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{n_c \times s}$  et  $\mathbf{D}_\theta^*(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times s}$  s'expriment respectivement en fonction des fonctions dérivées partielles de  $\mathbf{B}_y^*(\boldsymbol{\theta})$  et  $\mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta})$  par rapport à  $\boldsymbol{\theta}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}_{\theta,l}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{A}_c^c}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}_i^c}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}_r^c}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}) + \left. \frac{\partial \mathbf{B}_y^*}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}), \\ \mathbf{D}_{\theta,l}^*(\boldsymbol{\theta}) &= \left. \frac{\partial \mathbf{C}_c^c}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}) + \left. \frac{\partial \mathbf{C}_i^c}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}) + \left. \frac{\partial \mathbf{D}_r^c}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}) + \left. \frac{\partial \mathbf{D}_y^*}{\partial \theta_l} \right|_{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned} \quad (3.63)$$

où, sous couvert que  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est de colonne rang plein et que (3.51) est satisfaite, les  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta})$  et  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta})$  sont donnés par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\theta})^\dagger \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{B}_y^*(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{D}_y^*(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}. \quad (3.64)$$

La condition (3.61) est liée à la partie endogène du séquençement et vise à contrer l'introduction d'une boucle interne cachée. *A contrario*, la condition (3.62) vise à supprimer l'effet de la perturbation externe introduit par la nature temps variant du signal de séquençement exogène  $\mathbf{w}_m$ . Les contraintes ainsi obtenues conduisent à un système d'EDP couplées en  $\mathbf{B}_y^*$  et  $\mathbf{D}_y^*$ . Comme précédemment, il n'existe pas de garantie *a priori* qu'un tel système de contraintes admette une solution. Comme exemples d'applications reportés dans la littérature, citons la commande de l'avion de combat américain F-16 (Yang et al., 2012) et la commande d'une aile volante (Jones et al., 2006).

### 3.3.3 Bilan des méthodes proposées dans la littérature

La comparaison des contraintes (3.53-3.54) avec (3.61-3.62) fait clairement apparaître la différence d'approche entre les deux méthodes proposées dans la littérature pour gérer les TCC. La première méthode consiste à choisir une architecture annulant les TCC. Au contraire, la seconde tire profit de leur apparition afin de les contraindre. Les deux méthodes mènent cependant à des contraintes formulées sous la forme de systèmes d'EDP couplées à résoudre. Il n'existe pas *a priori* de garantie d'existence d'une solution pour un tel jeu de contraintes

pour tout système à commander  $\mathcal{S}$  et pour une structure de contrôleur LTI arbitraire. Qui plus est, même en cas d'existence, la mise en œuvre pratique de telles méthodes peut s'avérer difficile. Premièrement, les solutions peuvent être complexes, rendant leur implémentation temps réel difficile. Secondement, la grande majorité des systèmes présentent des incertitudes paramétriques. Or, les contraintes (3.53-3.54) et (3.61-3.62) sont formulées pour le modèle nominal du système. En présence d'incertitudes paramétriques, les conditions d'équilibre impliquées dans ces contraintes sont alors fonction de la configuration incertaine, ce qui n'est pas le cas des gains du contrôleur. Ainsi, en règle générale, les contraintes (3.53-3.54) et (3.61-3.62) ne pourront être vérifiées que sur le seul modèle nominal mais pas sur le domaine de variation des paramètres incertains. Des TCC sont donc sujet à émerger dès lors que la configuration incertaine ne coïncide pas avec la configuration nominale. Cette problématique sera plus amplement abordée dans la Sous-Section 4.1.3.

### 3.4 Motivation pour le recours à des méthodes d'autoséquencement

Les solutions développées dans le Chapitre 4 tireront profit de méthodes d'autoséquencement. L'avantage essentiel de ces méthodes réside dans le fait qu'un choix *a priori* des formules de séquencement rend possible un calcul *a priori* des dérivées partielles des gains séquencés (cf. (3.52)), permettant leur inclusion directe dans le processus de synthèse. De la sorte, on évite la nécessité de devoir résoudre de manière explicite des systèmes d'EDP. Dans cette section, nous allons montrer comment les solutions présentées précédemment peuvent venir légitimer le recours à de telles méthodes d'autoséquencement.

#### 3.4.1 Critères de stabilité/performance

Dans cette section, on se fixe  $\Theta \subset \mathbb{R}^s$  un ensemble compact et connexe par arc<sup>7</sup>, ainsi que  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$  un ensemble ouvert et connexe par arc. Pour ces deux ensembles, on définit la notion de critère de performance comme suit.

**Définition 3.1** *Soit une fonction continue  $f_p : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ . On dit qu'un paramètre  $\kappa \in \mathcal{K}$  satisfait le critère de performance  $f_p$  au point d'opération  $\theta \in \Theta$  si l'inégalité  $f_p(\theta, \kappa) < 0$  est vérifiée.*

---

7. L'hypothèse de connexité par arc n'est pas essentielle dans les développements présentés ici. Elle vise simplement à contraindre le domaine d'opération à être en "un seul morceau" en garantissant que l'on puisse joindre deux points d'opération quelconques par un chemin continu demeurant au sein du domaine d'opération.

Dans le cadre du contrôle par séquençement de gain,  $\boldsymbol{\theta}$  représente le point d'opération du système évoluant dans le domaine d'opération  $\Theta$  et  $\boldsymbol{\kappa}$  un choix particulier des paramètres du contrôleur dans l'ensemble des valeurs admissibles de  $\mathcal{K}$ . Dans ce contexte, considérons pour  $n, m, p \in \mathbb{N}^*$  fixés les fonctions matricielles  $\mathbf{A} : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times n}$ ,  $\mathbf{D} : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}^{p \times m}$ . Une liste non exhaustive de critères de performance au sens de la Définition 3.1 pour le modèle d'état  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}))$  dont la fonction de transfert est donnée par

$$G[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}](s) \triangleq \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) [s\mathbf{I} - \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})]^{-1} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) + \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) \quad (3.65)$$

est proposée ci-dessous.

- **Stabilité Hurwitz** si et seulement si  $f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$  avec <sup>8</sup>

$$f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \max \{ \mathcal{R}e(\lambda), \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) \}. \quad (3.66)$$

- **Taux de croissance exponentiel** au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}$  strictement inférieur à  $\alpha(\boldsymbol{\theta})$  où  $\alpha \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  si et seulement si  $f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$  avec

$$f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \max \{ \mathcal{R}e(\lambda), \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) \} - \alpha(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.67)$$

- **Amortissement des pôles** au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}$  strictement supérieur à  $\xi(\boldsymbol{\theta})$  où  $\xi \in \mathcal{C}^0(\Theta; [0, 1])$  si et seulement si  $f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$  avec

$$f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \max \left\{ \mathcal{R}e \left( \lambda \cdot \exp \left[ i(\pi/2 - \cos^{-1}(\xi(\boldsymbol{\theta}))) \right] \right), \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) \right\}. \quad (3.68)$$

- **Gain  $H_{\infty}$**  inférieur à  $\gamma(\boldsymbol{\theta})$  où  $\gamma \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R}_+)$ . Supposons que pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  et  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$ ,  $R(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) \triangleq \gamma(\boldsymbol{\theta})^2 \mathbf{I}_m - \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})^{\top} \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) \in \mathcal{G}l_m(\mathbb{R})$ . Alors,  $\|G[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}]\|_{\infty} < \gamma(\boldsymbol{\theta})$  si et seulement si  $\bar{f}_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) \triangleq \max \{ f_{p1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), f_{p2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) \} < 0$  avec (Zhou et al., 1996)

$$f_{p1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \bar{\sigma}(\mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) - \gamma(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.69a)$$

$$f_{p2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = - \min \{ |\mathcal{R}e(\lambda)|, \lambda \in \text{sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{H}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})) \}, \quad (3.69b)$$

où, en omettant la dépendance des matrices vis-à-vis de  $\boldsymbol{\theta}$  et  $\boldsymbol{\kappa}$  :

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{\top}\mathbf{C} & \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{B}^{\top} \\ -\mathbf{C}^{\top}(\mathbf{I}_p + \mathbf{D}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{\top})\mathbf{C} & -(\mathbf{A} + \mathbf{B}\mathbf{R}^{-1}\mathbf{D}^{\top}\mathbf{C})^{\top} \end{bmatrix}. \quad (3.70)$$

---

8. La continuité de la fonction  $f_p$  repose ici sur le fait que les racines d'un polynôme dépendent continument des coefficients du dit polynôme (Ortega, 1990).

Le critère de performance en termes de gain  $H_\infty$  est ici présenté pour le modèle d'état  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}))$  dans sa globalité. Il est néanmoins possible, en modifiant les matrices d'entrée et de sortie du modèle, de considérer certains jeux d'entrées et de sorties spécifiques d'intérêt. Il est également possible d'augmenter le modèle d'état d'origine pour tenir compte de fonctions de transfert utilisées en tant que pondération.

- **Gain**  $H_2$  inférieur à  $\gamma(\boldsymbol{\theta})$  où  $\gamma \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R}_+)$ . Supposons que pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  et  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$ ,  $\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})$  est Hurwitz, ce qui implique que  $\mathbf{G}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}] \in \mathcal{RH}_\infty^{p \times m}$ . Alors,  $\|\mathbf{G}[\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}]\|_2 < \gamma(\boldsymbol{\theta})$  si et seulement si  $f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$  avec (Zhou et al., 1996)

$$f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \sqrt{\text{Tr}[\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})L_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})^\top]} - \gamma(\boldsymbol{\theta}), \quad (3.71)$$

où  $L_c(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})$  représente le grammien de contrôlabilité. Une remarque similaire à celle présentée en conclusion de l'introduction du critère  $H_\infty$  s'applique également au critère  $H_2$ .

- **Contrainte sur le signe des composantes de  $\boldsymbol{\kappa}$** . Soit,  $k_0 \in \{1, \dots, n_k\}$  fixé. Le  $k_0$ -ième coefficient de  $\boldsymbol{\kappa}$ , noté  $\kappa_{k_0}$ , est au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}$  strictement supérieur à  $\kappa_{k_0, \text{inf}}(\boldsymbol{\theta})$  où  $\kappa_{k_0, \text{inf}} \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  si et seulement si  $f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$  avec

$$f_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \kappa_{k_0, \text{inf}}(\boldsymbol{\theta}) - \kappa_{k_0}. \quad (3.72)$$

On définit de manière analogue une contrainte sur la borne supérieure des coefficients du vecteur  $\boldsymbol{\kappa}$ .

Dans le cas de multiples critères de performance  $f_{p,1}, \dots, f_{p,k}$  devant être considérés simultanément, il est toujours possible de se ramener à la Définition 3.1 en introduisant la fonction  $\bar{f}_p$  définie par

$$\forall(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) \in \Theta \times \mathcal{K}, \quad \bar{f}_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) = \max_{i \in \{1, \dots, k\}} (f_{p,i}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa})). \quad (3.73)$$

Il est alors trivial de vérifier que  $\bar{f}_p$  est une fonction continue telle que  $\bar{f}_p(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$  si et seulement si, pour tout  $i \in \{1, \dots, k\}$ ,  $f_{p,i}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\kappa}) < 0$ . Ainsi, quitte à fusionner de la sorte les critères de performances, on considérera par la suite une unique fonction  $f_p$  comme critère de performance.

### 3.4.2 Passage d'un séquençement continu vers un séquençement polynomial

Pour un critère de performance  $f_p : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  donné, on cherche dans le cadre de la méthode du séquençement des gains à trouver une fonction  $g : \Theta \rightarrow \mathcal{K}$  continue telle que pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $f_p(\boldsymbol{\theta}, g(\boldsymbol{\theta})) < 0$ . En supposant qu'un tel séquençement existe, on s'intéresse à la possibilité d'en obtenir un dont chacune des composantes est polynomiale. Pour un vecteur



$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  on note  $\|\mathbf{x}\|_\infty \triangleq \max_{i \in \{1, \dots, n\}} |x_i|$ . Pour une fonction  $f \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{R}^m)$  avec  $X$  compact, on introduit la norme de la convergence uniforme  $\|f\|_{\infty, X} \triangleq \max_{i \in \{1, \dots, m\}} \max_{x \in X} |f_i(x)|$  où  $f_1, \dots, f_m \in \mathcal{C}^0(X; \mathbb{R})$  représentent les  $m$  composantes de  $f$ .

**Lemme 3.2** *Soient  $\Theta \subset \mathbb{R}^s$  un compact et  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$  un ouvert. Soient  $f_p : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \Theta \rightarrow \mathcal{K}$  deux fonctions continues telles que  $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, f_p(\boldsymbol{\theta}, g(\boldsymbol{\theta})) < 0$ . On a alors le résultat suivant :*

$$\exists \eta > 0 / \forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \forall \mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_k}, \|\mathbf{p}\|_\infty < \eta \Rightarrow g(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{p} \in \mathcal{K}, f_p(\boldsymbol{\theta}, g(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{p}) < 0. \quad (3.74)$$

**Démonstration :** Puisque  $g$  est continue et définie sur  $\Theta$  compact,  $g(\Theta)$  est compact. Or  $g(\Theta) \subset \mathcal{K}$  avec  $\mathcal{K}$  ouvert de  $\mathbb{R}^{n_k}$ . Donc  $\mathcal{K}^c = \mathbb{R}^{n_k} \setminus \mathcal{K}$  est un fermé tel que  $g(\Theta) \cap \mathcal{K}^c = \emptyset$ . On en déduit donc que  $d(g(\Theta), \mathcal{K}^c) \triangleq \inf \{\|g(\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{x}\|_\infty : \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \mathbf{x} \in \mathcal{K}^c\} > 0$ . Dès lors, pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  et  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_k}$ ,  $\|\mathbf{p}\|_\infty < d(g(\Theta), \mathcal{K}^c) \Rightarrow g(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{p} \in \mathcal{K}$ . Supposons à présent que la propriété à démontrer n'est pas vérifiée. On peut alors construire deux suites  $(\boldsymbol{\theta}_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \Theta^\mathbb{N}$  et  $(\mathbf{p}_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in \mathcal{K}^\mathbb{N}$  telles que pour tout  $n \geq 1$ ,  $\|\mathbf{p}_n\|_\infty < d(g(\Theta), \mathcal{K}^c)/n$  et  $f_p(\boldsymbol{\theta}_n, g(\boldsymbol{\theta}_n) + \mathbf{p}_n) \geq 0$ . Puisque  $\Theta$  est compact, on peut, quitte à extraire une sous suite convergente, supposer qu'il existe  $\boldsymbol{\theta}_l \in \Theta$  tel que  $\boldsymbol{\theta}_n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \boldsymbol{\theta}_l$ . Par continuité de  $f$  et  $g$ , avec  $\|\mathbf{p}_n\|_\infty < d(g(\Theta), \mathcal{K}^c)/n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , on en déduit que  $f_p(\boldsymbol{\theta}_l, g(\boldsymbol{\theta}_l)) \geq 0$ , aboutissant ainsi à une contradiction.  $\square$

**Corollaire 3.3** *En reprenant l'énoncé du Lemme 3.2, si l'on suppose de plus qu'il existe une suite de fonctions  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément sur  $\Theta$  vers la fonction  $g$ , alors il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$ , et pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $f_p(\boldsymbol{\theta}, g_n(\boldsymbol{\theta})) < 0$ .*

**Démonstration.** On fixe une valeur de  $\eta$  telle que fournie par le Lemme 3.2. Par convergence uniforme de  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $g$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $n \geq N$  et tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $|g_n(\boldsymbol{\theta}) - g(\boldsymbol{\theta})| < \eta$ . La conclusion provient alors de l'application du Lemme 3.2.  $\square$

**Lemme 3.4** *Soient  $\Theta \subset \mathbb{R}^s$  un compact et  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$  un ouvert. Soient  $f_p : \Theta \times \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \Theta \rightarrow \mathcal{K}$  deux fonctions continues telles que  $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, f_p(\boldsymbol{\theta}, g(\boldsymbol{\theta})) < 0$ . Il existe alors une fonction  $h : \Theta \rightarrow \mathcal{K}$  dont les composantes  $h_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  sont polynomiales qui vérifie  $\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, f_p(\boldsymbol{\theta}, h(\boldsymbol{\theta})) < 0$ .*

**Démonstration.** On fixe une valeur de  $\eta$  telle que fournie par le Lemme 3.2. Ainsi pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  et tout  $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n_k}$  tel que  $\|\mathbf{p}\|_\infty < \eta$ ,  $g(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{p} \in \mathcal{K}$  et  $f_p(\boldsymbol{\theta}, g(\boldsymbol{\theta}) + \mathbf{p}) < 0$ . On introduit les notations  $g = \begin{bmatrix} g_1 & \dots & g_{n_k} \end{bmatrix}^\top$  où par définition  $g_i \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$ . L'ensemble

$\Theta$  étant compact, il existe par le théorème de Stone-Weierstrass<sup>9</sup> une fonction polynomiale  $h_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  telle que  $\|g_i - h_i\|_{\infty, \Theta} < \eta$ . Ainsi, en posant  $h = [h_1 \ \dots \ h_{n_k}]^\top$ ,  $h : \Theta \rightarrow \mathcal{K}$  est une fonction telle que  $\|g - h\|_{\infty, \Theta} < \eta$ . On en déduit que pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $f_p(\theta, h(\theta)) = f_p(\theta, g(\theta) + (h(\theta) - g(\theta))) < 0$ .  $\square$

Le Lemme 3.4 assure donc qu'en cas d'existence d'un séquençement continu vérifiant un critère de performance  $f_p$  donné, il est possible de construire un séquençement polynomial satisfaisant le même critère  $f_p$ .

### 3.4.3 Problème de retour de sortie avec composante intégrale en présence de termes de couplages cachés

#### 3.4.3.1 Position du problème

Considérons le système  $\mathcal{S}$  donné par (3.31) dans le cas d'une entrée  $u$  scalaire (l'extension des résultats obtenus au cas du contrôle des systèmes multi-entrées sera discutée en fin de la Sous-Section 3.4.4). On suppose que le domaine d'opération associé peut être ramené à l'hypercube  $\Theta = [-1, 1]^s$ . On considère la famille de contrôleurs LTI par retour de sortie donnée pour  $\theta_e \in \Theta$  par :

$$\begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y_{k_0} \\ \delta u = K_i^*(\theta_e) \delta x_i + \sum_{j=1}^p K_j^*(\theta_e) \delta y_j \end{cases} \quad (3.75)$$

où  $\mathbf{y} = [y_1 \ \dots \ y_p]^\top$  et  $k_0 \in \{1, \dots, p\}$  est un entier tel que la sortie  $y_{k_0}(t)$  doive suivre le signal de référence  $r(t) \in \mathbb{R}$ . On suppose que les  $p+1$  gains séquencés ont été préalablement synthétisés et qu'ils sont donnés par des fonctions  $K_i^*, K_1^*, \dots, K_p^* \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  assurant la stabilité et les performances du système en boucle fermée, i.e., tels que pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $f_p(\theta, \kappa^*(\theta)) < 0$  avec  $\kappa^* = [K_i^* \ K_1^* \ \dots \ K_p^*]^\top \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R}^{p+1})$ . On suppose de plus que  $K_i^*$  ne s'annule pas sur  $\Theta$ .

Sous ces hypothèses on peut, quitte à substituer les gains précédents sur la base du Lemme 3.4, les supposer polynomiaux et donc de classe  $\mathcal{C}^\infty$ . De plus, de manière à conserver via ce procédé l'hypothèse que le gain intégral ne s'annule pas sur  $\Theta$ , il suffit d'augmenter le critère de performance  $f_p$  avec une contrainte sur le signe des gains du type (3.72). Ainsi, on suppose pour la suite que les fonctions  $K_i^*, K_1^*, \dots, K_p^* \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathcal{K}) \cap \mathcal{C}^\infty(\Theta; \mathbb{R}^{n_k})$  sont polynomiales avec  $K_i^*$  ne s'annulant pas.

---

9. Le théorème de Stone-Weierstrass assure que l'ensemble fonctions polynomiales définies sur un compact  $X$  est dense dans l'espace des fonctions de classe  $\mathcal{C}^0(X, \mathbb{R})$  muni de la norme uniforme (Rudin, 1991).

L'objectif est de réaliser un séquençement des gains de la famille de contrôleurs (3.75) lorsqu'un signal endogène scalaire est utilisé comme paramètre de séquençement. Sans perte de généralité, on suppose que le contrôleur est séquençé avec  $y_1(t) \in \mathbb{R}$ . On cherche alors à trouver un contrôleur séquençé par retour de sortie sous la forme :

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_i = r - y_{k_0} \\ u = K_i(\boldsymbol{\theta})x_i + \sum_{j=1}^p K_j(\boldsymbol{\theta})y_j \\ \boldsymbol{\theta} = (y_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (3.76)$$

où  $K_i, K_1, \dots, K_p \in \mathcal{C}^1(\Theta, \mathbb{R})$  et avec un gain intégral  $K_i$  ne s'annulant pas<sup>10</sup>. On a également  $y_1 \in [-1, 1]$  et  $\mathbf{w}_m \in \Theta_w \triangleq [-1, 1]^{q_2}$ . L'objectif est de déterminer des fonctions  $K_i, K_1, \dots, K_p$  de telle sorte à ce que la linéarisation de la dynamique du contrôleur séquençé  $\mathcal{C}$  (3.76) coïncide avec la famille de contrôleurs (3.75).

### 3.4.3.2 Résolution du problème

Pour résoudre ce problème, l'approche adoptée consiste à recourir à la méthode du DGS telle qu'exposée dans la Sous-Section 3.3. Pour cela, on caractérise dans un premier temps l'équilibre du contrôleur séquençé  $\mathcal{C}$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  par  $y_{k,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = r_e$  et

$$x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left[ u_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \sum_{j=1}^p K_j(\boldsymbol{\theta}_e)y_{j,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \right]. \quad (3.77)$$

La linéarisation du contrôleur séquençé  $\mathcal{C}$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  donne alors lieu à la dynamique suivante<sup>11</sup> :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y_{k_0} \\ \delta u = K_i(\boldsymbol{\theta}_e)\delta x_i + [K_1(\boldsymbol{\theta}_e) + K_1^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e)]\delta y_1 + \sum_{j=2}^p K_j(\boldsymbol{\theta}_e)\delta y_j \\ \boldsymbol{\theta}_e = (y_{1,e}, \mathbf{w}_e) \end{cases} \quad (3.78)$$

---

10. Permet de garantir l'unicité de la condition d'équilibre de la composante intégrale  $x_i$

11. On considère ici uniquement la contribution du TCC lié à la variable endogène  $y_1$ .

avec

$$\begin{aligned} K_1^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e) &= \frac{\partial K_i}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}_e} x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \sum_{j=1}^p \frac{\partial K_j}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}_e} y_{j,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ &= y_{1,e} \frac{\partial K_1}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \alpha(\boldsymbol{\theta}_e) y_{1,e} K_1(\boldsymbol{\theta}_e) + \phi(\boldsymbol{\theta}_e), \end{aligned} \quad (3.79)$$

où pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,

$$\alpha(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial K_i}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}}, \quad (3.80a)$$

$$\phi(\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial K_i}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} u_e(\boldsymbol{\theta}) - \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial K_i}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} \sum_{j=2}^p K_j(\boldsymbol{\theta}) y_{j,e}(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=2}^p \frac{\partial K_j}{\partial y_1} \Big|_{\boldsymbol{\theta}} y_{j,e}(\boldsymbol{\theta}). \quad (3.80b)$$

On suppose pour la suite que  $u_e, y_{2,e}, \dots, y_{p,e} \in \mathcal{C}^1(\Theta; \mathbb{R})$ , donnant lieu à la régularité  $\alpha, \phi \in \mathcal{C}^1(\Theta; \mathbb{R})$ . En tenant compte de l'impact des TCC, le critère de performance est donné par :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad f_p \left( \boldsymbol{\theta}, \begin{bmatrix} K_i(\boldsymbol{\theta}) & K_1(\boldsymbol{\theta}) + K_1^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}) & K_2(\boldsymbol{\theta}) & \dots & K_p(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}^\top \right) < 0. \quad (3.81)$$

Sur la base de la famille de contrôleurs séquencé point-à-point (3.75), on choisit d'opter pour les gains séquencés :  $K_i = K_i^*$  et pour  $j \in \{2, \dots, p\}$ ,  $K_j = K_j^*$ . Il ne reste ainsi plus qu'à trouver un gain séquencé  $K_1$  permettant de rencontrer le critère de performance. Pour cela, comme proposé dans le cadre du DGS, on cherche un gain séquencé  $K_1$  tel que  $K_1 + K_1^{\text{TCC}} = K_1^*$  où  $K_1^{\text{TCC}}$  est donné par (3.79). En introduisant  $f(y_1, w) \triangleq K_1(\boldsymbol{\theta})$ , on cherche donc à résoudre l'équation différentielle suivante :

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} + [1 - \alpha(y_1, \mathbf{w}_m) y_1] f(y_1, \mathbf{w}_m) = \psi(y_1, \mathbf{w}_m), \quad (3.82)$$

où  $\psi = K_1^* - \phi \in \mathcal{C}^1(\Theta; \mathbb{R})$ . Un calcul direct montre que la fonction  $f$  définie par

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w), \quad f(y_1, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{y_1} K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi, \quad (3.83)$$

vérifie l'équation (3.82) sur  $\Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w)$ . De plus, il est montré en Annexe A que  $f$  définie par (3.83) peut être prolongée par continuité en  $y_1 = 0$  par  $f(0, \mathbf{w}_0) = \psi(0, \mathbf{w}_0)$ . On obtient alors une fonction  $f \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  qui 1) admet une dérivée partielle  $\partial f / \partial y_1 \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  et 2) vérifie (3.82) sur  $\Theta$ . En prenant  $K_1 = f$ , le problème de l'implémentation du contrôleur séquencé est ainsi résolu.

### 3.4.4 De l'approximation polynomiale vers l'autoséquence

L'approche DGS a permis pour l'architecture de contrôle (3.76) de tenir compte de l'impact des TCC liés au séquençement endogène lors du choix des gains du contrôleur séquencé. De plus, les gains  $K_i, K_2, \dots, K_p$  ont été obtenus sous forme polynomiale. Cependant, tel n'est pas le cas du gain séquencé  $K_1$  dont la structure est relativement complexe. On montre dans cette sous-section comment il est possible d'obtenir un gain  $K_1$  sous forme polynomiale tout en préservant le critère de performance  $f_p$ .

Puisque  $\partial f / \partial y_1 \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  avec  $\Theta$  compact, il existe par application du théorème de Stone-Weierstrass une suite de fonctions polynomiales  $(g_n^d : \Theta \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément sur  $\Theta$  vers  $\partial f / \partial y_1$ . De même, puisque  $f(0, \cdot) \in \mathcal{C}^0(\Theta_w; \mathbb{R})$ , il existe une suite de fonctions polynomiales  $(g_n^0 : \Theta_w \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge uniformément sur  $\Theta_w$  vers  $f(0, \cdot)$ . On introduit pour tout  $n \in \mathbb{N}$  la fonction polynomiale  $g_n : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  définie par

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta, g_n(y_1, \mathbf{w}_m) = g_n^0(\mathbf{w}_m) + \int_0^{y_1} g_n^d(\xi, \mathbf{w}_m) d\xi. \quad (3.84)$$

Puisque  $\partial f / \partial y_1 \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$ , on a que

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta, f(y_1, \mathbf{w}_m) = f(0, \mathbf{w}_m) + \int_0^{y_1} \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi. \quad (3.85)$$

Ainsi, en notant que pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta$  on a  $|y_1| \leq 1$ , on obtient que

$$\|g_n - f\|_{\infty, \Theta} \leq \|g_n^0 - f(0, \cdot)\|_{\infty, \Theta_w} + \left\| g_n^d - \frac{\partial f}{\partial y_1} \right\|_{\infty, \Theta} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (3.86)$$

Ainsi  $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge uniformément vers  $f$  sur  $\Theta$ . De plus, puisque  $\partial g_n / \partial y_1 = g_n^d$ , on a également la convergence uniforme de  $(\partial g_n / \partial y_1)_{n \in \mathbb{N}}$  vers  $\partial f / \partial y_1$  sur  $\Theta$ . En se basant sur l'équation différentielle (3.82) vérifiée par la fonction  $f$ , on en déduit que la suite de fonctions  $(h_n : \Theta \rightarrow \mathbb{R})_{n \in \mathbb{N}}$  définie par

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta, h_n(y_1, \mathbf{w}_m) = y_1 \frac{\partial g_n}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} + [1 - \alpha(y_1, \mathbf{w}_m)y_1] g_n(y_1, \mathbf{w}_m) + \phi(y_1, \mathbf{w}_m) \quad (3.87)$$

converge uniformément sur  $\Theta$  vers  $K_1^*$  car :

$$\begin{aligned} \|h_n - K_1^*\|_{\infty, \Theta} &\leq \left\| \frac{\partial g_n}{\partial y_1} - \frac{\partial f}{\partial y_1} \right\|_{\infty, \Theta} + (1 + \|\alpha\|_{\infty, \Theta}) \|g_n - f\|_{\infty, \Theta} \\ &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \quad (3.88)$$

Puisque pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,

$$f_p \left( \boldsymbol{\theta}, \begin{bmatrix} K_i(\boldsymbol{\theta}) & K_1^*(\boldsymbol{\theta}) & K_2(\boldsymbol{\theta}) & \dots & K_p(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}^\top \right) < 0, \quad (3.89)$$

on déduit du Corollaire 3.3 qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,

$$f_p \left( \boldsymbol{\theta}, \begin{bmatrix} K_i(\boldsymbol{\theta}) & h_N(\boldsymbol{\theta}) & K_2(\boldsymbol{\theta}) & \dots & K_p(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}^\top \right) < 0. \quad (3.90)$$

On prend donc  $K_1 = g_N$ , aboutissant à des gains séquencés  $K_i, K_1, \dots, K_p$  polynomiaux permettant au contrôleur séquencé  $\mathcal{C}$  de satisfaire le critère de performance  $f_p$ .

Au bilan, on a donc démontré que s'il existe une famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  (3.75) dont les gains dépendent continument du point d'opération  $\boldsymbol{\theta}$  et permettent de satisfaire un critère de performance  $f_p$  donné, alors il existe un séquençement polynomial des gains du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}$  (3.76) permettant, en présence des TCC liés au séquençement endogène, de vérifier le critère de performance  $f_p$ .

Bien qu'ayant été établi pour des contrôleurs mono-sortie, ce résultat peut être directement étendu au cas du contrôleur MIMO suivant :

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_{k_0} \\ \delta \mathbf{u} = \text{diag} \left[ K_{i,1}^*(\boldsymbol{\theta}_e), \dots, K_{i,m}^*(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \delta \mathbf{x}_i + \sum_{j=1}^p \mathbf{K}_j^*(\boldsymbol{\theta}_e) \delta y_j \end{cases} \quad (3.91)$$

où  $\delta \mathbf{u}(t), \delta \mathbf{r}(t), \delta \mathbf{x}_i(t), \delta \mathbf{y}_{k_0}(t) \in \mathbb{R}^m$ . En effet, la structure diagonale de la matrice de gain intégral permet d'appliquer de manière directe le résultat précédemment établi en considérant  $m$  équations d'approximation indépendantes du type (3.88) simultanément.

Ces résultats viennent légitimer, en présence d'un séquençement endogène, la recherche d'un séquençement des gains du contrôleur sous forme de fonctions polynomiales. Bien qu'il serait possible pour une application donnée de passer au travers des étapes précédentes, les degrés des polynômes obtenus seraient en général relativement élevés dû à l'étape d'approximation. De manière à éviter cet écueil, les méthodes développées dans le Chapitre 4 tirent profit de méthodes d'autoséquencement pour des polynômes dont l'ordre est fixé *a priori*.

## CHAPITRE 4    GESTION DES TERMES DE COUPLAGE CACHÉS PAR DES MÉTHODES D'AUTOSÉQUENCEMENT

Suite à l'introduction de la problématique des TCC lors du Chapitre 3, les solutions proposées dans le cadre de cette thèse sont présentées dans ce chapitre. Les conclusions du chapitre précédent motivent le recours à un séquençement sous forme polynomiale ; nous aborderons ainsi les méthodes d'autoséquençement où l'on choisit *a priori* les fonctions de séquençement, ce qui permet d'inclure de manière explicite la problématique des TCC. D'une part, on évite ainsi d'imposer *a priori* des contraintes structurelles trop fortes sur l'architecture du contrôleur séquencé (cf. Sous-Section 3.3.1). D'autre part, il n'est plus nécessaire d'intégrer *a posteriori* l'impact des TCC via la résolution explicite d'EDP (cf. Sous-Section 3.3.2).

La première approche proposée est basée sur la synthèse  $H_\infty$  structurée. Cette approche tire profit des récents développements dans le domaine de l'optimisation non lisse et non convexe, et permet de synthétiser des contrôleurs LTI à architecture fixe satisfaisant des critères de performance de type  $H_\infty$ ,  $H_2$ , placement de pôles, etc. Ces méthodes ayant des capacités de synthèse multimodèle, i.e., de synthétiser un contrôleur LTI en considérant plusieurs modèles simultanément, elles peuvent être employées dans le cadre de la synthèse robuste ou/et l'autoséquençement de gains. Ces caractéristiques seront mises à profit dans la Section 4.1 pour effectuer la synthèse de contrôleurs séquencés en présence de TCC.

Une solution alternative à la synthèse  $H_\infty$  structurée est proposée dans la Section 4.2. L'approche développée se base sur les méthodes de placement de structure propre qui permettent d'effectuer à la fois un placement de pôles et de vecteurs propres associés. L'idée est une nouvelle fois de tirer profit des capacités d'autoséquençement de la méthode de manière à pouvoir inclure, de manière explicite, l'impact des TCC dans la synthèse.

Une dernière approche, de type itérative et pouvant se baser sur n'importe quelle méthode de synthèse de contrôleurs LTI (e.g., LQR, LMI, etc.), est proposée dans la Section 4.3.

### 4.1 Approche par la synthèse $H_\infty$ structurée

On s'attaque dans un premier temps au problème des TCC dans le cadre de la synthèse  $H_\infty$  structurée. Pour cela, on présente dans la Sous-Section 4.1.1 les fondements des méthodes  $H_\infty$  classiques et ensuite, dans la Sous-Section 4.1.2, leur extension à la problématique de contrôleurs à architecture fixée. Il est ensuite montré dans la Sous-Section 4.1.3 comment les capacités de synthèse multimodèle des méthodes  $H_\infty$  structurées permettent de procéder à

de l'autoséquence de gains en présence de TCC. Finalement, deux applications de la méthode sont développées dans la Sous-Section 4.1.4.

#### 4.1.1 Rappels sur la synthèse $H_\infty$

Cette sous-section est consacrée à des rappels sur les fondements et la mise en œuvre de la synthèse  $H_\infty$ .

##### 4.1.1.1 Fondements théoriques

Considérons un système linéaire temps invariant caractérisé par la représentation d'état minimale  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}) \in \mathbb{R}^{n \times n} \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n}$ . On suppose le système stable, i.e., que la matrice  $\mathbf{A}$  est Hurwitz. On note  $\mathcal{G} : L^2(\mathbb{R}_+) \rightarrow L^2(\mathbb{R}_+)$  l'opérateur qui à une entrée  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$  associe la sortie  $y = \mathcal{G}u$  du système donnée par

$$y(t) = \int_0^t \mathbf{C}e^{\mathbf{A}(t-\tau)}\mathbf{B}u(\tau)d\tau = (g * u)(t), \quad (4.1)$$

où  $g(t) \triangleq \mathbf{C}e^{\mathbf{A}t}\mathbf{B}$  est la réponse impulsionnelle du système et  $*$  le produit de convolution. Le produit de convolution ainsi posé est bien défini car  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$  et, puisque  $\mathbf{A}$  est Hurwitz,  $g \in L^2(\mathbb{R}_+)$ . Ainsi, l'inégalité de Hölder garantit que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|g(t - \cdot)u\|_{L^1(0,t)} \leq \|g\|_{L^2(0,t)} \|u\|_{L^2(0,t)} < \infty$ . De manière analogue, puisque  $\mathbf{A}$  Hurwitz implique que  $g \in L^1(\mathbb{R}_+)$ , on en déduit par l'inégalité de Young pour la convolution (Castillo and Rafeiro, 2016, page 294) que  $\|y\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \|g\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \infty$ , i.e.,  $y \in L^2(\mathbb{R}_+)$ .

Soit  $u \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ . De par l'application directe du théorème de Fubini-Tonelli pour  $g, u \in L^1(\mathbb{R}_+)$ , on a  $y = g * u \in L^1(\mathbb{R}_+)$ . En rappelant que la transformée de Fourier d'une fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}_+)$  est définie par

$$\forall \omega \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(\omega) = \int_{\mathbb{R}_+} f(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau, \quad (4.2)$$

les transformées de Fourier des fonctions  $u$  et  $y$  sont alors bien définies et sont notées, respectivement,  $\hat{u}$  et  $\hat{y}$ . Le recours aux théorèmes de Fubini-Tonelli et de Fubini-Lebesgue montrent alors que  $\hat{y} = \hat{g} \cdot \hat{u}$ . De plus, le théorème de Parseval-Plancherel (Stein and Weiss, 2016, Chapitre 1, Théorème 2.1) garantit que pour toute fonction  $f \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$ ,  $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R})$  et  $\|f\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|\hat{f}\|_{L^2(\mathbb{R})} / \sqrt{2\pi}$ . On obtient alors que

$$\|y\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{y}\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{g}(\omega)^* \hat{y}(\omega) d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\omega)^* \hat{g}(\omega)^* \hat{g}(\omega) \hat{u}(\omega) d\omega, \quad (4.3)$$



où pour une matrice à coefficients complexes  $M$  de dimensions quelconques,  $M^* = \overline{M}^\top$  (transposition hermitienne). En particulier, une matrice  $M$  est dite hermitienne lorsque  $M^* = M$ . Une telle matrice n'a que des valeurs propres réelles et est diagonalisable par l'intermédiaire d'une matrice de passage unitaire à coefficients complexes  $U$ , i.e., vérifiant  $U^*U = UU^* = I$ . Ainsi, pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega) \in \mathbb{C}^{p \times p}$  est une matrice hermitienne et l'on vérifie aisément que pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^p$ ,  $0 \leq \mathbf{x}^*\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega)\mathbf{x} \leq \bar{\lambda}(\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega)) \mathbf{x}^*\mathbf{x}$  où  $\bar{\lambda}(\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega))$  désigne la plus grande valeur propre de  $\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega)$ . On en déduit ainsi que

$$\begin{aligned} \|y\|_{L^2(\mathbb{R})}^2 &= \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\omega)^*\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega)\hat{u}(\omega)d\omega \\ &\leq \frac{1}{2\pi} \cdot \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\lambda}(\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega)) \cdot \int_{\mathbb{R}} \hat{u}(\omega)^*\hat{u}(\omega)d\omega \\ &\leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\lambda}(\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega)) \cdot \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

La quantité  $\sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\lambda}(\hat{g}(\omega)^*\hat{g}(\omega))$  vient donc majorer l'amplification maximale, en norme  $L^2$ , entre le signal d'entrée  $u$  et le signal de sortie  $y$ . Plus précisément, pour une matrice à coefficients complexes  $N \in \mathbb{C}^{q \times r}$ , la matrice  $N^*N$  étant hermitienne, on peut définir la *plus grande valeur singulière* de la matrice  $N$  comme étant  $\bar{\sigma}(N) \triangleq \sqrt{\bar{\lambda}(N^*N)}$ . En particulier,  $\bar{\sigma}$  coïncide avec la norme matricielle induite par la norme-2 usuelle. En d'autres termes,

$$\forall N \in \mathbb{C}^{q \times r}, \quad \bar{\sigma}(N) = \sup_{\mathbf{x} \in \mathbb{C}^q \setminus \{0\}} \frac{\|N\mathbf{x}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2}. \quad (4.5)$$

Avec cette notation, on en déduit que

$$\forall u \in L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+), \quad y = \mathcal{G}u \Rightarrow \|y\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\hat{g}(\omega)) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (4.6)$$

On cherche à présent à étendre l'inégalité (4.6) à toute fonction  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$ . Pour cela on recourt à un argument de densité en notant que  $L^1(\mathbb{R}_+) \cap L^2(\mathbb{R}_+)$  est un sous-ensemble dense de  $L^2(\mathbb{R}_+)$  muni de la norme  $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}_+)}$  usuelle. Pour  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$  fixé, on pose pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = 1_{[0,n]} \cdot u$ . On vérifie alors que  $u_n \in L^2(\mathbb{R}_+)$  puisque  $\|u_n\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \infty$  et que  $u_n \in L^1(\mathbb{R}_+)$  car, par l'inégalité de Cauchy-Schwartz,  $\|u_n\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \leq \sqrt{n} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} < \infty$ . De plus, puisque  $|u_n - u|^2 \leq 4|u|^2$ ,  $u \in L^2(\mathbb{R}_+)$  et  $|u_n - u|$  converge simplement vers 0, le théorème de convergence dominée garantit que  $\|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Dès lors, en posant  $y_n = \mathcal{G}u_n = h * u_n$  et  $y = \mathcal{G}u = h * u$ , l'inégalité de Young pour la convolution montre que pour tout  $n \geq 0$ ,

$$\|y_n - y\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} = \|h * (u_n - u)\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R}_+)} \|u_n - u\|_{L^2(\mathbb{R}_+)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (4.7)$$

Ainsi, en appliquant l'inégalité (4.6) à  $u_n \in L^2(\mathbb{R}_+)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et en passant à la limite lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , on obtient, en notant que  $g$  est indépendant de  $n$ ,

$$\forall u \in L^2(\mathbb{R}_+), \quad y = \mathcal{G}u \Rightarrow \|y\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\hat{g}(\omega)) \|u\|_{L^2(\mathbb{R})}. \quad (4.8)$$

Il est possible de montrer que la constante obtenue dans l'inégalité (4.8) est la meilleure possible. Cette constante est appelée le gain  $H_\infty$  de l'opérateur  $\mathcal{G}$  et est notée comme suit :

$$\|\mathcal{G}\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(\hat{g}(\omega)). \quad (4.9)$$

Ce gain caractérise ainsi l'amplification maximale du signal de sortie  $y = \mathcal{G}u$  en fonction du signal d'entrée  $u$  relativement à la norme  $L^2(\mathbb{R}_+)$ . En notant que  $\hat{g}(\omega)$  correspond à l'évaluation de la fonction de transfert du système donnée par  $G(s) \triangleq \mathbf{C}(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$  en  $s = j\omega$ , on obtient que :

$$\|G\|_\infty \triangleq \|\mathcal{G}\|_\infty = \sup_{\omega \in \mathbb{R}} \bar{\sigma}(G(j\omega)). \quad (4.10)$$

Dans ce contexte, il peut être montré que  $\|\cdot\|_\infty$  définit une norme sur  $\mathcal{RH}_\infty$ , l'espace des fonctions de transfert matricielles rationnelles et propres à coefficients réels et dont les pôles sont à partie réelle strictement négative.

#### 4.1.1.2 Forme standard et problème $H_\infty$

Tel que initié par (Zames, 1981) puis développé par (Doyle, 1982), le problème de synthèse  $H_\infty$  est un problème de stabilisation et de rejet de perturbations tirant profit de la relation (4.8). Il repose sur la traduction des contraintes de design sous le formalisme de la forme standard illustrée à la Fig. 4.1.

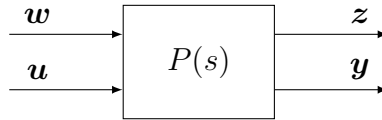


Figure 4.1 Forme standard pour la synthèse  $H_\infty$

Dans cette représentation, le système augmenté est noté  $P(s)$ . Les entrées se répartissent alors entre l'entrée de commande du système  $u$  et les entrées exogènes  $w$  comportant les consignes et/ou les perturbations. Les sorties se répartissent également en deux catégories, les sorties de mesure  $y$  disponibles pour la loi de contrôle et les sorties régulées  $z$  qui ont été introduites à travers les branches de performances. Le système augmenté  $P(s)$  est obtenu à

partir du système à contrôler  $G(s)$  de par l'ajout de canaux de performances qui traduisent le cahier des charges via l'introduction de filtres de pondération.

L'objectif du problème de synthèse  $H_\infty$  consiste alors à trouver un contrôleur  $K(s)$  rebouclant la sortie  $\mathbf{y}$  sur l'entrée  $\mathbf{u}$  (Fig. 4.2) permettant de stabiliser internement le système et minimisant l'impact des perturbations  $\mathbf{w}$  sur les sorties régulées  $\mathbf{z}$ . Pour cela, le système augmenté est écrit de la façon suivante :

$$\begin{bmatrix} Z(s) \\ Y(s) \end{bmatrix} = P(s) \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P_{11}(s) & P_{12}(s) \\ P_{21}(s) & P_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W(s) \\ U(s) \end{bmatrix}. \quad (4.11)$$

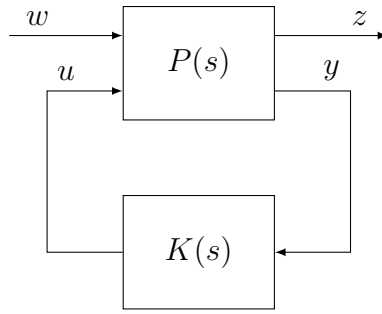


Figure 4.2 Problème  $H_\infty$  standard

La fonction de transfert reliant les entrées exogènes  $w$  aux sorties régulées  $z$  est alors donnée sous la forme d'une *Linear Fractionnal Transformation* (LFT) inférieure :

$$T_{zw}(P, K)(s) = \mathcal{F}_l(P(s), K(s)) = P_{11}(s) + P_{12}(s)K(s)(I - P_{22}(s)K(s))^{-1}P_{21}(s). \quad (4.12)$$

**Problème 4.1** Le **problème  $H_\infty$  optimal** consiste alors à trouver un contrôleur  $K(s)$  stabilisant internement le système en boucle fermée et minimisant  $\|T_{zw}(P, K)\|_\infty$ .

On s'assure ainsi, de par l'inégalité (4.8), de minimiser l'impact des perturbations  $w$  sur les sorties régulées  $z$  via la minimisation de l'amplification maximale de l'énergie du signal  $z$  relativement à l'ensemble des entrées  $w$  d'énergie finie. La norme  $H_\infty$  optimale est alors notée  $\gamma_{\text{opt}}$  et permet de mesurer les limites de performance atteignables du système bouclé. En pratique, on s'intéresse généralement à résoudre le problème sous-optimal suivant.

**Problème 4.2** Le **problème  $H_\infty$  sous-optimal** consiste, pour  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , à trouver un contrôleur  $K(s)$  stabilisant internement le système et tel que  $\|T_{zw}(P, K)\|_\infty < \gamma$ .

#### 4.1.1.3 Résolution classique du problème $H_\infty$ et limitations

Plusieurs solutions existent pour résoudre le problème  $H_\infty$  sous-optimal. Celle qui demeure, à l'heure actuelle, la plus populaire a été proposée par Doyle et al. (1989). Cette solution s'appuie sur le formalisme de la représentation d'état en introduisant une représentation minimale du système augmenté  $P(s)$  :

$$\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}} \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \left[ \begin{array}{c|cc} \mathbf{A} & \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_2 \\ \hline \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{11} & \mathbf{D}_{12} \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} & \mathbf{D}_{22} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{w} \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

avec  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^{m_1}$ ,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^{m_2}$ ,  $\mathbf{z}(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$ ,  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$ ,  $m = m_1 + m_2$  et  $p = p_1 + p_2$ . De manière à résoudre le problème  $H_\infty$  sous-optimal par la méthode de Doyle et al. (1989), les hypothèses suivantes doivent être vérifiées.

(H1) La représentation  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_2)$  est stabilisable et détectable.

(H2) Les matrices  $\mathbf{D}_{12}$  et  $\mathbf{D}_{21}$  sont de rang plein.

(H3) Pour tout  $\omega \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{rang} \left( \begin{bmatrix} j\omega - \mathbf{A} & -\mathbf{B}_2 \\ \mathbf{C}_1 & \mathbf{D}_{12} \end{bmatrix} \right) = n + m_2, \quad \text{rang} \left( \begin{bmatrix} j\omega - \mathbf{A} & -\mathbf{B}_1 \\ \mathbf{C}_2 & \mathbf{D}_{21} \end{bmatrix} \right) = n + p_2. \quad (4.14)$$

(H4)  $\mathbf{D}_{12}^\top [\mathbf{D}_{12} \ \mathbf{C}_1] = [\mathbf{I}_{p_2} \ \mathbf{0}]$  et  $\mathbf{D}_{21} [\mathbf{D}_{21}^\top \ \mathbf{B}_1] = [\mathbf{I}_{p_2} \ \mathbf{0}]$ .

(H5)  $\mathbf{D}_{22} = \mathbf{0}$ .

En particulier, l'hypothèse (H1) garantit l'existence d'un contrôleur stabilisant internement le système. L'hypothèse (H3) implique que la représentation d'état  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_2, \mathbf{C}_1, \mathbf{D}_{12})$ , respectivement  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}_1, \mathbf{C}_2, \mathbf{D}_{21})$ , n'admet pas de zéro invariant sur l'axe des imaginaires purs et donc que  $P_{12}(s)$ , respectivement  $P_{21}(s)$ , n'admet pas de zéro de transmission sur l'axe des imaginaires purs. L'hypothèse (H4) implique que  $p_1 \geq m_2$  et  $m_1 \geq p_2$ . Sous ces hypothèses, on a le résultat suivant.

**Théorème 4.1** (Doyle et al., 1989) *Sous les hypothèses (H1)-(H5), il existe un contrôleur  $K(s)$  rationnel à coefficients réels stabilisant internement  $P(s)$  avec  $\|T_{zw}(P, K)\|_\infty < \gamma$  si et seulement s'il existe  $\mathbf{X}, \mathbf{Y} \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$  tels que  $\rho(\mathbf{X}\mathbf{Y}) < \gamma^2$  et vérifient, respectivement, les équations de Riccati suivantes :*

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{X} + \mathbf{X}\mathbf{A} + \mathbf{X}(\gamma^{-2} \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top - \mathbf{B}_2 \mathbf{B}_2^\top) \mathbf{X} + \mathbf{C}_1^\top \mathbf{C}_1 = 0, \quad (4.15a)$$

$$\mathbf{A}\mathbf{Y} + \mathbf{Y}\mathbf{A}^\top + \mathbf{Y}(\gamma^{-2} \mathbf{C}_1^\top \mathbf{C}_1 - \mathbf{C}_2^\top \mathbf{C}_2) \mathbf{Y} + \mathbf{B}_1 \mathbf{B}_1^\top = 0. \quad (4.15b)$$

Une solution particulière du problème, dit **contrôleur central**, est alors donné par  $K(s) = \mathbf{C}_K(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_K)^{-1}\mathbf{B}_K$  où

$$\mathbf{A}_K = \mathbf{A} + (\gamma^{-2}\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^\top - \mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^\top)\mathbf{X} - (\mathbf{I}_n - \gamma^{-2}\mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{C}_2^\top\mathbf{C}_2, \quad (4.16a)$$

$$\mathbf{B}_K = (\mathbf{I}_n - \gamma^{-2}\mathbf{Y}\mathbf{X})^{-1}\mathbf{Y}\mathbf{C}_2^\top, \quad (4.16b)$$

$$\mathbf{C}_K = -\mathbf{B}_2^\top\mathbf{X}. \quad (4.16c)$$

Au-delà du contrôleur central, l'ensemble des contrôleurs peut être obtenu sous la forme d'une paramétrisation (Zhou et al., 1996, Théorème 17.1). Afin de relaxer les hypothèses (H1)-(H5), l'approche par résolution de LMI proposée par Gahinet and P (1994) demeure l'une des plus couramment employées.

Les méthodes  $H_\infty$  classiques présentent, en dépit de leurs qualités, un certain nombre d'inconvénients limitant leur mise en œuvre pratique. Il faut tout d'abord souligner qu'elles donnent lieu à des contrôleurs  $K(s)$  dont l'ordre est aussi élevé que celui du système augmenté  $P(s)$  utilisé pour la synthèse (cf. (4.16a)). Il est alors en général nécessaire de réduire *a posteriori* l'ordre du contrôleur tout en tentant de limiter la perte de performance associée. En outre, l'architecture des contrôleurs ainsi obtenus est généralement complexe, ne permettant pas de dégager d'intuition physique simple de son comportement. Finalement, les approches classiques s'attaquent au problème de la minimisation de la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert  $T_{zw}(P, K)$  liant l'ensemble des entrées exogènes à l'ensemble des sorties régulées. Or, en général, seul un nombre limité de fonctions de transfert scalaires au sein de  $T_{zw}(P, K)$  correspondant à des jeux d'entrées/sorties spécifiques présentent un intérêt au regard des critères de performances à optimiser. Ainsi, les fonctions de transfert correspondant à des termes croisés sont à même de venir limiter l'optimisation des canaux qui présentent un réel intérêt.

#### 4.1.2 De la synthèse $H_\infty$ structurée vers l'autoséquençement des gains

De manière à s'affranchir des limitations inhérentes aux méthodes de synthèse  $H_\infty$  classiques, des méthodes de synthèse dites  $H_\infty$  structurées ont fait l'objet de nombreuses investigations. Ces méthodes visent essentiellement l'optimisation de critères  $H_\infty$  sur la base d'une architecture de contrôleur fixée *a priori*. L'extension des méthodes  $H_\infty$  classiques au problème de synthèse de contrôleurs dont l'architecture est fixée *a priori* conduit généralement à devoir résoudre un problème non convexe bien plus complexe que le problème  $H_\infty$  originel sous la forme de BMI (Safonov et al., 1994). Cette complexité accrue dans la résolution analytique du problème de synthèse  $H_\infty$  structurée a conduit à le reformuler sous la forme d'un pro-

blème d'optimisation visant à minimiser des contraintes  $H_\infty$  en ajustant directement les gains du contrôleur dont l'architecture est définie *a priori*. Cette approche par optimisation d'une fonction coût a fait l'objet d'avancées très significatives au cours des deux dernière décennies ; elles ont abouti, parmi les contributions les plus notables, à l'émergence de la *toolbox* HIFOO (Burke et al., 2006) ainsi que des fonctions `hinfstruct`, `systune` et `looptune` intégrées dans la *Robust Control Toolbox* de MATLAB (Gahinet and Apkarian, 2011). Ces méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée sont basées sur des méthodes d'optimisation non lisse (Apkarian and Noll, 2006, 2007) permettant d'ajuster de manière itérative les gains du contrôleur afin de stabiliser internement le système en boucle fermée et de minimiser des contraintes  $H_\infty$ . Ces dernières évolutions permettent de tenir compte de critères de synthèse additionnels tels que le confinement de pôles, la norme  $H_2$ , le suivi de référence, etc.

#### 4.1.2.1 Synthèse $H_\infty$ structurée

Soit une famille de contrôleurs  $(K(\boldsymbol{\kappa}, s))_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}} \in (\mathbb{R}(s)^{m_2 \times p_2})^{\mathcal{K}}$  paramétrisée par le vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa}$  évoluant dans l'espace des vecteurs admissibles  $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$ , où  $n_k$  est le nombre de composantes du vecteur  $\boldsymbol{\kappa}$ . Des exemples typiques dans le cas de contrôleurs SISO sont donnés ci-dessous :

– Contrôleur PID :

$$K(\boldsymbol{\kappa}, s) = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s, \quad \boldsymbol{\kappa} = (K_p, K_i, K_d) \in \mathbb{R}^3. \quad (4.17)$$

– Fonction de transfert stable d'ordre 2 :

$$K(\boldsymbol{\kappa}, s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}, \quad \boldsymbol{\kappa} = (\xi, \omega_n) \in [0, 1] \times \mathbb{R}^+. \quad (4.18)$$

– Contrôleur SISO quelconque :

$$K(\boldsymbol{\kappa}, s) = \frac{b_m s^m + \dots + b_0}{s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_0}, \quad \boldsymbol{\kappa} = (a_0, \dots, b_m) \in \mathbb{R}^{m+n+1}. \quad (4.19)$$

Bien évidemment, ces exemples s'étendent aisément au cas des contrôleurs MIMO. Le problème  $H_\infty$  structuré est alors formulé comme suit.

**Problème 4.3** *Soit un système  $P(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$  propre donné dans le formalisme de la forme standard. Pour une famille de contrôleurs donnée  $(K(\boldsymbol{\kappa}, s))_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}} \in (\mathbb{R}(s)^{m_2 \times p_2})^{\mathcal{K}}$ , le gain optimal est donné par*

$$\gamma_{\text{opt}} \triangleq \inf_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}_{\text{stab}}} \|T_{zw}(P, K(\boldsymbol{\kappa}))\|_\infty, \quad (4.20)$$

où  $\mathcal{K}_{\text{stab}} \subset \mathcal{K}$  est l'ensemble des vecteurs  $\kappa \in \mathcal{K}$  stabilisant internement le système bouclé. Le problème  $H_\infty$  structuré consiste alors à trouver, pour  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , un vecteur de paramètres  $\kappa^* \in \mathcal{K}$  tel que  $K(\kappa^*, s)$  stabilise internement le système bouclé et telle que  $\|T_{zw}(P, K(\kappa^*))\|_\infty < \gamma$ .

La résolution du Problème 4.3 permet de s'affranchir du manque de structuration du correcteur, une des deux principales limitations de la synthèse  $H_\infty$  classique. De manière à s'affranchir de la seconde, on souhaiterait pouvoir, non pas minimiser la norme  $H_\infty$  de la fonction de transfert matricielle globale  $T_{zw}(P, K(\kappa))$ , mais de minimiser uniquement la norme  $H_\infty$  de canaux de performance d'intérêt liant des entrées et des sorties spécifiques.

**Problème 4.4** Soient un système  $P(s) \in \mathbb{R}(s)^{m \times p}$  propre donné dans le formalisme de la forme standard et une famille de contrôleurs  $(K(\kappa, s))_{\kappa \in \mathcal{K}} \in (\mathbb{R}(s)^{m_2 \times p_2})^{\mathcal{K}}$ . Sur la base de l'interconnexion du système  $P(s)$  avec le contrôleur  $K(\kappa, s)$ , soient des critères de performances 1) à optimiser  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et 2) à contrainte sous le seuil unitaire  $\mu : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Ces critères sont la concaténation<sup>1</sup> de critères  $H_\infty$  sur des jeux d'entrées/sorties spécifiques, mais peuvent également être étendus à des critères de type contraintes sur le placement de pôles, norme  $H_2$ , etc. Le gain optimal est donné par

$$\gamma_{\text{opt}} \triangleq \inf_{\kappa \in \mathcal{K}_{\text{stab}} \text{ t.q. } \mu(\kappa) \leq 1} \lambda(\kappa). \quad (4.21)$$

où  $\mathcal{K}_{\text{stab}} \subset \mathcal{K}$  est l'ensemble des vecteurs  $\kappa \in \mathcal{K}$  stabilisant internement le système bouclé. Le problème  $H_\infty$  structuré consiste alors à trouver, pour  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , un vecteur de paramètres  $\kappa^* \in \mathcal{K}$  tel que  $K(\kappa^*, s)$  stabilise internement le système bouclé avec  $\mu(\kappa^*) \leq 1$  et telle que  $\lambda(\kappa^*) < \gamma$ .

Le Problème 4.4 de synthèse à architecture de contrôleur fixe est un problème d'optimisation non lisse et non convexe, le rendant non solvable par des méthodes d'optimisation conventionnel de type descente de gradient. L'outil qui semble à l'heure actuelle le plus efficace pour résoudre le Problème 4.4 est la fonction `sysune` intégrée dans la *Robust Control Toolbox* de MATLAB (Gahinet and Apkarian, 2011). Cette fonction s'appuie sur des outils avancés d'analyse non lisse. La raison principale de la nécessité de recourir à l'analyse non lisse découle du fait que l'on cherche ici à résoudre un problème de type min-max. En effet, on cherche à trouver la valeur des gains du contrôleur qui permettent de minimiser une norme  $H_\infty$  qui s'exprime elle-même comme étant un supremum (Eq. 4.10). Or les fonctions min et max (ou inf et sup) ne permettent pas de conserver les propriétés de dérivabilité des fonctions, et ce

---

1. La concaténation est réalisée par l'intermédiaire de la fonction maximum.

même pour des problème élémentaires. Pour s'en convaincre, considérons la fonction suivante de classe  $\mathcal{C}^\infty$  (Lhachemi, 2013) :

$$F(\kappa, \omega) = \frac{\omega^2}{1 + \omega^2} f_1(\kappa) + \frac{1}{1 + \omega^2} f_2(\kappa), \quad (4.22)$$

où les fonctions  $f_1$  et  $f_2$  sont données pour tout  $\kappa \in \mathbb{R}$  par

$$f_1(\kappa) = 5 - \frac{4}{1 + (\kappa - 2)^2}, \quad f_2(\kappa) = 5 - \frac{4}{1 + (\kappa + 2)^2}. \quad (4.23)$$

On cherche alors à résoudre le problème min-max suivant :

$$\arg \inf_{\kappa \in \mathbb{R}} \sup_{\omega \in \mathbb{R}_+} |F(\kappa, \omega)| = \arg \inf_{\kappa \in \mathbb{R}} \max(f_1(\kappa), f_2(\kappa)), \quad (4.24)$$

où l'égalité se démontre de manière directe à partir de l'expression de la fonction  $F$ . Les fonctions  $f_1$ ,  $f_2$  et  $\max(f_1, f_2)$  ainsi obtenues sont tracées à la Fig. 4.3. On observe ainsi que la fonction  $\max(f_1, f_2)$  n'est pas dérivable au point en lequel elle admet un minimum global. La solution du problème min-max ainsi considéré ne peut donc pas être caractérisée par les valeurs annulant le gradient de la fonction  $\max(f_1, f_2)$ , ce dernier pouvant ne pas exister aux points d'intérêt, et cela quand bien même la fonction d'origine  $F$  est de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

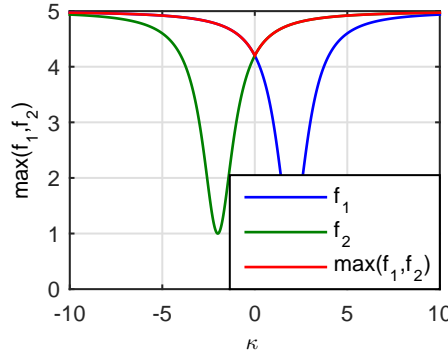


Figure 4.3 Illustration du caractère non lisse des problèmes min-max

Afin de palier à ce problème de non dérivabilité, la solution adoptée pour **sysune** est le recours au concept de dérivée de Clarke, notée  $\partial_c f$  (Clarke et al., 2008; Clarke, 2013), qui étend, en un certain sens, la notion de dérivée à des fonctions qui ne le sont pas. Pour introduire cette notion, rappelons préalablement le théorème de Rademacher :

**Théorème 4.2 (Théorème de Rademacher)** *Soit une fonction  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne*



sur un ouvert  $U$  de  $\mathbb{R}^n$ . La fonction  $f$  est alors différentiable presque partout<sup>2</sup> sur  $U$ .

Ce résultat permet d'introduire la caractérisation de la dérivée de Clarke pour les fonctions localement lipschitziennes.

**Théorème 4.3 (Dérivée de Clarke)** (*Clarke, 2013, Théorème 10.27*) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ , et soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement lipschitzienne au voisinage de  $x$ . Soit  $E$  un sous-ensemble de mesure nulle de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $E_f$  l'ensemble des points en lesquels  $f$  n'est pas différentiable. On a alors :

$$\partial_c f(x) = Co \left\{ \lim_{i \rightarrow \infty} \nabla f(x_i) : x_i \rightarrow x, x_i \notin E \cup E_f \right\}, \quad (4.25)$$

où, dans le cadre  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $E$ ,  $Co(A)$  représente la fermeture convexe d'un sous-ensemble  $A \subset E$  qui est définie par :

$$Co(A) = \left\{ \sum_{i=1}^r \alpha_i x_i : r \in \mathbb{N}^*, x_1, \dots, x_r \in A, \alpha_1, \dots, \alpha_r \geq 0, \sum_{i=1}^r \alpha_i = 1 \right\}. \quad (4.26)$$

Dans le cas où la fonction  $f$  est continûment différentiable en un point  $x$ , la notion de dérivée de Clarke coïncide avec la notion usuelle de différentiation puisque dans ce cas  $\partial_c f(x) = \{\nabla f(x)\}$ . L'utilité de la dérivée de Clarke dans le cadre de l'analyse non lisse réside dans le résultat énoncé ci-dessous.

**Lemme 4.4** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction localement lipschitzienne. Alors,

$$x^* \in \mathbb{R}^n \text{ minimise localement } f \implies 0 \in \partial_c f(x^*). \quad (4.27)$$

Ainsi, pour l'exemple (4.24) précédemment développé, un calcul direct montre que  $\partial_c f(0) = [-16/25, 16/25]$  et donc que l'on a bien  $0 \in \partial_c f(0)$ .

Dans le cadre du problème de synthèse  $H_\infty$  structurée, les méthodes numériques telles que **sysune** vont chercher de manière itérative à trouver un point  $x^*$  tel que  $0 \in \partial_c f(x^*)$  (Apkarian et al. (2009)) en recourant à des approximations de la fonction à minimiser. Pour cela, à partir d'un point  $x_k$  donné (condition initiale ou calculé lors d'une itération précédente), la méthode va dans un premier temps localement approximer la fonction  $f$  au voisinage de  $x_k$  par une fonction  $\Phi_x$  dont la complexité est réduite. L'algorithme de minimisation est alors appliqué à cette approximation dans un certain voisinage de  $x_k$ . Si le point ainsi obtenu engendre une décroissance suffisante de  $f$  par rapport à sa valeur en  $x_k$ , le point est

---

2. Au sens de la mesure de Lebesgue.

alors conservé en tant que  $x_{k+1}$ . Si le résultat n'est pas satisfaisant, l'approximation  $\Phi_x$  est améliorée de manière à approximer plus fidèlement le comportement de  $f$  au voisinage de  $x_k$ .

Comme mentionné précédemment, les méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée ainsi développées présentent de nombreux avantages parmi lesquels :

- la synthèse à architecture fixe ;
- la considération uniquement des canaux de performance d'intérêt (i.e., des jeux d'entrées/sorties spécifiques) lors du calcul des normes  $H_\infty$  ;
- la prise en compte d'autres critères de type confinement des pôles, norme  $H_2$ , etc ;
- la synthèse multimodèle (décrite ultérieurement à la Sous-Section 4.1.2.2).

Cependant, ces méthodes présentent également deux principales limitations. La première limitation réside dans le fait que, contrairement aux méthodes  $H_\infty$  classiques, les méthodes de type  $H_\infty$  structurée n'offrent aucune garantie quant à la stabilisation du système en boucle fermée. Cette non garantie provient de la liberté offerte dans le choix *a priori* de l'architecture du contrôleur. En effet, il est vain de vouloir stabiliser un système en boucle fermée avec une méthode  $H_\infty$  structurée si l'architecture adoptée pour le contrôleur ne le permet pas de manière intrinsèque. Un choix judicieux de l'architecture du contrôleur se basant sur la connaissance préalable du système à contrôler est donc indispensable. La seconde limitation réside dans la non convexité du problème d'optimisation, ce qui confère une importance capitale quant au choix de la condition initiale vis-à-vis de la solution renvoyée par l'algorithme. En effet, une mauvaise initialisation peut conduire à ne pas trouver de solution stabilisant le système, alors qu'une condition initiale choisie plus adéquatement pourrait le permettre.

#### 4.1.2.2 Synthèse robuste et autoséquencement des gains dans le cadre de la synthèse $H_\infty$ structurée

L'un des avantages majeurs de la synthèse  $H_\infty$  structurée, au-delà de la possibilité d'effectuer une synthèse de contrôleur à architecture fixe pour la minimisation de critères  $H_\infty$ , réside dans sa capacité de synthèse multimodèle. Cela signifie que la méthode permet d'ajuster les gains d'un contrôleur à architecture fixe en considérant plusieurs modèles simultanément. Pour expliquer cela, revenons au Problème 4.4 de synthèse  $H_\infty$  structurée. Dans celui-ci, sur la base d'un unique système LTI sous forme standard  $P(s)$  et une famille de contrôleurs LTI  $(K(\kappa, s))_{\kappa \in \mathcal{K}} \in (\mathbb{R}(s)^{m_2 \times p_2})^{\mathcal{K}}$ , on définissait pour le système en boucle fermée des critères de performances 1) à optimiser  $\lambda : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$  et 2) à contrainte sous le seuil unitaire  $\mu : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ , donnant lieu au problème d'optimisation (4.21). Ce problème d'optimisation est dit mono-modèle car basé sur un unique système standard  $P(s)$ . L'approche multimodèle permet de considérer dans la synthèse un nombre fini  $N$  de modèles sous forme standard

$P_1(s), \dots, P_N(s)$ . Chaque modèle  $P_i(s)$ , est placé en boucle fermée avec la famille de contrôleurs LTI à architecture fixe  $(K(\boldsymbol{\kappa}, s))_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}} \in (\mathbb{R}(s)^{m_2 \times p_2})^{\mathcal{K}}$  et des critères de performances associés  $\lambda_i, \mu_i : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Les critères de performances peuvent différer d'un modèle  $P_i(s)$  à l'autre. Le gain optimal du problème d'optimisation multimodèle est alors donné par

$$\gamma_{\text{opt}} \triangleq \inf_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}_{\text{stab}} \text{ t.q. } \max_{i \in \{1, \dots, N\}} \mu_i(\boldsymbol{\kappa}) \leq 1} \max_{j \in \{1, \dots, n\}} \lambda_j(\boldsymbol{\kappa}), \quad (4.28)$$

où  $\mathcal{K}_{\text{stab}} \subset \mathcal{K}$  est l'ensemble des vecteurs  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$  stabilisant internement les  $N$  systèmes bouclés composés de  $P_i(s)$  et de  $K(\boldsymbol{\kappa}, s)$ . Le problème  $H_\infty$  structuré consiste alors à trouver, pour  $\gamma > \gamma_{\text{opt}}$ , un vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}^* \in \mathcal{K}$  tel que  $K(\boldsymbol{\kappa}^*, s)$  stabilise internement le système bouclé avec, pour tout  $i \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\mu_i(\boldsymbol{\kappa}^*) \leq 1$  et telle que, pour tout  $j \in \{1, \dots, N\}$ ,  $\lambda_j(\boldsymbol{\kappa}^*) < \gamma$ .

La première application possible de la synthèse multimodèle est la synthèse robuste à architecture fixe. En effet, supposons que le système à contrôler est sujet à des incertitudes paramétriques  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$  où  $\Delta \subset \mathbb{R}^{n_\Delta}$  représente l'ensemble des valeurs admissibles du paramètre incertain  $\boldsymbol{\delta}$ . Le problème sous forme standard prend alors la forme  $P(\boldsymbol{\delta}, s)$ . Ainsi, en plaçant le système en boucle fermée avec la famille de contrôleurs LTI  $(K(\boldsymbol{\kappa}, s))_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}} \in (\mathbb{R}(s)^{m_2 \times p_2})^{\mathcal{K}}$ , les critères de performances associés dépendent dès lors du vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$ , mais également de la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ , i.e.,  $\lambda, \mu : \mathcal{K} \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Le gain optimal du problème de synthèse robuste est alors donné par

$$\gamma_{\text{opt}} \triangleq \inf_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}_{\text{stab}} \text{ t.q. } \sup_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta} \mu(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\delta}) \leq 1} \sup_{\boldsymbol{\delta} \in \Delta} \lambda(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\delta}), \quad (4.29)$$

où  $\mathcal{K}_{\text{stab}} \subset \mathcal{K}$  est l'ensemble des vecteurs  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$  stabilisant internement pour tout  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$  les systèmes bouclés composés de  $P(\boldsymbol{\delta}, s)$  et de  $K(\boldsymbol{\kappa}, s)$ . En pratique, on résout la version discrétisée du problème d'optimisation (4.29). Pour cela, on procède à la discrétisation du domaine incertain sous la forme d'un ensemble fini de configurations incertaines, i.e., on sélectionne  $\Delta_d \subset \Delta$  avec  $\text{Card}(\Delta_d) < \infty$ . Une telle discrétisation permet alors de se ramener à la configuration (4.28), rendant possible la résolution numérique de ce problème de synthèse robuste.

La seconde application possible est le problème d'autoséquencement des gains. Pour cela, supposons que le système à contrôler dépende d'un paramètre de séquencement  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  faisant évoluer la dynamique du système, i.e., le système sous forme standard s'écrit sous la forme  $P(\boldsymbol{\theta}_e, s)$ . Contrairement à la synthèse robuste où l'on cherchait à trouver un unique contrôleur permettant de rencontrer les critères de performance sur l'ensemble du domaine

incertain, on suppose ici que le paramètre de séquençement  $\theta_e$  est mesuré ou estimé afin d'être utilisé par le contrôleur. Dans ce cadre, on souhaite faire évoluer le vecteur de gains  $\kappa$  du contrôleur LTI à architecture fixe  $K(\kappa, s)$ . En d'autres termes, on cherche les gains du contrôleur sous la forme d'une fonction  $\kappa : \Theta \rightarrow \mathcal{K}$  de telle sorte que pour tout  $\theta_e \in \Theta$ , le système bouclé composé de  $P(\theta_e, s)$  et de  $K(\kappa(\theta_e), s)$  rencontre les critères de performances. Pour cela, on choisit *a priori* la structure de séquençement des gains du contrôleur sous la forme

$$\forall \theta_e \in \Theta, \kappa(\theta_e) = \sum_{i=1}^r \kappa_i \phi_i(\theta_e), \quad (4.30)$$

où pour  $i \in \{1, \dots, r\}$ ,  $\kappa_i \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$  représente les paramètres ajustables lors de la synthèse et  $\phi_i : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction de séquençement choisie *a priori*. En règle générale, les fonctions  $\phi_i$  sont choisies la forme de polynômes de la variable de séquençement  $\theta$ . Néanmoins, tout autre type de fonction, préférablement continue, est admissible. De manière à faire ressortir explicitement les paramètres ajustables dans la synthèse, le contrôleur  $K(\kappa, s)$ , incluant les formules d'autoséquençement des gains du contrôleur via  $\kappa(\theta_e)$ , peut se réécrire sous la forme  $\tilde{K}(\tilde{\kappa}, \theta_e, s)$  où  $\tilde{\kappa} \in \tilde{\mathcal{K}}$  concatène les  $r$  paramètres ajustables  $\kappa_i$ . Les critères de performances associés dépendent dès lors du vecteur de paramètres ajustables  $\tilde{\kappa} \in \tilde{\mathcal{K}}$ , mais également de la variable de séquençement  $\theta_e \in \Theta$ , i.e.,  $\lambda, \mu : \tilde{\mathcal{K}} \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}_+$ . Le gain optimal du problème d'autoséquençement est alors donné par

$$\gamma_{\text{opt}} \triangleq \inf_{\tilde{\kappa} \in \tilde{\mathcal{K}}_{\text{stab}} \text{ t.q. } \sup_{\theta_e \in \Theta} \mu(\tilde{\kappa}, \theta_e) \leq 1} \sup_{\theta_e \in \Theta} \lambda(\tilde{\kappa}, \theta_e), \quad (4.31)$$

où  $\tilde{\mathcal{K}}_{\text{stab}} \subset \tilde{\mathcal{K}}$  est l'ensemble des vecteurs  $\tilde{\kappa} \in \tilde{\mathcal{K}}$  stabilisant intérieurement pour tout  $\theta_e \in \Theta$  les systèmes bouclés composés de  $P(\theta_e, s)$  et de  $\tilde{K}(\tilde{\kappa}, \theta_e, s)$ . Comme dans le cas de la synthèse robuste, on résout la version discrétisée du problème d'optimisation (4.31). Pour cela, on procède à la discrétisation du domaine d'opération sous la forme d'un ensemble fini de points d'opération. Une telle discrétisation permet une nouvelle fois de se ramener à la configuration (4.28), rendant ainsi possible la résolution numérique de ce problème d'autoséquençement des gains par des routines de synthèse  $H_\infty$  structurée.

Il est évidemment possible de combiner les approches de synthèse robuste et d'autoséquençement des gains de manière à synthétiser, en un seul processus d'optimisation, un contrôleur robuste et autoséquéncé. Une telle stratégie a été appliquée pour la commande de la dynamique longitudinale de l'avion de combat américain F-16 (Lhachemi et al., 2014a,b) et d'un dirigeable (do Valle et al., 2014). Elle a été étendue au cas du codesign permettant d'ajuster simultanément les gains du contrôleur et certains des paramètres physiques du système. Ce travail est reporté dans un article scientifique publié dans *Aerospace Science and Technology*

(Lhachemi et al., 2015).

### 4.1.3 Inclusion de l'impact des termes de couplage cachés dans la synthèse $H_\infty$ structurée

La sous-section précédente a montré comment tirer profit des capacités multimodèle des méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée pour la synthèse de contrôleurs autoséquencés. On s'attache à présent à expliciter la démarche permettant d'y inclure, de manière explicite, la contribution des TCC. L'idée originelle de recourir à des méthodes d'autoséquencement dans la gestion des TCC a été initialement présentée dans un article de conférence (Lhachemi et al., 2016a). Sa formalisation a été présentée dans un article scientifique publié dans *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* (Lhachemi et al., 2016b) et dont les principaux éléments d'explications sont repris dans cette sous-section.

#### 4.1.3.1 Incertitudes paramétriques : modèle non linéaire, modèle linéarisé et paramétrisation

Reprenons la configuration initialement étudiée dans le Chapitre 3 en incluant l'impact d'incertitudes paramétriques. Pour cela, on suppose que le système à contrôler est sous la forme de la représentation d'état suivante :

$$\mathcal{S}(\delta) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \delta) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \delta) \end{cases} \quad (4.32)$$

Une nouvelle fois, on a  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  le vecteur d'état,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrée de commande,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur d'entrées exogènes et  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie (où  $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$ ). Le vecteur  $\delta \in \Delta \subset \mathbb{R}^{n_\Delta}$  représente les incertitudes paramétriques qui portent sur le système et est supposé statique, i.e., indépendant du temps. On suppose que  $\Delta$  est fermé et connexe par arc. Le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente la dynamique du système et la fonction  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^p$  génère les sorties du système. On suppose par la suite que  $f$  et  $h$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . Comme pour le Chapitre 3, on cherche à caractériser les points d'équilibre du système par l'intermédiaire d'un point d'opération  $\theta$ . La construction de ce point d'opération diffère néanmoins légèrement de la précédente construction dû à la présence du terme incertain  $\delta$ .

On introduit alors  $\mathbf{r}(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  le vecteur de référence et on suppose que le vecteur de sortie s'écrit sous la forme  $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_1^\top \mathbf{y}_2^\top]^\top$ , où  $\mathbf{y}_1(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  contient les sorties du système qui doivent suivre  $\mathbf{r}(t)$ , et où  $\mathbf{y}_2(t) \in \mathbb{R}^{p_2}$  contient les sorties supplémentaires utilisables par la

loi de commande et  $p_1 + p_2 = p$  (où  $p_1 \in \mathbb{N}^*$ ,  $p_2 \in \mathbb{N}$ ). En adéquation avec cette décomposition, l'équation de sortie de (4.32) se scinde sous la forme  $\mathbf{y}_1 = h_1(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})$  et  $\mathbf{y}_2 = h_2(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})$  de telle sorte que  $h = [h_1^\top h_2^\top]^\top$ . Le vecteur d'entrées exogènes est décomposé sous la forme  $\mathbf{w} = [\mathbf{d}^\top \mathbf{w}_m^\top]^\top$ , où  $\mathbf{d}(t) \in \mathbb{R}^{q_1}$  est le vecteur représentant les perturbations non mesurables (e.g., bruit des capteurs),  $\mathbf{w}_m(t) \in \mathbb{R}^{q_2}$  le vecteur des entrées exogènes mesurables (e.g, dans le contexte aéronautique, altitude, vitesse de vol, pression dynamique) et  $q_1 + q_2 = q$  (où  $q_1, q_2 \in \mathbb{N}$ ).

De manière similaire aux développements du Chapitre 3, on s'intéresse à la famille de points d'équilibres donnée par :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_q &\triangleq \{(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \Delta : \\ &\quad f(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}, h_1(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{r}_e, \mathbf{d}_e = \mathbf{0}, \mathbf{r}_e \in \Omega\}, \end{aligned} \quad (4.33)$$

où  $\mathbf{x}_e$ ,  $\mathbf{u}_e$  et  $\mathbf{w}_e$  représentent respectivement les valeurs prises à l'équilibre par le vecteur d'état  $\mathbf{x}$ , le vecteur de sortie  $\mathbf{u}$  et le vecteur d'entrée exogène  $\mathbf{w}$ . On suppose que  $\mathcal{E}_q$  peut être paramétrisé par l'intermédiaire de la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$  et d'un vecteur, référé sous la dénomination de « point d'opération »,  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , où  $\Theta$  est un sous-ensemble fermé connexe par arc de  $\mathbb{R}^s$  (où  $s \in \mathbb{N}^*$ ). En d'autres termes, on suppose l'existence d'une fonction  $\mu : \Theta \times \Delta \rightarrow \mathcal{E}_q$  qui est bijective, de classe  $\mathcal{C}^1(\Theta \times \Delta; \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \Delta)$  et telle que :

$$(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathcal{E}_q \Leftrightarrow \exists \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta : (\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}). \quad (4.34)$$

De plus, on suppose que le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e = \mu^{-1}(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta})$  dépend uniquement de la mesure de la sortie du système  $\mathbf{y}_{1,e}$  et des entrées exogènes mesurables  $\mathbf{w}_{m,e}$ . En particulier  $\boldsymbol{\theta}_e$  est indépendant de la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$ , rendant possible la caractérisation de sorties d'intérêt du système par l'intermédiaire du point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  sans connaître la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ . De manière plus spécifique, on suppose qu'il existe une fonction  $\nu : \mathcal{R} \rightarrow \Theta$  qui est bijective, de classe  $\mathcal{C}^1(\mathcal{R}, \mathbb{R}^s)$  où :

$$\mathcal{R} = \{(\mathbf{y}_{1,e}, \mathbf{w}_{m,e}) \in \mathbb{R}^{p_1} \times \mathbb{R}^{q_2} : h_1(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{y}_{1,e}, (\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathcal{E}_q\}, \quad (4.35)$$

et telle que pour tout  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ ,

$$(\mathbf{x}_e, \mathbf{u}_e, \mathbf{w}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \Leftrightarrow \boldsymbol{\theta}_e = \nu(\mathbf{y}_{1,e}, \mathbf{w}_{m,e}). \quad (4.36)$$

Par la suite, lorsque l'on considérera un point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  donné, on notera, pour une configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$  fixée,  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^n$ ,  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^m$ ,  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) =$

$[\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})^\top]^\top \in \mathbb{R}^p$ ,  $\mathbf{w}_{m,e}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{q_2}$  les grandeurs associées au point d'équilibre  $\mu(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})$ . Dès lors, les grandeurs précédemment énumérées sont assimilées à des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  définies, suivant les cas, sur  $\Theta \times \Delta$  ou  $\Theta$  (la régularité  $\mathcal{C}^1$  provient du fait que  $\mu$ ,  $h_1$  et  $h_2$  sont supposées de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

Une nouvelle fois, de manière à procéder à la synthèse d'un contrôleur séquencé, le système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  est linéarisé pour chacun des points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et configurations incertaines  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$  (i.e., autour du point d'équilibre associé  $\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ). Introduisant respectivement  $\boldsymbol{\delta x}$ ,  $\boldsymbol{\delta u}$ ,  $\boldsymbol{\delta w}$  et  $\boldsymbol{\delta y}$ , les déviations de  $\mathbf{x}$ ,  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{w}$  et  $\mathbf{y}$  relativement à la condition d'équilibre  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ,  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ,  $\mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ , la linéarisation de  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  donne le système LTI suivant :

$$\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \boldsymbol{\delta \dot{x}} = \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta x} + \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta u} + \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta w} \\ \boldsymbol{\delta y} = \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta x} + \mathbf{D}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta u} + \mathbf{D}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta w} \end{cases} \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) &= \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \\ \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{D}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{D}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}. \end{aligned} \quad (4.38)$$

On définit alors la famille de modèles LTI associée au système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  indexée par le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et le paramètre incertain  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$  comme suit :

$$\mathcal{S}_l \triangleq \{\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) : \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta, \boldsymbol{\delta} \in \Delta\}. \quad (4.39)$$

#### 4.1.3.2 TCC en présence d'incertitudes paramétriques

Comme cela a été illustré au Chapitre 3, l'une des difficultés inhérentes aux TCC réside dans le fait qu'ils font émerger des termes supplémentaires impliquant des dérivées partielles des gains séquencés et/ou des conditions d'équilibre du système. Les solutions développées dans la littérature, telles que détaillées dans la Section 3.3, se basent sur la résolution *a posteriori* d'EDP pour absorber ou rejeter l'impact des TCC. La solution ici proposée, au contraire de ces méthodes, vise à inclure *a priori* l'impact des TCC dans la synthèse, de manière à en tenir compte directement dans l'ajustement des gains. Pour cela, étant donné que les TCC dépendent en partie des dérivées partielles des gains séquencés, l'idée développée dans cette section tire profit des capacités d'autoséquencement des méthodes  $H_\infty$  structurées. En effet, un choix *a priori* des formules de séquencement permet de calculer explicitement les TCC et de les intégrer directement dans la phase d'ajustement des gains du contrôleur.

Afin d'illustrer le principe de la méthode, reprenons l'architecture du contrôleur (3.48) dont on suppose l'architecture fixée *a priori*. Conformément à l'approche expliquée précédemment, on choisit *a priori* une structure de séquençement pour les gains ajustables du contrôleur en faisant apparaître les paramètres devant être ajustés lors de la phase de synthèse. De manière plus spécifique, prenons le cas de la matrice  $\mathbf{A}_c^C$  du contrôleur (3.48). Cette matrice contient, en règle générale, des gains que l'on cherche à ajuster en fonction du point d'opération. Pour cela, on propose de séquençer *a priori* la matrice  $\mathbf{A}_c^C$  sous la forme :

$$\mathbf{A}_c^C(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}_{c,0}^C + \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_{c,k}^C \phi_k(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.40)$$

où les  $\phi_k : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions continues sélectionnée *a priori*. Dans cette configuration, les gains ajustables lors de la synthèse sont une partie des coefficients des matrices  $\mathbf{A}_{c,k}^C$ . En particulier ces gains sont statiques, i.e., indépendant du point d'opération courant. À titre d'exemple, supposons que pour un problème donné avec  $\Theta \subset \mathbb{R}$ , on considère une architecture de contrôleur fixée *a priori* qui donne lieu, après réécriture sous la forme (3.48), à une matrice  $\mathbf{A}_c^C$  prenant la forme suivante :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \mathbf{A}_c^C(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_1(\boldsymbol{\theta}) & k_2(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}, \quad (4.41)$$

où  $k_1$  et  $k_2$  sont deux gains à séquençer sur le domaine d'opération  $\Theta$ . Selon la procédure précédemment décrite, on choisit *a priori* une forme de séquençement pour les gains  $k_1$  et  $k_2$ , e.g.,

$$\forall i \in \{1, 2\}, \forall \theta \in \Theta, k_i(\theta) = k_{i0} + k_{i1}\theta + k_{i2}\theta^2. \quad (4.42)$$

On obtient alors la forme générale (4.40) puisque :

$$\forall \theta \in \Theta, \mathbf{A}_c^C(\theta) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ k_{10} & k_{20} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_{c,0}^C} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{11} & k_{21} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_{c,1}^C} \underbrace{\theta}_{=\phi_1(\theta)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ k_{12} & k_{22} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}_{c,2}^C} \underbrace{\theta^2}_{=\phi_2(\theta)}. \quad (4.43)$$

En particulier, les paramètres ajustables pour la phase de synthèse sont les coefficients  $k_{10}$ ,  $k_{11}$ ,  $k_{12}$ ,  $k_{20}$ ,  $k_{21}$  et  $k_{22}$ . *A contrario* les coefficients 0 et 1 qui apparaissent pour cet exemple sur la première ligne des matrices  $\mathbf{A}_{c,i}^C$  sont constants, i.e., ne peuvent être modifiés lors de la synthèse.

En appliquant la procédure de séquençement *a priori* à l'ensemble des matrices de l'architecture de contrôleur (3.48), on peut alors stocker l'ensemble des gains ajustables intervenant



dans les formules de séquencement dans le vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$ . Sur la base de l'architecture de contrôle d'origine (3.48), on est alors amené à considérer l'architecture de contrôle suivante :

$$\mathcal{C}_{\text{autoseq},2}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{r} + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \\ \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{r} + \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (4.44)$$

De la sorte, le problème originel de séquencement des gains se transforme en un problème de synthèse multimodèle. En effet, en intégrant *a priori* la structure de séquencement dans l'architecture de contrôle (3.48), on obtient l'architecture de contrôle  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},2}(\boldsymbol{\kappa})$  pour laquelle le design consiste à trouver une unique valeur du vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa}$  de manière à assurer la stabilité et la performance du système bouclé composé de  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  et de  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},2}(\boldsymbol{\kappa})$  sur l'ensemble du domaine d'opération  $\Theta$  et pour toute configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ .

Afin de procéder à la synthèse du contrôleur séquencé, on se doit de linéariser la dynamique de  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},2}(\boldsymbol{\kappa})$ . De manière analogue à la Section 3.2, le séquencement endogène du contrôleur provoque l'émergence des TCC. Cependant, on étudie ici le cas d'un système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  dont la dynamique dépend d'un vecteur de paramètres incertains  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ . Dû à la présence des ces incertitudes, la dynamique linéarisée de  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},2}(\boldsymbol{\kappa})$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  et pour la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$  (i.e., au point d'équilibre caractérisé par  $\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ) est donnée par :

$$\mathcal{C}_{\text{autoseq},l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{x}_i \\ \quad + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{r} + \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{y} + \mathbf{B}_\theta^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{x}_i \\ \quad + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{r} + \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)\delta \mathbf{y} + \mathbf{D}_\theta^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \boldsymbol{\theta} = \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}_1} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{y}_1 + \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{w}_m \end{cases} \quad (4.45)$$

où les TCC s'expriment sous la forme :

$$\begin{aligned}
B_{\theta,l}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) &= \frac{\partial \mathbf{A}_c^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \frac{\partial \mathbf{A}_i^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{B}_r^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) + \frac{\partial \mathbf{B}_y^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \\
D_{\theta,l}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) &= \frac{\partial \mathbf{C}_c^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \frac{\partial \mathbf{C}_i^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\
&\quad + \frac{\partial \mathbf{D}_r^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) + \frac{\partial \mathbf{D}_y^c}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}),
\end{aligned} \tag{4.46}$$

où  $\theta_l$  représente la  $l$ -ième composante du vecteur  $\boldsymbol{\theta}$ , alors que  $\mathbf{B}_{\theta,l}^c$  et  $\mathbf{D}_{\theta,l}^c$  correspondent respectivement à la  $l$ -ième colonne des matrices  $\mathbf{B}_\theta^c$  et  $\mathbf{D}_\theta^c$ . Les conditions d'équilibre du contrôleur, intervenant dans les TCC (4.46), sont caractérisés par :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} = \mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)^\dagger \mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \tag{4.47}$$

où

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix}, \tag{4.48}$$

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{D}_y^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}, \tag{4.49}$$

sous réserve des conditions d'existence de l'équilibre du contrôleur telles que discutées dans la Section 3.2.

Il est intéressant de noter ici la dépendance de la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  du contrôleur séquencé vis-à-vis de la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$ . En effet, bien que la dynamique du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},2}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  donnée par (4.44) ne dépende pas de la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$ , cette dépendance apparait lors de la linéarisation en un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  donné de par la présence d'un séquençement des gains. En effet, ce séquençement introduit, lors de la linéarisation, les TCC. Or, ces termes dépendent des conditions d'équilibre du système à contrôler  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ . Le système étant incertain, cette incertitude se retrouve donc au niveau de la condition d'équilibre du système associée au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ . On obtient dès lors des TCC qui sont bien dépendants du paramètre incertain  $\boldsymbol{\delta}$ .

De manière à mieux identifier le problème de synthèse ainsi formulé, il est utile de reformuler le problème sous la forme standard illustrée à la Fig. 4.4. Pour cela, en un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in$

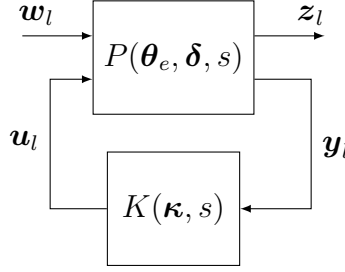


Figure 4.4 Reformulation sous forme standard du problème d'autoséquencement en présence de TCC

$\Theta$  donné, on réécrit la dynamique linéarisée du système en boucle fermée composé de  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta)$  et de  $\mathcal{C}_{\text{autoseq},l}(\kappa, \theta_e, \delta)$ , sous la forme de la LFT inférieure  $\mathcal{F}_l(P(\theta_e, \delta, s), K(\kappa, s))$ . Cette représentation inclut les éventuelles composantes additionnelles (e.g., modèle de référence et pondérations) inhérentes aux méthodes de synthèse  $H_\infty$  aboutissant à l'écriture d'un système sous forme augmentée. Dans cette configuration,  $P(\theta_e, \delta, s)$  représente le système augmenté et inclut l'ensemble des composantes liées à la variable de séquençement  $\theta_e$  et le vecteur de paramètres incertains  $\delta$ . Le vecteur de paramètres ajustables  $\kappa$  est quant à lui inclus dans la dynamique du contrôleur  $K(\kappa, s)$ . Avec cette représentation, il est aisé de noter que le problème de synthèse du contrôleur séquencé d'origine devient un problème de synthèse multimodèle. En effet, pour un niveau de performance  $\gamma > 0$  souhaité, la synthèse consiste à trouver un unique vecteur  $\kappa^* \in \mathcal{K}$  permettant pour tout point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  et toute configuration incertaine  $\delta \in \Delta$ , de stabiliser intérieurement  $\mathcal{F}_l(P(\theta_e, \delta, s), K(\kappa, s))$  tout en garantissant  $\|\mathcal{F}_l(P(\theta_e, \delta, s), K(\kappa, s))\|_\infty < \gamma$ .

L'architecture de contrôleur (4.44) précédemment étudiée présente l'avantage de ne pas nécessiter de recourir aux conditions d'équilibre du système. Cependant, la démarche précédemment développée ne se limite pas à cette architecture de contrôle et peut être généralisée à d'autres configurations, incluant celles qui ont recours dans leur implémentation aux conditions d'équilibre du système. En particulier, il a été vu dans le Chapitre 3 que l'architecture de contrôleur séquencé (3.45) faisant explicitement intervenir les conditions d'équilibre du système présente l'avantage de se rapprocher dans sa structure de l'implémentation d'un simple contrôleur LTI au voisinage d'un point d'équilibre donné. De plus, l'intérêt de cette implémentation réside dans le fait qu'en l'absence d'incertitudes paramétriques, les TCC qu'il engendre (3.47) ne font pas intervenir de dérivées partielles des gains du contrôleur, mais uniquement des dérivées partielles des conditions d'équilibre du système à contrôler. Cependant, cette conclusion ne tient plus en présence d'incertitudes paramétriques, faisant perdre à cette implémentation son principal avantage. Pour s'en convaincre, reprenons l'ar-

chitecture de contrôle (4.44) en tenant compte de l'aspect incertain du système à contrôler  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ . Pour cela, notons  $\boldsymbol{\delta}_0 \in \Delta$  la configuration nominale du système pour laquelle on choisit d'implémenter le contrôleur autoséquence sous la forme suivante :

$$\mathcal{C}_{\text{autoseq},1}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})] \\ \quad + \mathbf{B}_{y,1}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})] + \mathbf{B}_{y,2}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)] \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})] \\ \quad + \mathbf{D}_{y,1}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_1 - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta})] + \mathbf{D}_{y,2}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_2 - \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)] \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (4.50)$$

Il a été vu qu'en l'absence d'incertitudes (cf. Chapitre 3), cette implémentation permet de garantir, sous l'hypothèse usuelle que la matrice  $E(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  définie similairement à (3.41) est de colonne rang plein, que l'état du contrôleur est identiquement nul à l'équilibre pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ . Cette propriété permettait alors d'assurer que les dérivées partielles des gains du contrôleur n'apparaissent pas dans la dynamique linéarisée du contrôleur séquencé. Cependant, ce résultat ne tient plus en présence d'incertitudes. En effet, l'équilibre de (4.50) associé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  est caractérisé par :

$$E(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{B}_{y,2}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)[\mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)] \\ [\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)] - \mathbf{D}_{y,2}^c(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)[\mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)] \end{bmatrix} \quad (4.51)$$

et est donc en général non nul dès que la configuration incertaine réelle du système  $\boldsymbol{\delta}$  diffère de la configuration nominale  $\boldsymbol{\delta}_0$ . Dès lors, la linéarisation de la dynamique (4.50) au voisinage d'un point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  donne une nouvelle fois lieu à la dynamique linéarisée (4.45) mais avec des TCC ayant une complexité accrue. Ces derniers font à présent intervenir à la fois des dérivées partielles 1) des matrices du contrôleur et 2) des conditions d'équilibre du système. On perd ainsi, de par la présence d'incertitudes paramétriques, l'intérêt fondamental de cette implémentation. Ainsi, bien que la stratégie d'autoséquencement présentée précédemment peut s'appliquer au contrôleur séquencé (4.50), on se focalisera, pour les applications, sur l'architecture (4.44).

#### 4.1.4 Applications

La méthode de gestion des TCC est à présent mise en œuvre sur deux applications dans le domaine aéronautique. La première application est celle du contrôle de la dynamique en tangage d'un missile, alors que la seconde porte sur le contrôle de la dynamique flexible d'une

section d'aile.

Dans le cadre de ces deux applications, les formules de séquencement employées font intervenir la fonction valeur absolue. Cette utilisation est motivée par les propriétés de symétrie des systèmes étudiés. Cependant, elle rend le champ de vecteur du système bouclé non continûment différentiable, ne permettant pas une application directe de la première méthode de Lyapunov pour assurer la stabilité du système non linéaire à partir du linéarisé tangent (cf. Théorème B.5). Cette problématique est investiguée en Annexe B dans un cadre général et a fait l'objet d'une publication dans le journal *IEEE Control Systems Letters* (Lhachemi et al., 2017a). Les résultats obtenus, notamment au regard du Théorème B.13, permettent de garantir que pour les différentes applications traitées ici, la stabilité obtenue sur le linéarisé tangent induit bien la stabilité exponentielle locale du système non linéaire d'origine.

#### 4.1.4.1 Contrôle de la dynamique en tangage d'un missile

Cette section traite du contrôle de la dynamique en tangage d'un missile par le recours à la méthode du séquencement des gains en présence de TCC. Les résultats présentés sont issus de l'article de conférence (Lhachemi et al., 2016a) et de l'article de journal (Lhachemi et al., 2016b).

**Modèle de la dynamique en tangage d'un missile et critères de performance.** La dynamique en tangage d'un missile est donnée par (Reichert, 1992) :

$$\begin{cases} \dot{\alpha} = K_1 M(1 + \delta_n) C_n(\alpha, \delta_t, M) \cos(\alpha) + q \\ \dot{q} = K_2 M^2(1 + \delta_m) C_m(\alpha, \delta_t, M) \end{cases} \quad (4.52)$$

où  $\alpha$  représente l'angle d'attaque,  $q$  la vitesse en tangage et  $\delta_t$  l'angle de la gouverne. Le vecteur  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_n, \delta_m) \in \Delta$  représente les incertitudes aérodynamiques. Les coefficients aérodynamiques liés à la portance  $C_n$  et le moment en tangage  $C_m$  sont donnés par :

$$\begin{aligned} C_n(\alpha, \delta_t, M) &= \text{sgn}(\alpha) \left[ a_n |\alpha|^3 + b_n |\alpha|^2 + c_n (2 - M/3) |\alpha| \right] + d_n \delta_t, \\ C_m(\alpha, \delta_t, M) &= \text{sgn}(\alpha) \left[ a_m |\alpha|^3 + b_m |\alpha|^2 + c_m (-7 + 8M/3) |\alpha| \right] + d_m \delta_t. \end{aligned} \quad (4.53)$$

Le braquage de la gouverne est liée à sa position commandée par l'intermédiaire d'un système du second ordre :

$$\frac{\delta_t}{\delta_c} = \frac{\omega_a^2}{s^2 + 2\xi_a \omega_a s + \omega_a^2}. \quad (4.54)$$

La sortie à contrôler est l'accélération normale  $\eta$  du missile qui est caractérisée par :

$$\eta = K_3 M^2 (1 + \delta_n) C_n(\alpha, \delta_t, M). \quad (4.55)$$

Les grandeurs mesurées utilisables pour la stratégie de contrôle sont  $\eta$  et  $q$ . L'angle d'attaque  $\alpha$  (variable endogène) et le nombre de Mach  $M$  (variable exogène) sont utilisés en tant que variables de séquençement. L'entrée de commande du système est le braquage commandé de la gouverne  $\delta_c$ . Les détails de ce modèle, incluant les valeurs numériques utilisées, sont extraits de (Reichert, 1992).

La dynamique du système, composée des équations (4.52), (4.53), (4.54) et (4.55), est réécrite sous la forme d'une représentation d'état donnée par (4.32) et notée  $\mathcal{S}(\delta)$ . En particulier, le vecteur d'état est choisi comme étant  $\mathbf{x} = [\alpha \ q \ \delta_t \ \dot{\delta}_t]^\top$ . L'entrée de commande et l'entrée exogène sont respectivement  $u = \delta_c$  et  $w_m = M$ . La sortie du système est quant à elle donnée par  $\mathbf{y} = [\eta \ \alpha \ q]^\top$ .

En ce qui concerne les requis de performance, le contrôle de la dynamique en tangage du missile doit être garanti sur le domaine d'opération défini par (Reichert, 1992) :

$$\Theta = \{\boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) : \alpha \in [-20^\circ, 20^\circ], M \in [1.5, 4]\}, \quad (4.56)$$

de manière à assurer :

- la stabilité robuste du système bouclé à travers le domaine d'opération  $\Theta$  en dépit des incertitudes aérodynamiques caractérisées par des variations indépendantes des coefficients aérodynamiques allant jusqu'à  $\pm 25\%$ , i.e., pour  $\boldsymbol{\delta} = (\delta_n, \delta_m) \in [-0.25, 0.25]^2$  ;
- assurer la poursuite d'un signal de référence  $\eta_c$  de type échelon pour l'accélération normale  $\eta$  avec une constante de temps  $\tau_r$  inférieure à 0.35 s, un dépassement maximal inférieur à 10% et une erreur en régime permanent inférieure à 1% ;
- la vitesse de braquage de la gouverne ne doit pas excéder, en valeur absolue,  $25^\circ/\text{s}$  (avec quelques tolérances pour  $M \leq 2$ ) pour une entrée de référence  $\eta_c$  fixée à 1 g (Wu et al., 1995).

**Architecture de contrôleur séquencé et TCC** La stratégie de contrôle adoptée étant celle du séquençement des gains, la dynamique du système  $\mathcal{S}(\delta)$  est mise à l'équilibre puis linéarisée au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e = (\alpha_e, M_e)$  pour la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ . En particulier, la mise à l'équilibre donne lieu à un vecteur d'état à l'équilibre  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = [\alpha_e \ q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \ \delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \ 0]^\top$ , ainsi qu'une entrée de commande  $u_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \delta_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et une entrée exogène  $w_{m_e}(\boldsymbol{\theta}_e) = M_e$ , vérifiant  $f(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$ . Au

point d'équilibre ainsi obtenu, la dynamique du système non linéaire  $\mathcal{S}(\delta)$  est linéarisée, donnant lieu à la dynamique LTI notée  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta)$ .

Sur la base d'architectures classiquement utilisées pour ce problème de contrôle, l'architecture adoptée ici est celle illustrée à la Fig. 4.5. Elle est composée de deux boucles de contrôle internes et d'un bouclage intégral externe portant sur l'erreur entre la référence  $\eta_c$  et l'accélération effective  $\eta$ . Les trois gains associés,  $K_\eta$ ,  $K_q$  et  $K_i$  sont séquencés en fonction de  $\alpha$  et  $M$ .

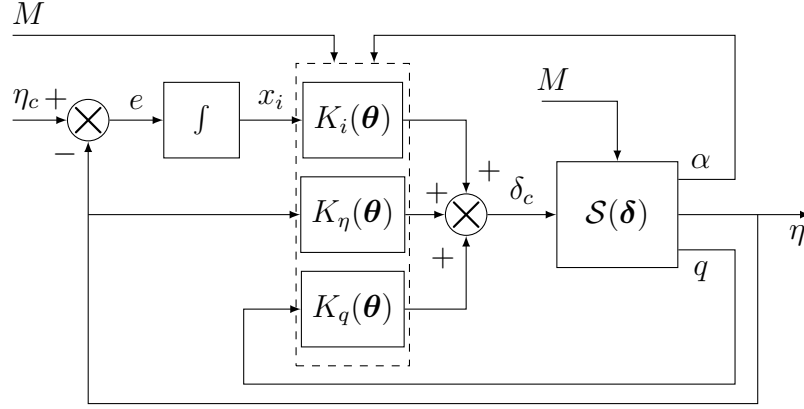


Figure 4.5 Missile en boucle fermée avec l'architecture de contrôleur séquencé proposée

Ainsi, l'architecture de contrôle considérée est donnée par la dynamique suivante :

$$\mathcal{C}(\kappa) \triangleq \begin{cases} \dot{x}_i = \eta_c - \eta \\ \delta_c = K_i(\theta)x_i + K_\eta(\theta)\eta + K_q(\theta)q \\ \theta = (\alpha, M) \end{cases} \quad (4.57)$$

où  $\kappa$  est un vecteur rassemblant les paramètres ajustables du contrôleur séquencé et qui sera précisé par la suite. Il est à noter que d'un point de vue applicatif, il aurait été plus judicieux de séquencer les gains relativement à l'accélération normale  $\eta$  plutôt que l'angle d'attaque  $\alpha$ . En effet, la première variable est facilement mesurable par l'intermédiaire d'un accéléromètre. *A contrario*, la seconde est plus difficile à mesurer de manière précise. Cependant, la majorité des travaux reportés dans la littérature sont basés sur un séquençement en  $\alpha$ . Il a donc été choisi, à des fins de comparaison, de conserver ce choix de séquençement.

Le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}(\kappa)$  induit l'émergence des TCC<sup>3</sup>. En effet, l'équilibre du contrôleur  $\mathcal{C}(\kappa)$  au point d'opération  $\theta_e = (\alpha_e, M_e)$ , lorsque placé en boucle fermée avec le système

3. Il en aurait été de même si  $\eta$  avait été choisi en lieu et place de  $\alpha$  comme variable de séquençement.

$\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ , est caractérisé par  $\eta_{c,e} = \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e)$  ainsi que

$$\delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = K_i(\boldsymbol{\theta}_e)x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e)\eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + K_q(\boldsymbol{\theta}_e)q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}). \quad (4.58)$$

En supposant que le gain  $K_i$  ne s'annule pas sur le domaine d'opération  $\Theta$ , on obtient que l'équilibre du contrôleur est donnée par :

$$x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)}\delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) - \frac{K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)}\eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) - \frac{K_q(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)}q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}). \quad (4.59)$$

On en déduit que la dynamique linéarisée du contrôleur au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  prend la forme :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta \eta_c - \delta \eta \\ \delta u = K_i(\boldsymbol{\theta}_e)\delta x_i + K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e)\delta \eta + K_q(\boldsymbol{\theta}_e)\delta q + K_\alpha^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\delta \alpha + K_M^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\delta M \end{cases} \quad (4.60)$$

où les TCC sont donnés par :

$$\begin{aligned} K_\alpha^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) &= \left. \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \left. \frac{\partial K_\eta}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \left. \frac{\partial K_q}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ &= \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left. \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \left[ \left. \frac{\partial K_\eta}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left. \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ &\quad + \left[ \left. \frac{\partial K_q}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_q(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left. \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \end{aligned} \quad (4.61a)$$

$$\begin{aligned} K_M^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) &= \left. \frac{\partial K_i}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \left. \frac{\partial K_\eta}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \left. \frac{\partial K_q}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ &= \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left. \frac{\partial K_i}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) + \left[ \left. \frac{\partial K_\eta}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left. \frac{\partial K_i}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ &\quad + \left[ \left. \frac{\partial K_q}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_q(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \left. \frac{\partial K_i}{\partial M} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}). \end{aligned} \quad (4.61b)$$

De manière à tenir compte de manière explicite des TCC conformément à la stratégie de la sous-section 4.1.3, on introduit une structure de séquençement pour les gains du contrôleur. Dans cette étude, on opte pour un séquençement sous forme de polynômes quadratiques des variables de séquençement. En d'autres termes, pour tout gain  $K \in \{K_i, K_\eta, K_q\}$ , on impose *a priori* :

$$\forall \boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) \in \Theta, K(\boldsymbol{\theta}) = K_{00} + K_{10}M + K_{01}|\alpha| + K_{20}M^2 + K_{11}M|\alpha| + K_{02}|\alpha|^2, \quad (4.62)$$



où  $K_{00}, K_{10}, \dots, K_{02}$  constituent les paramètres ajustables du contrôleur séquencé. De la sorte, l'ensemble des 18 paramètres ajustables liés aux trois gains séquencés  $K_i$ ,  $K_\eta$  et  $K_q$  sont réunis dans le vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{18}$ . Le recours à la valeur absolue de l'angle d'attaque  $\alpha$  dans la formule de séquençement se justifie de par les propriétés de symétrie du système. Ce point sera plus amplement détaillé par la suite.

Il est à présent possible de calculer explicitement les dérivées partielles des gains séquencés intervenant dans les TCC (4.61a) et (4.61b). En effet, pour  $K \in \{K_i, K_\eta, K_q\}$  on a :

$$\forall(\alpha, M) \in \Theta, \quad \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \text{sign}(\alpha) (K_{01} + K_{11}M + 2K_{02}|\alpha|), \text{ lorsque } \alpha \neq 0 \\ \frac{\partial K}{\partial M} = K_{10} + K_{11}|\alpha| + 2K_{20}M \end{cases} \quad (4.63)$$

Le choix de la formule de séquençement (4.62) implique que la dérivée partielle  $\partial K / \partial \alpha$  n'existe pas en  $\alpha = 0$ . Néanmoins, étant donné que les dérivées partielles à gauche et à droite existent en  $\alpha = 0$ , et puisque  $\boldsymbol{\theta}_e = (0, M_e)$  implique  $\delta_{t,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = q_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = 0$ , la dynamique linéarisée donnée par (4.60) demeure valide avec  $K_\alpha^{\text{TCC}}((0, M_e), \boldsymbol{\delta}) = 0$ . Ce résultat est compatible avec (4.63) en adoptant la convention  $\text{sign}(0) = 0$ .

De par les propriétés de symétrie du système non linéaire  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ , le design peut être restreint aux points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e = (\alpha_e, M_e)$  tels que  $\alpha_e \geq 0$ . En effet, étant donné un profil de Mach  $t \rightarrow M(t)$ ,  $t \rightarrow (\alpha(t), q(t), \eta(t))$  est une solution de (4.52) si et seulement si  $t \rightarrow (-\alpha(t), -q(t), -\eta(t))$  est également une solution. Puisque l'architecture du contrôleur séquencé a été choisie de telle sorte que pour chaque gain  $K \in \{K_i, K_\eta, K_q\}$  on ait  $K(\alpha, M) = K(-\alpha, M)$ , cela garantit que  $K_\alpha^{\text{TCC}}((\alpha, M), \boldsymbol{\delta}) = K_\alpha^{\text{TCC}}((-\alpha, M), \boldsymbol{\delta})$  et  $K_M^{\text{TCC}}((\alpha, M), \boldsymbol{\delta}) = -K_M^{\text{TCC}}((-\alpha, M), \boldsymbol{\delta})$ . Ce résultat est bien compatible avec la symétrie du système.

En un point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  donné, l'interconnexion des dynamiques linéarisées  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  employée à des fins de design est illustrée à la Fig. 4.6. Dans le cas d'un design classique faisant fi des TCC, le système linéaire utilisé dans la synthèse est celui de la Fig. 4.6 dont on retirerait les composantes en rouge. En particulier, cela revient à ne pas considérer le bouclage interne introduit par le séquençement de la variable endogène  $\alpha$ . On s'attend donc à obtenir des résultats significativement différents entre une approche classique ne considérant pas les TCC dans la synthèse et l'approche ici développée tenant explicitement compte des TCC.

Comme décrit dans la Sous-Section 4.1.3.2, le problème de synthèse consiste à trouver un ajustement statique du vecteur de paramètres  $\boldsymbol{\kappa}$  de manière à obtenir un comportement adéquat du système bouclé pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et toute configuration incertaine

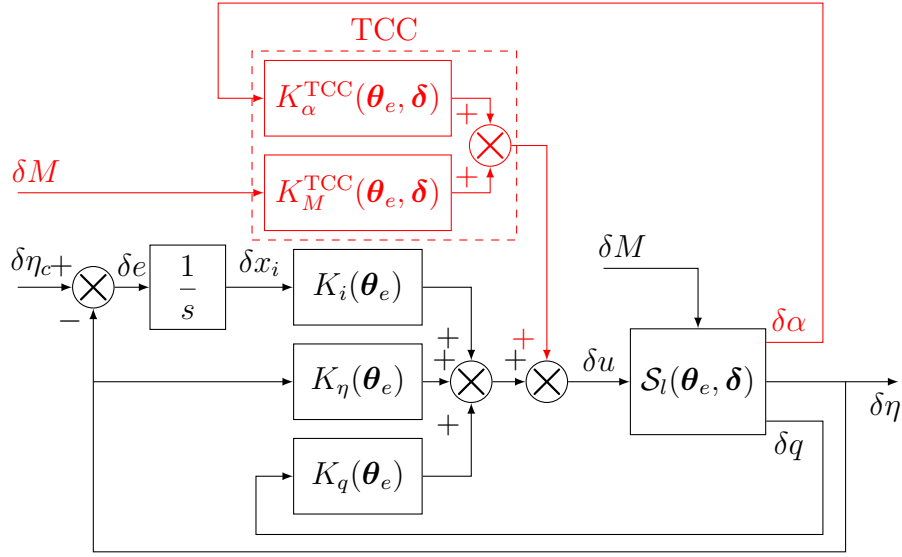


Figure 4.6 Dynamique linéarisée du missile en boucle fermée utilisée à des fins de synthèse

$\delta \in \Delta$ . On retrouve ainsi la configuration de synthèse robuste et multimodèle telle qu'illustrée par la Fig. 4.4 lorsque le problème est réarrangé sous la forme d'une LFT inférieure du type  $\mathcal{F}_l(P(\theta_e, \delta, s), K(\kappa, s))$ .

**Synthèse du contrôleur séquencé** La méthode employée est celle de la synthèse  $H_\infty$  structurée, ce qui nécessite de traduire les critères de performances sous la forme de contraintes  $H_\infty$  et de placement de pôles.

- Pour garantir un niveau adéquat du taux de convergence et du facteur d'amortissement, des contraintes de type confinement des pôles sont introduites. On note  $\mathcal{A}(\kappa, \theta_e, \delta)$  la matrice d'état d'une représentation minimale du système en boucle fermée composé de  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta)$  et de  $\mathcal{C}_l(\kappa, \theta_e, \delta)$ . Une première fonction coût vise à garantir un taux de convergence minimal de  $\alpha_p = -5$  du système en boucle fermée :  $\lambda_1(\kappa, \theta_e, \delta) = \alpha_p / \alpha(\mathcal{A}(\kappa, \theta_e, \delta))$ , avec  $\alpha(\cdot)$  la fonction abscisse spectrale<sup>4</sup>. Une seconde fonction coût assure un taux d'amortissement minimal  $\xi_p = 0.5$  au système bouclé :  $\lambda_2(\kappa, \theta_e, \delta) = \xi_p / \xi(\mathcal{A}(\kappa, \theta_e, \delta))$ , où  $\xi(\cdot)$  représente l'amortissement minimal des valeurs propres de la matrice carrée en argument<sup>5</sup>.
- La performance en suivi de référence quant à l'accélération normale est spécifiée en contraignant la fonction de transfert  $T_{\eta_c \rightarrow e}(\kappa, \theta_e, \delta)$  liant l'entrée de référence  $\eta_c$  à l'erreur en suivi  $e = \eta_c - \eta$ . Le suivi de référence étant désiré aux basses et moyennes fréquences, on introduit la contrainte  $\lambda_3(\kappa, \theta_e, \delta) = \|T_{\eta_c \rightarrow e}(\kappa, \theta_e, \delta)W_3\|_\infty$  où la pondération est sélectionnée comme étant  $W_3 = 3(0.07s + 1)/(s + \varepsilon)$ . Le paramètre  $\varepsilon > 0$  est introduit afin de garantir

4. Pour une matrice carrée à coefficients complexes  $\mathbf{M}$ ,  $\alpha(\mathbf{M}) \triangleq \max\{\mathcal{R}e(\lambda) : \det(\mathbf{M} - \lambda \mathbf{I}_d) = 0\}$ .

5. Pour une valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}^*$  donnée, l'amortissement est défini par  $-\mathcal{R}e(\lambda)/|\lambda|$ .

la stabilité de  $W_3$  et est ici fixé à  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

- Pour limiter l'entrée de signaux hautes fréquences dans l'actionneur, on considère la fonction coût  $\lambda_4(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \|T_{\eta_c \rightarrow \delta_c}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})W_4\|_\infty$  avec la pondération  $W_4 = 30s/(s+10)$ .
- De manière analogue, afin d'éviter des vitesses excessives de la gouverne, on introduit la fonction coût  $\lambda_5(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \|T_{\eta_c \rightarrow \dot{\delta}_t}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})W_5\|_\infty$  où  $W_5 = 1.25s/(s+1)$ .
- Finalement, pour rejeter les perturbations introduites par le signal exogène  $M$ , on considère la fonction coût  $\lambda_6(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \|T_{M \rightarrow \eta}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})W_6\|_\infty$  avec la pondération  $W_6 = 0.4/((s+\varepsilon)(s+1)^2)$ .

De manière à rendre le problème de synthèse numériquement solvable par les méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée (cf. Sous-Section 4.1.2.2), on procède en une discrétisation finie du domaine d'opération  $\Theta_d \subset \Theta$  ainsi que du domaine incertain  $\Delta_d \subset \Delta$  telles qu'illustrées, respectivement, par les Figs. 4.7(a) et 4.7(b). Puisque le domaine d'incertitudes est relativement large, l'objectif du design est de synthétiser un contrôleur assurant la stabilité robuste mais présentant des performances dégradées pour les configurations incertaines extrêmes. Plus précisément, on souhaite rencontrer le niveau de performance requis pour des incertitudes allant jusqu'à  $\pm 10\%$ , tout en garantissant la stabilité pour des incertitudes allant jusqu'à  $\pm 25\%$ . Pour cela, au regard de la Fig. 4.7(b), les contraintes de performances sont uniquement appliquées pour les configurations incertaines marquées d'une croix ("x"), i.e., pour des incertitudes aérodynamiques allant jusqu'à  $\pm 10\%$ . Des contraintes de stabilité sont ajoutées pour les configurations incertaines marquées par un cercle ("o"), i.e., pour des incertitudes aérodynamiques allant jusque  $\pm 25\%$ .

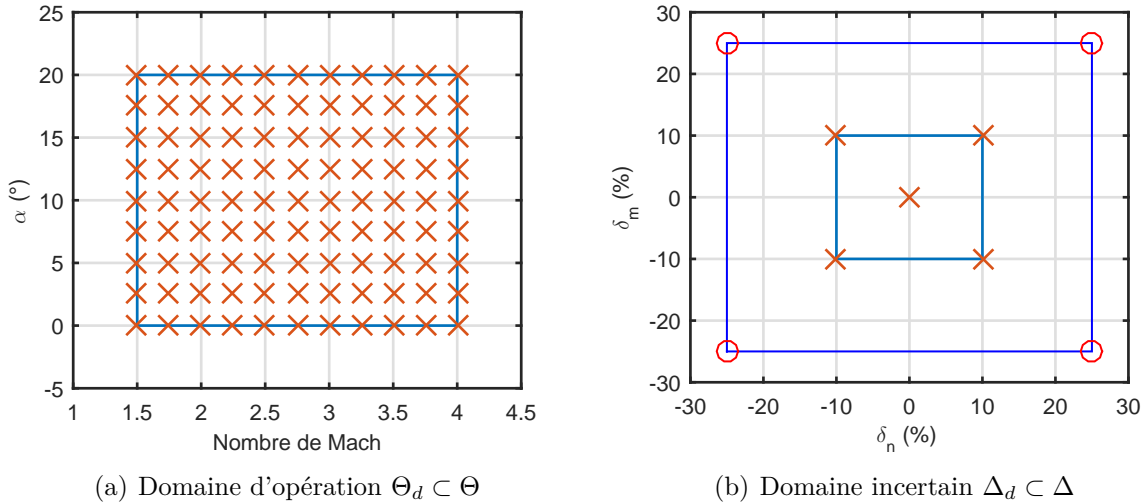


Figure 4.7 Domaine d'opération du missile et domaine des incertitudes aérodynamiques

La nature non lisse et non convexe du problème nécessite un choix adéquat de la condition initiale donnée en entrée de la fonction d'optimisation. Celle-ci a été obtenue sur la base d'un design point à point préliminaire et le recours à une méthode de type moindres carrés. De plus, une normalisation des fonctions coût a été effectuée à travers les différents point d'opérations de manière à assurer un effort d'optimisation adéquatement distribué au travers du domaine d'opération (Lhachemi, 2013; Lhachemi et al., 2014b). Plus précisément, chaque fonction coût liée à un point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  spécifique a été normalisée avec le gain  $\gamma(\theta_e)$  obtenu sur la base du design préliminaire considérant l'unique point d'opération  $\theta_e$ . Cependant, afin de garantir un taux de convergence et un amortissement adéquat sur l'ensemble du domaine d'opération  $\Theta$ , le processus de normalisation n'a pas été appliqué aux fonctions coûts  $\lambda_{1,\theta_e,\delta_e}$ , et  $\lambda_{2,\theta_e,\delta_e}$ . Le problème de synthèse du contrôleur autoséquentiel prend alors la forme suivante :

$$\inf_{\kappa \in \mathcal{K}_{\text{stab}}} \max_{\theta_e \in \Theta_d, \delta \in \Delta_d, i \in \{1, \dots, 6\}} \lambda_i(\kappa, \theta_e, \delta) / \gamma_i(\theta_e), \quad (4.64)$$

où  $\gamma_i(\theta_e) = 1$  pour  $1 \leq i \leq 2$ ,  $\gamma_i(\theta_e) = \gamma(\theta_e)$  pour  $3 \leq i \leq 6$  et  $\mathcal{K}_{\text{stab}} \subset \mathcal{K}$  représente l'ensemble des vecteurs  $\kappa \in \mathcal{K}$  stabilisant internement pour tout  $\theta_e \in \Theta_d$  et  $\delta \in \Delta_d$  le système bouclé au point d'opération  $\theta_e$  et pour la configuration incertaine  $\delta$ .

À des fins de comparaison, deux synthèses des gains du contrôleur autoséquentiel ont été effectuées. La première, qualifiée de synthèse « classique », a été effectuée en négligeant la contribution des TCC. Au niveau de la dynamique linéarisée du contrôleur séquentiel  $\mathcal{C}_l(\kappa, \theta_e, \delta)$  caractérisée par (4.60), cela revient à supposer que  $K_\alpha^{\text{TCC}} = K_M^{\text{TCC}} = 0$ . L'architecture de la dynamique linéaire du système bouclé utilisée à des fins de synthèse correspond alors à celle de la Fig. 4.6 dont on aurait supprimé les composantes en rouge. *A contrario*, la seconde synthèse, dite « avec TCC », considère l'impact des TCC donnés par (4.61a) et (4.61b). L'architecture de contrôle utilisée à des fins de synthèse est alors exactement celle de la Fig. 4.6. Les résultats ainsi obtenus sont résumés dans le Tab. 4.1<sup>6</sup>.

Tableau 4.1 Résultats de la synthèse  $H_\infty$  structurée sur le missile

Synthèse	Norme $H_\infty$ initiale	Norme $H_\infty$ finale	Itérations	Temps de calcul
Classique	5.09	1.11	31	4 min 12 s
Avec TCC	25.9	1.09	78	40 min 24 s

L'intégration des TCC donne lieu à un temps de calcul accru d'un facteur 10. Cela s'explique par la complexité relative des TCC tels qu'exprimés par (4.61a) et (4.61b), ces derniers dépendant de manière non linéaire des paramètres ajustables lors de la synthèse. Pour les

6. Résultats obtenus avec un ordinateur présentant un quad-core intel i7-3630QM cadencé à 2.40GHz avec 16.00GB RAM et MATLAB 2014b.

deux synthèses, le gain final est approximativement de 1.1, indiquant que les contraintes imposées par les fonctions coût sont en grande partie rencontrées. Cependant, si l'on intègre *a posteriori* l'impact des TCC dans l'évaluation du résultat obtenu via la synthèse « classique », on observe une sévère dégradation du gain  $H_\infty$ , ce dernier passant de 1.11 à 6.04. Cette sévère dégradation imputable aux TCC est plus amplement illustrée à la section suivante sur la base de simulations sur le modèle non linéaire.

**Évaluation comparative du comportement du système non linéaire en boucle fermée** Le contrôleur autoséquenté  $\mathcal{C}(\kappa)$  précédemment synthétisé est implémenté sur le système non linéaire d'origine  $\mathcal{S}(\delta)$  tel qu'illustré à la Fig. 4.5. Pour la simulation, le profil du nombre de Mach est généré par (Reichert, 1992) :

$$\begin{cases} \dot{M} = \frac{1}{v_s} \left( -|\eta|g \sin(|\alpha|) + A_x M^2 \cos(\alpha) \right) \\ M(0) = 3.0 \end{cases} \quad (4.65)$$

La réponse du système nominal (i.e., pour  $\delta = \mathbf{0}$ ) en boucle fermée en réponse à une série d'échelons de commande  $\eta_c$  est illustrée à la Fig. 4.8 pour les gains obtenus par les approches avec et sans l'inclusion des TCC dans la phase de synthèse. La réponse en suivi de référence de l'accélération normale du missile est montrée à la Fig. 4.8(a). Ce choix de sortie donne lieu à un système en boucle ouverte qui est à non minimum de phase (Nichols et al., 1993), raison pour laquelle on observe au niveau des réponses temporelles de l'accélération normale un dépassement initial allant dans le sens contraire de l'échelon injecté en référence. En comparant les résultats, on observe que le contrôleur synthétisé en négligeant l'impact des TCC introduit de larges dépassements, ce qui n'est pas le cas des gains obtenus en tenant compte des TCC. Ces dépassements excessifs induisent une traînée importante du missile, débouchant sur une plus grande perte de vitesse au cours de la manœuvre (Fig. 4.8(b)). Ils induisent également des oscillations au niveau de l'angle d'attaque  $\alpha$  (Fig. 4.8(c)) ainsi que de la vitesse en tangage  $q$  (Fig. 4.8(d)). De plus, l'effort de commande illustré par l'évolution de la position de la gouverne  $\delta_t$  (Fig. 4.8(e)) et de sa vitesse  $\dot{\delta}_t$  (Fig. 4.8(f)) est analogue à ce qui a été obtenu dans les différents travaux publiés (Wu et al., 1995). Néanmoins, une réduction significative est observée lorsque les TCC sont inclus dans le processus de synthèse.

L'évolution temporelle des gains du contrôleur est illustrée à la Fig. 4.9. On observe que la meilleure performance obtenue en tenant compte des TCC dans la synthèse n'aboutit pas à des gains plus forts. En effet, l'amplitude des gains  $K_i$  et  $K_q$  est significativement réduite comparativement à l'approche négligeant les TCC, alors que  $K_\eta$  présente une amplitude similaire.

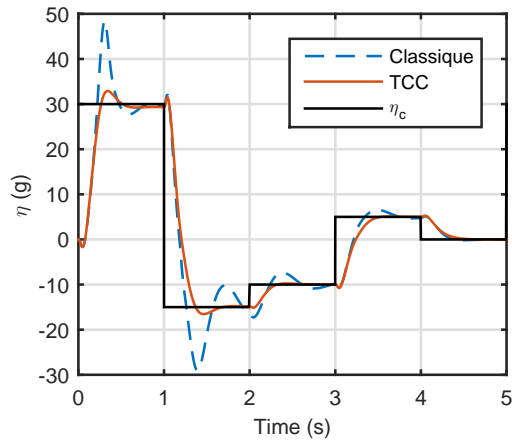
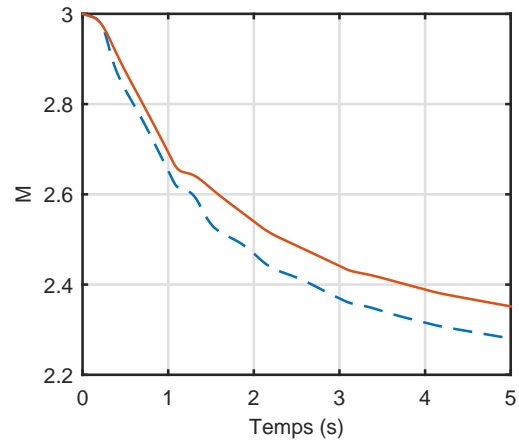
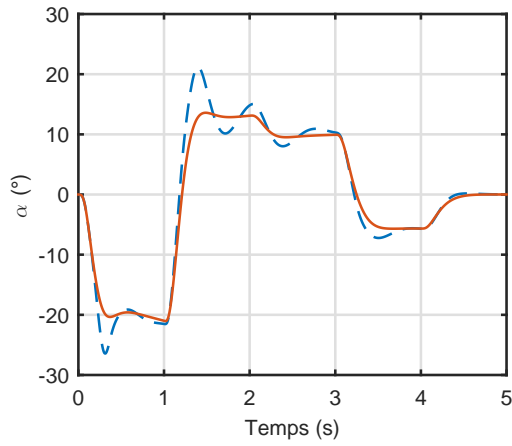
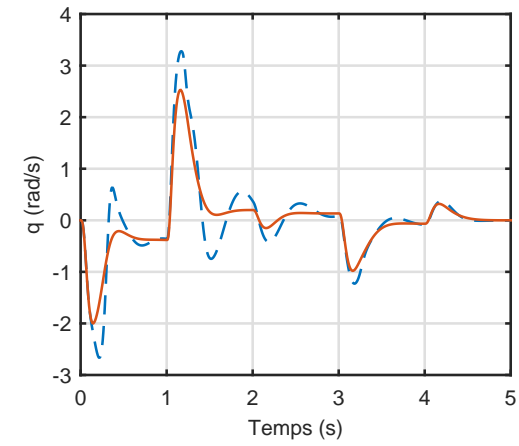
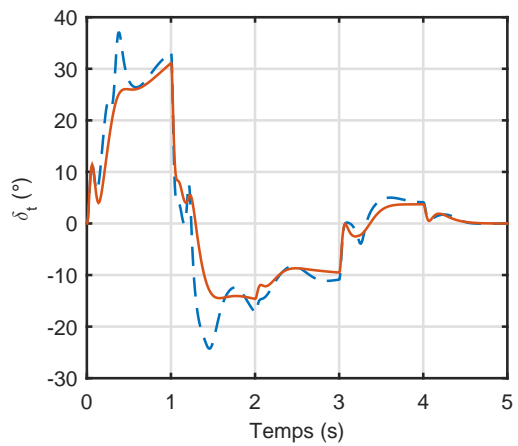
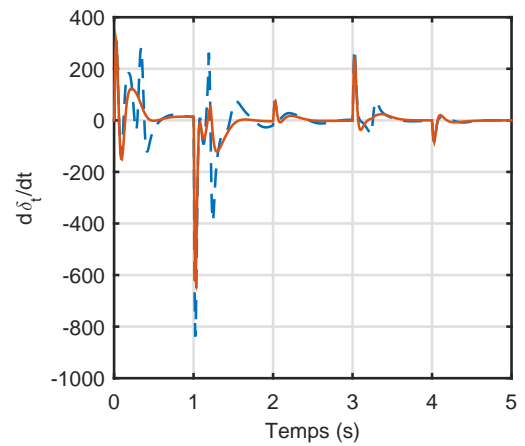
(a) Accélération normale  $\eta$ (b) Nombre de Mach  $M$ (c) Angle d'attaque  $\alpha$ (d) Vitesse en tangage  $q$ (e) Angle de la gouverne  $\delta_t$ (f) Vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ 

Figure 4.8 Réponse temporelle du missile en boucle fermée pour une série d'échelons de référence

La meilleure performance obtenue en incluant les TCC dans le processus de synthèse n'est donc pas nécessairement au prix d'un effort de commande plus fort et/ou d'une amplitude des gains plus élevée.

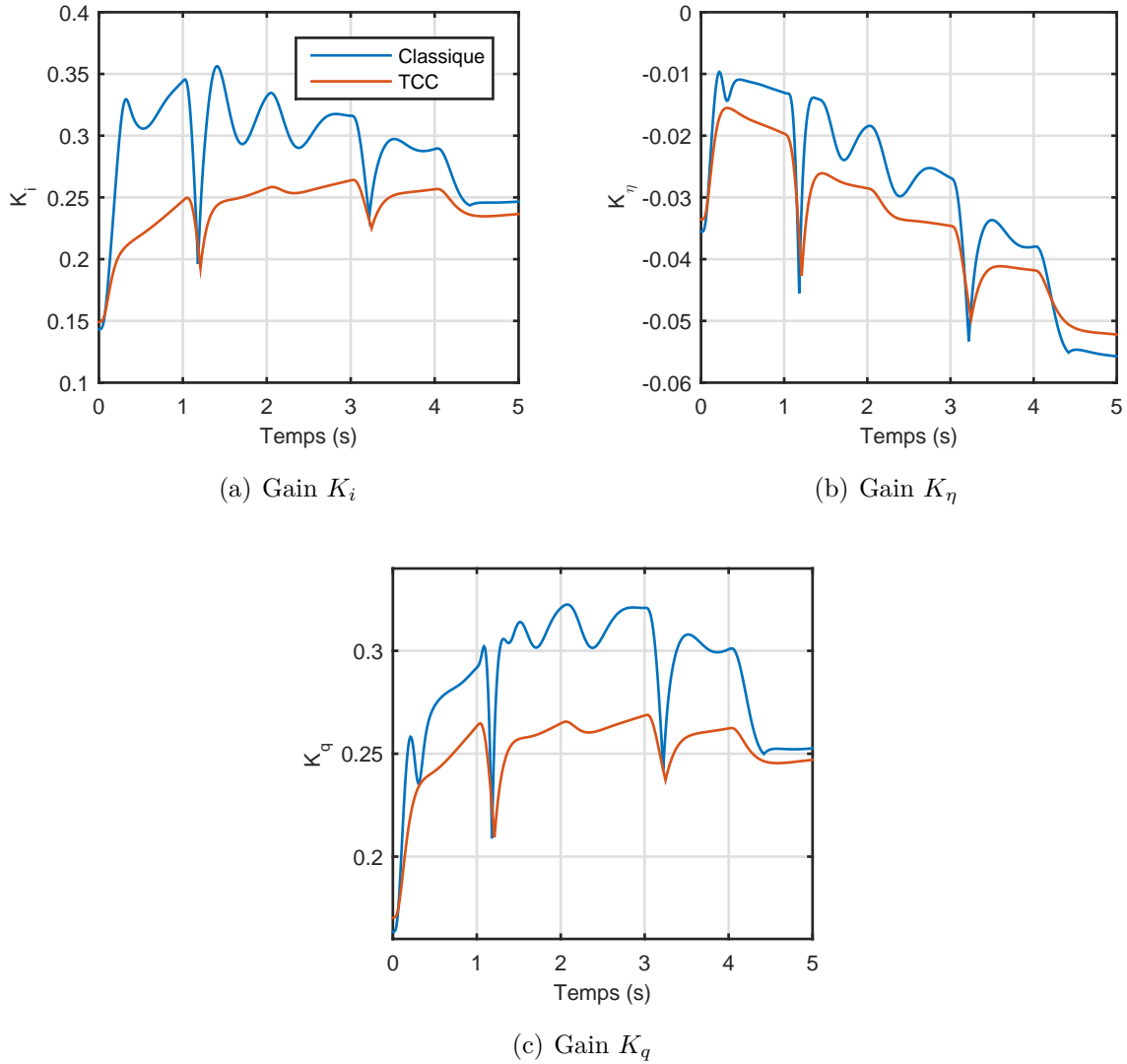


Figure 4.9 Évolution des gains du contrôleur lorsque placé en boucle fermée avec le missile pour une série d'échelons de référence

La performance du système bouclé est évaluée à la Fig. 4.10 pour des coefficients aérodynamiques perturbés d'une amplitude maximale de  $\pm 25\%$ . Les Figs. 4.10(a) et 4.10(b) indiquent que la stabilité du système bouclé est préservée pour les deux approches testées. Néanmoins, le contrôleur synthétisé en négligeant les TCC présente des dépassements très importants. *A contrario*, en dépit de l'amplitude importante des incertitudes, le contrôleur synthétisé en

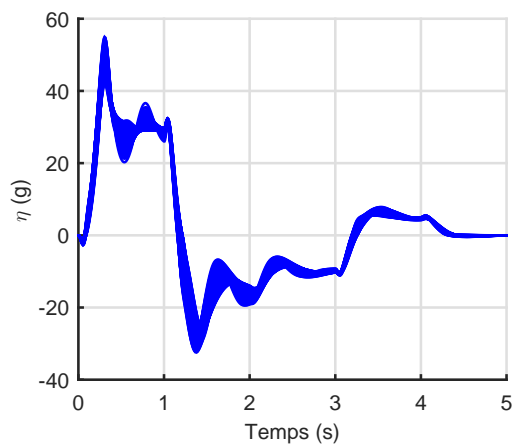
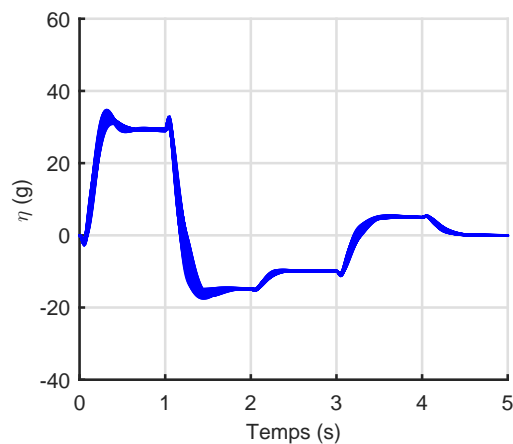
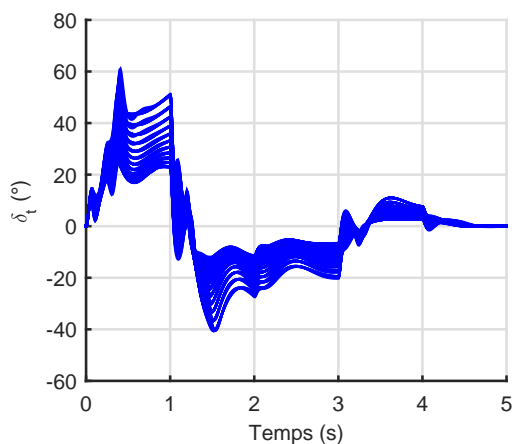
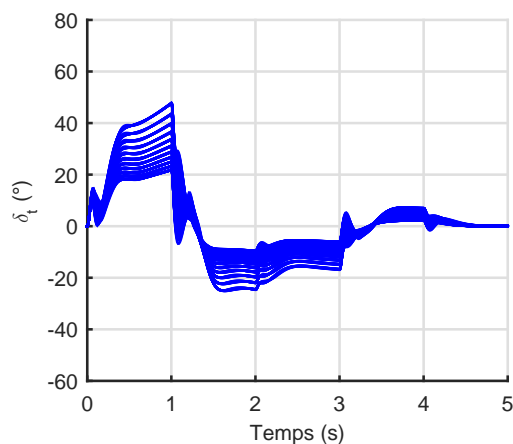
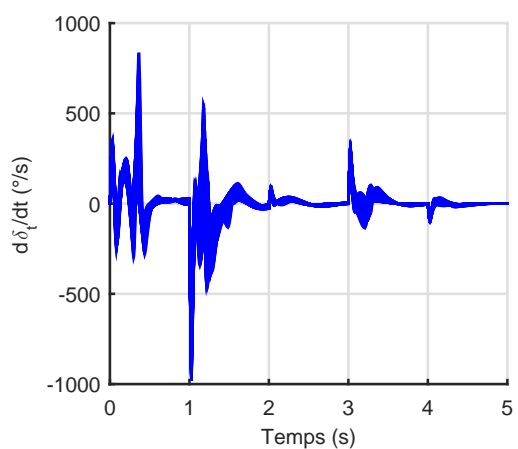
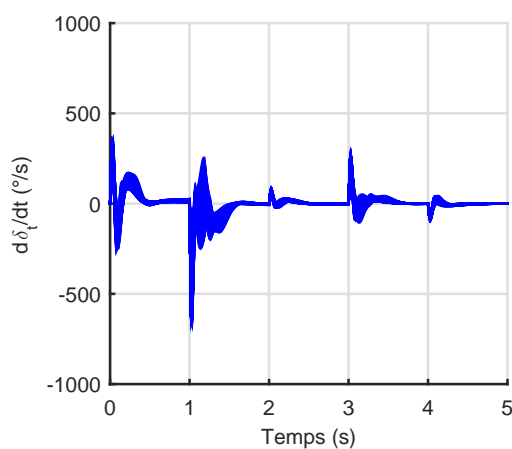
(a) Synthèse classique - accélération  $\eta$ (b) Synthèse avec TCC - accélération  $\eta$ (c) Synthèse classique - angle de la gouverne  $\delta_t$ (d) Synthèse avec TCC - angle de la gouverne  $\delta_t$ (e) Synthèse classique - vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ (f) Synthèse avec TCC - vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ 

Figure 4.10 Réponse du missile en boucle fermée avec des coefficients aérodynamiques perturbés avec une amplitude maximale de  $\pm 25\%$



incorporant l'impact des TCC présente un niveau de performance satisfaisant, autant pour le temps de réponse que le dépassement. Qui plus est, le système est opéré avec un effort de commande moins excessif comme cela est illustré par les Figs. 4.10(c) et 4.10(f). Ces résultats tendent à démontrer les bénéfices de l'intégration des TCC dans le design du contrôleur séquencé.

#### 4.1.4.2 Suppression active du *flutter* pour le BACT

Les phénomènes aéroélastiques, introduits par l'interaction des forces structurelles, inertielles et aérodynamiques (Mukhopadhyay, 2003), sont à même de dégrader de manière dramatique les performances d'un avion et de compromettre l'intégrité de sa structure. L'un des phénomènes aéroélastiques les plus critiques pour les avions conventionnels est le *flutter* (Shearer and Cesnik, 2007; Su and S. Cesnik, 2010). Ce dernier est une instabilité aéroélastique de type oscillatoire caractérisée par une sévère dégradation de l'amortissement de la structure résultant de la présence d'efforts aérodynamiques instationnaires. Il en résulte de manière générale l'émergence d'un cycle limite d'oscillations (Dowell et al., 2004) causant la dégradation de la manœuvrabilité de l'appareil et la réduction de sa durée de vie en fatigue dû aux cycles de contraintes sous-jacents. Avec l'allégement des structures des avions modernes découlant de la volonté des avionneurs d'offrir des avions toujours plus performants et économes en carburant, les phénomènes aéroélastiques deviennent de plus en plus prépondérants, requérant des stratégies de commande dites actives<sup>7</sup>. Dans ce cadre, le modèle dit BACT a été développé par le *Langley Research Center* de la NASA afin de reproduire en soufflerie les phénomènes aéroélastiques notamment observés sur l'avion de combat américain F-16 (Bennett et al., 2000; Scott et al., 2000; Waszak, 2001). Le BACT consiste en une section d'aile à deux degrés de liberté capturant le premier mode en flexion et le premier mode en torsion d'une aile flexible. Ce modèle fournit une base pour analyser théoriquement et expérimentale un certain nombre de phénomènes aéroélastiques tels que le décrochage, le *flutter* et l'émergence de cycles limites d'oscillation. Dans cette sous-section, on se focalise sur le phénomène du *flutter* et sa suppression par le moyen d'une stratégie de contrôle de type séquençement des gains. Les résultats présentés sont issus de l'article de conférence (Lhachemi et al., 2017b).

**Modèle du BACT et mise en évidence du phénomène de *flutter*.** Le BACT, tel qu'illustré à la Fig. 4.11, est une section d'aile aéroélastique à deux degrés de liberté que sont le déplacement en flexion  $h$  et celui en torsion  $\alpha$ . La section d'aile est supposée actionnée par l'intermédiaire d'une gouverne unique située à l'arrière de l'aile (on parle de *trailing edge*

---

7. En opposition aux solutions passives consistant en l'accroissement de la rigidité de sa structure, généralement accompagné d'un accroissement de la masse de l'appareil.

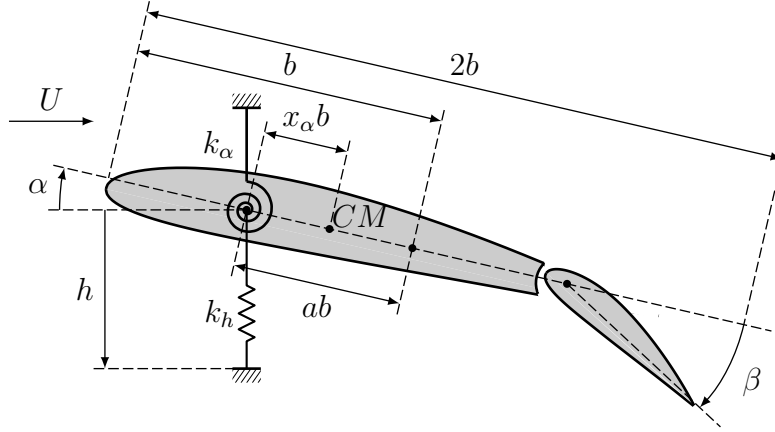


Figure 4.11 Modèle aéroélastique du BACT

*flap*). Les équations de la dynamique du BACT, capturant le premier mode en flexion et le premier mode en torsion du système, sont données par (Strganac et al., 2000) :

$$\begin{bmatrix} m_T & m_W x_\alpha b \\ m_W x_\alpha b & I_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{h} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c_h & 0 \\ 0 & c_\alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} k_h & 0 \\ 0 & (1 + \delta)k_\alpha(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ \alpha \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -L \\ M \end{bmatrix}. \quad (4.66)$$

Les paramètres du modèle sont la masse totale du dispositif  $m_T$ , la masse de l'aile  $m_W$ , la demi-corde de l'aile  $b$ , le moment d'inertie  $I_\alpha$  et la distance adimensionnée<sup>8</sup> entre le centre de masse et l'axe d'élasticité. Les coefficients d'amortissement en torsion et en flexion sont respectivement donnés par  $c_\alpha$  et  $c_h$ . Le coefficient d'élasticité structurel en flexion  $k_h$  est une constante, tandis que le coefficient d'élasticité structurel en torsion  $k_\alpha$  est, sur la base de mesures expérimentales, modélisé par un polynôme d'ordre 4 de l'angle de torsion :

$$k_\alpha(\alpha) \triangleq k_{\alpha 0} + k_{\alpha 1}\alpha + k_{\alpha 2}\alpha^2 + k_{\alpha 3}\alpha^3 + k_{\alpha 4}\alpha^4. \quad (4.67)$$

Étant donné que le modèle de  $k_\alpha$  résulte d'une modélisation *ad hoc* obtenue sur la base de résultats expérimentaux, on introduit le paramètre incertain  $\delta \in \Delta = [-0.1, 0.1]$  portant sur l'amplitude de  $k_\alpha$ . Les efforts aéroélastiques sont modélisés sous forme quasi-stationnaire comme suit :

$$L = \rho U^2 b c_{l_\alpha} \left[ \alpha + \frac{\dot{h}}{U} + (0.5 - a)b \frac{\dot{\alpha}}{U} \right] + \rho U^2 b c_{l_\beta} \beta, \quad (4.68a)$$

$$M = \rho U^2 b^2 c_{m_\alpha} \left[ \alpha + \frac{\dot{h}}{U} + (0.5 - a)b \frac{\dot{\alpha}}{U} \right] + \rho U^2 b^2 c_{m_\beta} \beta, \quad (4.68b)$$

---

8. Relativement à  $b$ .

où  $L$  représente la portance de l'aile générée par le flot d'air, alors que  $M$  dénote le moment aérodynamique en tangage. Les paramètres de ce modèle sont  $\rho$  la masse volumique de l'air,  $U \geq 0$  la vitesse d'écoulement du flot d'air,  $a$  la distance adimensionnée<sup>8</sup> entre le milieu de la corde et l'axe d'élasticité. Les constantes  $c_{l_\alpha}$  et  $c_{m_\alpha}$  représentent, respectivement, les coefficients aérodynamiques de portance et de moment en tangage relativement à l'angle d'attaque  $\alpha$ . Les même grandeurs, définies relativement à l'angle de la gouverne  $\beta$ , sont notées  $c_{l_\beta}$  et  $c_{m_\beta}$ . Finalement, la dynamique de la gouverne est modélisée par le système du second ordre suivant (Block and Strganac, 1998) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \ddot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -K_b & -C_b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ K_b \end{bmatrix} \beta_c, \quad (4.69)$$

où  $\beta_c$  représente le braquage commandé de la gouverne. Étant donné que les valeurs numériques utilisées pour ce modèle peuvent varier de manière significative d'une publication à l'autre, les valeurs utilisées dans cette étude sont résumées dans le Tab. 4.2 ci-dessous (Strganac et al., 2000).

Tableau 4.2 Valeurs numériques des paramètres du BACT

$a$	$= -0.6847$	$b$	$= 0.135 \text{ m}$	$c_h$	$= 27.43 \text{ N} \cdot \text{s/m}$
$c_{l_\alpha}$	$= 6.28$	$c_{m_\alpha}$	$= (0.5 + a)c_{l_\alpha}$	$c_{l_\beta}$	$= 3.358$
$c_{m_\beta}$	$= -1.94$	$c_\alpha$	$= 0.036 \text{ N} \cdot \text{s}$	$I_\alpha$	$= m_W x_\alpha^2 b^2 + 0.0517 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
$k_h$	$= 2844.4 \text{ N/m}$	$k_{\alpha 0}$	$= 6.833 \text{ N} \cdot \text{m}$	$k_{\alpha 1}$	$= 9.967 \text{ N} \cdot \text{m}$
$k_{\alpha 2}$	$= 667.685 \text{ N} \cdot \text{m}$	$k_{\alpha 3}$	$= 26.569 \text{ N} \cdot \text{m}$	$k_{\alpha 4}$	$= -5087.9 \text{ N} \cdot \text{m}$
$m_T$	$= 12.387 \text{ kg}$	$m_W$	$= 2.046 \text{ kg}$	$x_\alpha$	$= [0.0873 - (b + ab)]/b$
$\rho$	$= 1.225 \text{ kg/m}^3$	$C_b$	$= 50 \text{ s}^{-1}$	$K_b$	$= 2500 \text{ s}^{-2}$

Autant à des fins d'analyse que de design d'un contrôleur, les équations de la dynamique du BACT (4.66) et (4.69) sont reformulées sous la forme d'une représentation d'état. On suppose ici que l'ensemble des états de la section d'aile sont utilisables à des fins de contrôle. Le vecteur d'état et le vecteur de sortie sont alors définis par :

$$\begin{cases} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} h & \alpha & \dot{h} & \dot{\alpha} & \beta & \dot{\beta} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \end{bmatrix}^\top \\ \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{bmatrix}^\top \end{cases} \quad (4.70)$$

Cela donne lieu à la représentation d'état donnée par (Ko et al., 1997) :

$$\mathcal{S}(\delta) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, U, \delta) + \mathbf{g}\beta_c \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}) \end{cases} \quad (4.71)$$

avec

$$f(\mathbf{x}, U, \delta) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -k_1 k_h(x_1)x_1 - [k_2 U^2 + c_5(1 + \delta)k_\alpha(x_2)]x_2 - c_1(U)x_3 - c_2(U)x_4 + g_3 U^2 x_5 \\ -k_3 k_h(x_1)x_1 - [k_4 U^2 + c_6(1 + \delta)k_\alpha(x_2)]x_2 - c_3(U)x_3 - c_4(U)x_4 + g_4 U^2 x_5 \\ x_6 \\ -K_b x_5 - C_b x_6 \end{bmatrix}, \quad (4.72a)$$

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_b \end{bmatrix}, \quad h(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, \quad (4.72b)$$

où les différents éléments sont définis dans le Tab. 4.3.

Tableau 4.3 Paramètres de la représentation d'état du BACT

$d$	$= m_T I_\alpha - m_W^2 x_\alpha^2 b^2$
$k_1$	$= I_\alpha / d$
$k_2$	$= (I_\alpha \rho b c_{l_\alpha} + m_W x_\alpha \rho b^3 c_{m_\alpha}) / d$
$k_3$	$= -m_W x_\alpha b / d$
$k_4$	$= -(m_W x_\alpha \rho b^2 c_{l_\alpha} + m_T \rho b^2 c_{m_\alpha}) / d$
$c_1(U)$	$= [I_\alpha (c_h + \rho U b c_{l_\alpha}) + m_W x_\alpha \rho U b^3 c_{m_\alpha}] / d$
$c_2(U)$	$= [I_\alpha \rho U b^2 c_{l_\alpha} (0.5 - a) - m_W x_\alpha b c_\alpha + m_W x_\alpha \rho U b^4 c_{m_\alpha} (0.5 - a)] / d$
$c_3(U)$	$= -[m_W x_\alpha b (c_h + \rho U b c_{l_\alpha}) + m_T \rho U b^2 c_{m_\alpha}] / d$
$c_4(U)$	$= [m_T (c_\alpha - \rho U b^3 c_{m_\alpha} (0.5 - a)) - m_W x_\alpha \rho U b^3 c_{l_\alpha} (0.5 - a)] / d$
$c_5$	$= -m_W x_\alpha b / d$
$c_6$	$= m_T / d$
$g_3$	$= -(I_\alpha \rho b c_{l_\beta} + m_W x_\alpha b^3 \rho c_{m_\beta}) / d$
$g_4$	$= (m_W x_\alpha \rho b^2 c_{l_\beta} + m_T \rho b^2 c_{m_\beta}) / d$

Afin de mettre en avant les caractéristiques du BACT, il est intéressant de s'intéresser à son comportement en boucle ouverte. En effet, ce modèle a été développé de manière à pouvoir reproduire le phénomène de *flutter* qui se caractérise par une oscillation en flexion et en torsion de l'aile. Le BACT est simulé en boucle ouverte pour une vitesse d'écoulement de l'air fixée à  $U = 15$  m/s et en prenant pour condition initiale  $\alpha_0 = 5^\circ$  et  $h_0 = 0.01$  m (les autres conditions initiales sont nulles). Les résultats obtenus sont illustrés à la Fig. 4.12. La condition initiale, en termes de position de la section d'aile, est indiquée par une croix rouge.

On observe ainsi que le modèle du BACT exhibe bien un comportement de type cycle limite d'oscillation, autant dans le déplacement en torsion que celui en flexion, i.e., le phénomène aéroélastique de *flutter*.

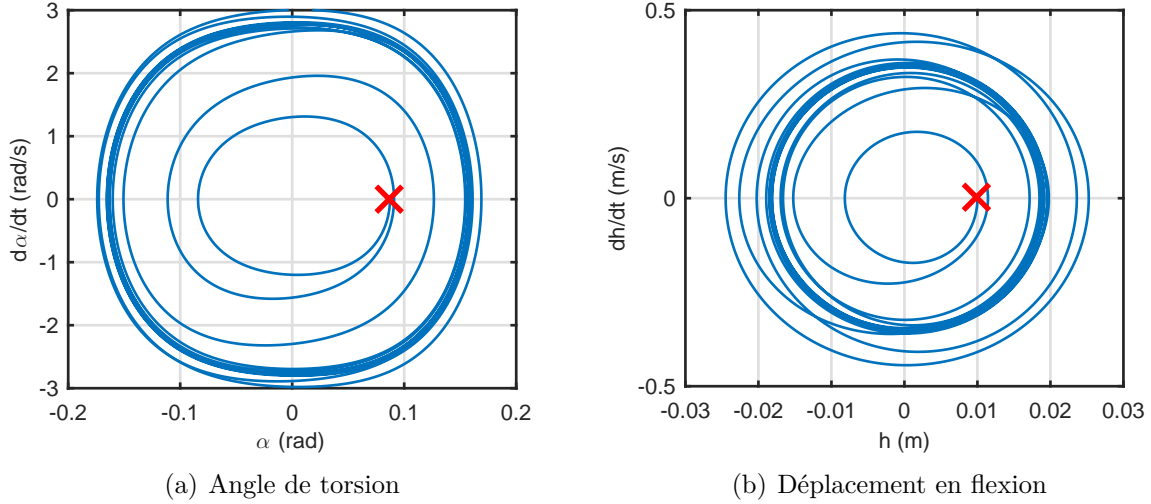


Figure 4.12 Comportement en boucle ouverte du BACT pour la vitesse d'écoulement de l'air  $U = 15$  m/s

L'objectif de la stratégie de contrôle, à mettre en place sur la plage de vitesse d'écoulement de l'air  $10 \text{ m/s} \leq U \leq 20 \text{ m/s}$ , est donc triple :

- lorsque le contrôleur est actif, il doit permettre d'empêcher le système d'entrer dans un cycle limite d'oscillation ;
- lorsque le contrôleur est activé alors que le système est entré dans un cycle limite d'oscillation, il doit parvenir à l'en sortir ;
- le contrôleur doit permettre de contrôler la position angulaire  $\alpha$  de l'aile vis-à-vis d'un signal de référence  $\alpha_r \in [-10^\circ, +10^\circ]$  pour des entrées de type échelon.

**Motivation pour une approche de type séquençement des gains** Dans les travaux reportés dans la littérature, la majorité des techniques employées pour le contrôle du BACT repose sur la méthode de linéarisation par retour de sortie en considérant soit l'angle de torsion  $\alpha$ , soit le déplacement en flexion  $h$ , comme étant la sortie de contrôle (Ko et al., 1999; Bhoir and Singh, 2004b). Ces approches ont été étendues afin d'inclure des aspects de commande adaptative pour gérer les incertitudes paramétriques du modèle (Singh and Brenner, 2003; Behal et al., 2006a; Lee and Singh, 2009; Elhami and Narab, 2012; Zhang and Singh, 2001; Cassaro et al., 2014). Cependant, lorsque l'angle de torsion (respectivement le déplacement en flexion) est choisi comme sortie, la dynamique du déplacement en flexion

(respectivement l'angle de torsion) fait partie de la dynamique des zéros. Dès lors, la linéarisation par retour de sortie n'est que partielle et il n'est pas possible d'améliorer simultanément l'amortissement pour les déplacements en torsion et en flexion. Pire, dépendamment de la position de l'axe aéroélastique et de la vitesse de l'écoulement de l'air, la dynamique des zéros peut être instable (Ko et al., 1997, 1998), rendant la méthode de linéarisation par retour de sortie inapplicable.

À la vue des éléments précédents, il est alors raisonnable de se demander si une sortie plus adéquate pourrait être choisie de manière à éviter l'émergence d'une dynamique des zéros. La réponse à cette question est négative comme cela est démontré en Annexe C. En effet, il y est montré que le BACT, avec une seule surface de contrôle, est sous-actionné dans la mesure où le système n'est pas linéarisable par retour de sortie. En d'autres termes, quel que soit le choix de sortie  $y = h(\mathbf{x})$ , le système n'est que partiellement linéarisable par retour de sortie. Cela implique donc que les méthodes non linéaires basées sur une approche de type linéarisation par retour de sortie ne peuvent contrôler l'intégralité de la dynamique du système, s'exposant à une dynamique des zéros pouvant potentiellement être mal amortie, voire instable. Afin d'éviter ce problème, il a été proposé dans la littérature d'ajouter une seconde surface de contrôle à l'avant de l'aile (on parle de *leading edge flap*), ayant pour effet de rendre le BACT linéarisable par retour de sortie pour  $\mathbf{y} = [\alpha \ h]^\top$  (Platanitis and Strganac, 2004, 2005; Wang et al., 2012; Lee and Singh, 2009). Cependant, cette solution entraîne un accroissement de la complexité de la structure de l'appareil et du schéma de contrôle.

Puisque le BACT avec une seule surface de contrôle est contrôlable au voisinage de chacun de ses points d'équilibre (Block and Strganac, 1998; Kelkar and Joshi, 2000), une solution alternative est de recourir aux méthodes de synthèse LTI. Cependant, dû à la plage de variation de la vitesse d'écoulement de l'air et au comportement non local des cycles limites d'oscillation, un simple contrôleur LTI peut se révéler insuffisant (Strganac et al., 2000). Pour cette raison, des contrôleurs non linéaires obtenus sur la base de la théorie des systèmes LTI ont été considérés avec notamment des approches portant sur la résolution d'équations de Riccati dépendant du vecteur d'état (Mracek and Cloutier, 1998; Tadi, 2003; Bhoir and Singh, 2005) et le séquençement de gains (Barker et al., 1999; Barker and Balas, 2000). Dans ces deux derniers travaux, le séquençement des gains a été effectué pour une variable de séquençement prise comme étant la vitesse d'écoulement de l'air  $U$ . On se propose ici d'étendre cette approche en prenant comme variable de séquençement additionnelle l'angle de torsion  $\alpha$ . Ce choix vise à tenir compte de la physique du système afin d'améliorer les performances puisque, comme cela a été vu pour la simulation en boucle ouverte de la Fig. 4.12, le *flutter* peut entraîner des angles  $\alpha$  relativement importants.

**Architecture du contrôleur séquencé et TCC** La stratégie de contrôle adoptée étant celle du séquençement des gains, la dynamique du système  $\mathcal{S}(\delta)$  est mise à l'équilibre puis linéarisée au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e = (\alpha_e, U_e)$  pour la configuration incertaine  $\delta \in \Delta$ . En particulier, au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e = (\alpha_e, U_e)$ , l'équilibre du système est caractérisé par  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = [h_e(\boldsymbol{\theta}_e) \ \alpha_e \ 0 \ 0 \ \beta_e(\boldsymbol{\theta}_e) \ 0]^\top$ ,  $\beta_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \beta_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = [h_e(\boldsymbol{\theta}_e) \ \alpha_e \ 0 \ 0]^\top$  et  $w_{m_e}(\boldsymbol{\theta}_e) = U_e$ , où

$$\beta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \frac{(k_3 k_2 - k_1 k_4) U_e^2 + (k_3 c_5 - k_1 c_6)(1 + \delta) k_\alpha(\alpha_e)}{(k_3 g_3 - k_1 g_4) U_e^2} \alpha_e, \quad (4.73)$$

$$h_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \frac{(g_4 k_2 - g_3 k_4) U_e^2 + (g_4 c_5 - g_3 c_6)(1 + \delta) k_\alpha(\alpha_e)}{k_3 g_3 - k_1 g_4} \alpha_e. \quad (4.74)$$

Le terme de droite de (4.73), ainsi que celui de (4.74), sont bien définis puisque  $k_3 g_3 - k_1 g_4 = -\rho b^2 c_{m\beta}/d \neq 0$ .

Au point d'équilibre obtenu, la dynamique du système non linéaire  $\mathcal{S}(\delta)$  est linéarisée, donnant lieu à la dynamique LTI suivante :

$$\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) \triangleq \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta x}} = \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) \boldsymbol{\delta x} + \mathbf{B}_{\beta_e} \delta \beta_c + \mathbf{B}_U(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) \delta U \\ \delta \mathbf{y} = \mathbf{C} \boldsymbol{\delta x} \end{cases} \quad (4.75)$$

avec

$$\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -k_1 & -k_2 U_e^2 - c_5(1 + \delta)(k_\alpha(\alpha_e) + \alpha_e k'_\alpha(\alpha_e)) & -c_1(U_e) & -c_2(U_e) & g_3 U_e^2 & 0 \\ -k_3 & -k_4 U_e^2 - c_6(1 + \delta)(k_\alpha(\alpha_e) + \alpha_e k'_\alpha(\alpha_e)) & -c_3(U_e) & -c_4(U_e) & g_4 U_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -K_b & -C_b \end{bmatrix}, \quad (4.76a)$$

$$\mathbf{B}_{\beta_c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ K_b \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_U(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2U_e(g_3 \beta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) - k_2 \alpha_e) \\ 2U_e(g_4 \beta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) - k_4 \alpha_e) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = [\mathbf{I}_4 \ \mathbf{0}_{4 \times 2}]. \quad (4.76b)$$

Le contrôleur séquencé adopté ici est illustré à la Fig. 4.13. Il consiste en quatre bouclages internes portant sur  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $h$  et  $\dot{h}$ , ainsi qu'un bouclage externe de type intégral portant sur

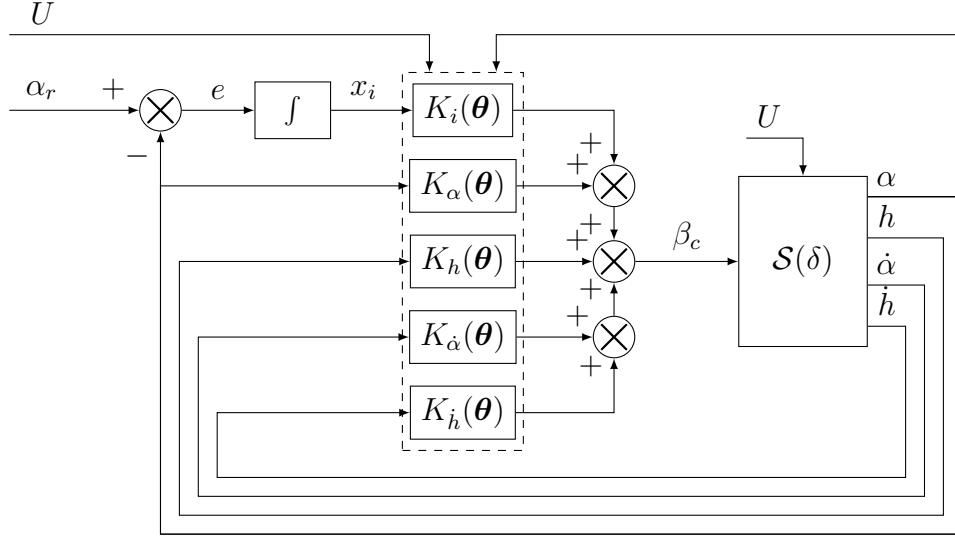


Figure 4.13 BACT en boucle fermée avec l'architecture de contrôleur séquencé proposée

l'erreur de suivi  $e = \alpha_r - \alpha$ . La dynamique du contrôleur est donnée par :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{x}_i = \alpha_r - \alpha \\ \beta_c = K_i(\boldsymbol{\theta})x_i + K_\alpha(\boldsymbol{\theta})\alpha + K_h(\boldsymbol{\theta})h + K_{\dot{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})\dot{\alpha} + K_{\dot{h}}(\boldsymbol{\theta})\dot{h} \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, U) \end{cases} \quad (4.77)$$

où les gains  $K_h$ ,  $K_\alpha$ ,  $K_{\dot{h}}$ ,  $K_{\dot{\alpha}}$  et  $K_i$  sont séquencés relativement à  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha, U)$ . Le vecteur  $\boldsymbol{\kappa}$  représente quant à lui les paramètres ajustables dans la synthèse. Au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ , la condition d'équilibre du contrôleur, lorsque placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}(\delta)$ , est donnée par  $\alpha_e = \alpha_r$  et la composante intégrale  $x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  satisfait :

$$\beta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = K_i(\boldsymbol{\theta}_e)x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) + K_\alpha(\boldsymbol{\theta}_e)\alpha_e + K_h(\boldsymbol{\theta}_e)h_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta). \quad (4.78)$$

En supposant que  $K_i(\boldsymbol{\theta}_e) \neq 0$ ,  $x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  est donc caractérisé par les conditions d'équilibre  $\beta_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  et  $h_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$ , respectivement données par (4.73) et (4.74).

Puisque la variable de séquencement  $\alpha$  correspond à un signal endogène, le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ , une fois placé en boucle fermée avec  $\mathcal{S}(\delta)$ , exhibe une dynamique non linéaire. Le calcul de sa dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  donne :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta \alpha_r - \delta \alpha \\ \delta \beta_c = K_i(\boldsymbol{\theta}_e)\delta x_i + [K_\alpha(\boldsymbol{\theta}_e) + K_\alpha^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)]\delta \alpha + K_h(\boldsymbol{\theta}_e)\delta h \\ \quad + K_{\dot{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}_e)\delta \dot{\alpha} + K_{\dot{h}}(\boldsymbol{\theta}_e)\delta \dot{h} + K_U^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)\delta U \end{cases} \quad (4.79)$$



où les TCC, compte tenu de (4.78), sont donnés par :

$$K_{\alpha}^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} \beta_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) + \left[ \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial \alpha} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] \alpha_e \quad (4.80a)$$

$$+ \left[ \frac{\partial K_h}{\partial \alpha} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_h(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \frac{\partial K_i}{\partial \alpha} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] h_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta),$$

$$K_U^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \frac{1}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \frac{\partial K_i}{\partial U} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} \beta_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) + \left[ \frac{\partial K_{\alpha}}{\partial U} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_{\alpha}(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \frac{\partial K_i}{\partial U} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] \alpha_e \quad (4.80b)$$

$$+ \left[ \frac{\partial K_h}{\partial U} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} - \frac{K_h(\boldsymbol{\theta}_e)}{K_i(\boldsymbol{\theta}_e)} \frac{\partial K_i}{\partial U} \bigg|_{\boldsymbol{\theta}_e} \right] h_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta).$$

La dynamique du système en boucle fermée linéarisée au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  ainsi obtenue est illustrée à la Fig. 4.14. Conformément à l'étude générale des TCC effectuée dans le Chapitre 3, on note l'apparition d'un bouclage interne de gain  $K_{\alpha}^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  introduit par la nature endogène de la variable de séquençement  $\alpha$ , ainsi qu'une entrée de perturbation  $K_U^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  introduite par la nature exogène de la variable de séquençement  $U$ .

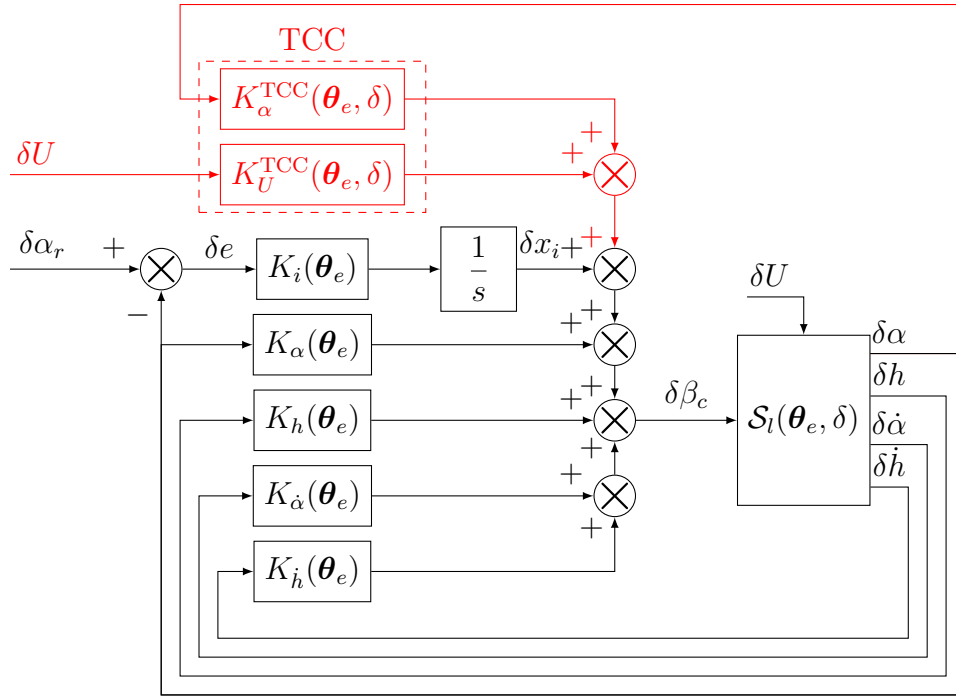


Figure 4.14 Dynamique linéarisée du BACT en boucle fermée utilisée à des fins de synthèse

Afin de tenir compte de manière explicite des TCC, on introduit une structure de séquençement pour les gains du contrôleur. Dans cette étude, on opte pour un séquençement sous forme de polynômes quadratiques des variables de séquençement. En d'autres termes, pour

tout gain  $K \in \{K_i, K_\alpha, K_h, K_{\dot{\alpha}}, K_{\dot{h}}\}$ , on impose *a priori* :

$$\forall \boldsymbol{\theta} = (U, \alpha) \in \Theta, K(\boldsymbol{\theta}) = K_{00} + K_{10}U + K_{01}|\alpha| + K_{20}U^2 + K_{11}U|\alpha| + K_{02}|\alpha|^2, \quad (4.81)$$

où  $K_{00}, K_{10}, \dots, K_{02}$  constituent les paramètres ajustables du contrôleur séquencé. De la sorte, l'ensemble des 30 paramètres ajustables liés aux cinq gains séquencés  $K_i, K_\alpha, K_h, K_{\dot{\alpha}}$ , et  $K_{\dot{h}}$  sont réunis dans le vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{30}$ . Comme dans le cas du missile, la valeur absolue est utilisée afin de tirer avantage des propriétés de symétrie du système. En l'occurrence le modèle du BACT n'est pas réellement symétrique relativement à  $\alpha = 0$  puisque  $k_\alpha$  n'est pas une fonction paire. Néanmoins, les dynamiques  $\mathcal{C}_l((U_e, \alpha_e), \delta)$  et  $\mathcal{C}_l((U_e, -\alpha_e), \delta)$  sont numériquement très proches sur la plage de fonctionnement du système.

On calcule à présent de manière explicite les dérivées partielles des gains séquencés intervenant dans les TCC (4.80a) et (4.80b). Pour  $K \in \{K_i, K_\alpha, K_h, K_{\dot{\alpha}}, K_{\dot{h}}\}$  on a :

$$\forall (\alpha, M) \in \Theta, \begin{cases} \frac{\partial K}{\partial \alpha} = \text{sign}(\alpha) (K_{01} + K_{11}U + 2K_{02}|\alpha|), \text{ lorsque } \alpha \neq 0 \\ \frac{\partial K}{\partial U} = K_{10} + K_{11}|\alpha| + 2K_{20}U \end{cases} \quad (4.82)$$

Une nouvelle fois, la formule de séquencement (4.81) implique que la dérivée partielle  $\partial K / \partial \alpha$  n'existe pas en  $\alpha = 0$ . Néanmoins, par un raisonnement analogue à celui effectué sur le missile, la dynamique linéarisée donnée par (4.79) demeure valide avec  $K_\alpha^{\text{TCC}}((0, M_e), \boldsymbol{\delta}) = 0$ . Ce résultat est compatible avec (4.82) en adoptant la convention  $\text{sign}(0) = 0$ .

**Synthèse du contrôleur séquencé** Afin de résoudre ce problème de synthèse par l'utilisation des méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée, les critères de performances sont reformulés sous la forme de contraintes  $H_\infty$  et placement de pôles.

- La première fonction coût  $\lambda_1(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  vise à garantir un taux de convergence minimal de  $\alpha_p = -0.3$  du système bouclé. La seconde fonction coût  $\lambda_2(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  est définie pour assurer un taux d'amortissement minimal  $\xi_p = 0.2$ . Même s'il serait désirable d'imposer une valeur de  $\xi_p$  plus élevée, cela aboutirait à imposer des contraintes de design trop sévères sur les pôles les plus rapides du BACT qui sont relativement mal amortis, pouvant aboutir à des efforts de commande importants.
- La performance en suivi de référence quant à l'angle de torsion  $\alpha$  vis-à-vis du signal de référence  $\alpha_r$  est spécifiée en contraignant la fonction de transfert  $T_{\alpha_r \rightarrow e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  liant  $\alpha_r$  à l'erreur en suivi  $e = \alpha_r - \alpha$ . Le suivi de référence étant désiré aux basses et moyennes fréquences, on introduit la contrainte  $\lambda_3(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \|T_{\alpha_r \rightarrow e}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)W_3\|_\infty$  où la pondération est sélectionnée comme étant  $W_3 = (s + 2)/(5(s + \varepsilon))$  avec  $\varepsilon = 10^{-6}$ .

- De manière à éviter des vitesses de braquage excessives de la gouverne, on introduit la fonction coût  $\lambda_4(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \|T_{\alpha_r \rightarrow \dot{\beta}}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)W_4\|_\infty$  où  $W_4 = 0.05s/(s+1)$ .
- Finalement, de manière à prévenir l'entrée de signaux hautes fréquences dans l'actionneur, on considère la fonction coût  $\lambda_5(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \|T_{\alpha_r \rightarrow \beta_c}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)W_5\|_\infty$  avec la pondération  $W_5 = 0.6s/(s+10)$ .

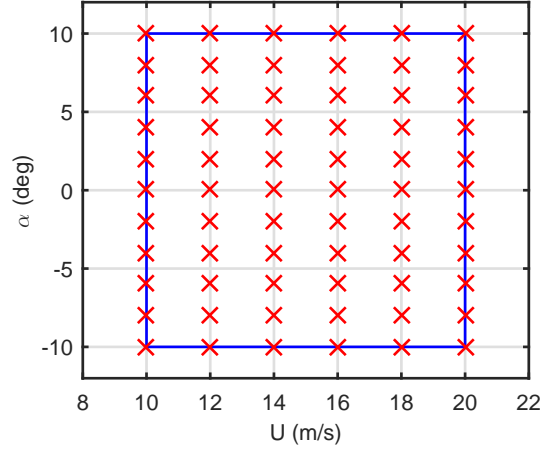


Figure 4.15 Discretisation du domaine d'opération du BACT

La discrétisation du domaine d'opération  $\Theta_d \subset \Theta$  considérée à des fins de synthèse, telle qu'illustrée à la Fig. 4.15, est composée de 66 points d'opération. Le domaine incertain est quant à lui discrétisé comme suit :  $\Delta_d = \{-0.1, -0.05, 0, 0.05, 0.1\} \subset \Delta$ . Similairement au design sur le missile, une condition initiale adéquate du contrôleur séquencé est obtenue sur la base d'un design point à point et d'une méthode des moindres carrés. Le problème de synthèse du contrôleur autoséquencé prend alors la forme suivante :

$$\inf_{\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}_{\text{stab}}} \max_{\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta_d, \delta \in \Delta_d, i \in \{1, \dots, 5\}} \lambda_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta). \quad (4.83)$$

où  $\mathcal{K}_{\text{stab}} \subset \mathcal{K}$  représente l'ensemble des vecteurs  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K}$  stabilisant internement le système bouclé pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta_d$  et  $\delta \in \Delta_d$ .

Deux synthèses des gains du contrôleur autoséquencé ont été effectuées. La première, dite « classique », a été effectuée en négligeant la contribution des TCC. En d'autres termes, on impose  $K_\alpha^{\text{TCC}} = K_U^{\text{TCC}} = 0$  au niveau de la dynamique linéarisée du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  caractérisée par (4.79). L'architecture de la dynamique linéaire du système en boucle fermée utilisée à des fins de synthèse correspond alors à celle de la Fig. 4.14 dont on aurait supprimé les composantes en rouge. La seconde synthèse « avec TCC » inclut explicitement l'impact des TCC donnés par (4.80a) et (4.80b). Dans cette configuration, l'architecture de contrôle utilisée à des fins de synthèse correspond exactement à celle décrite

par la Fig. 4.14. Les résultats découlant de la synthèse sont résumés dans le Tab. 4.4<sup>9</sup>.

Tableau 4.4 Résultats de la synthèse  $H_\infty$  structurée sur le BACT

Synthèse	Norme $H_\infty$ initiale	Norme $H_\infty$ finale	Itérations	Temps de calcul
Classique	517.1	1.99	119	4 min 55 s
Avec TCC	8.40	1.22	135	12 min 59 s

La condition initiale obtenue sur la base d'une méthode des moindres carrés donne lieu à une valeur très dégradée de la fonction coût pour le problème d'autoséquencement. En effet, alors que pour le design préliminaire point à point la plus grande valeur obtenue du gain d'optimisation était de 1.14, la condition initiale de l'autoséquencement aboutit à un gain de 517.1. Un tel résultat semblerait, à première vue, indiquer que la formule de séquencement adoptée pour les gains n'est pas suffisamment riche. Cependant, l'optimisation des gains avec séquencement quadratique en tenant compte simultanément des 330 modèles LTI permet d'obtenir un compromis bien plus satisfaisant avec un gain final de 1.99. Cependant, après la réintégration *a posteriori* de l'impact des TCC, ce gain se dégrade, passant de 1.99 à 8.40. Cela tend une nouvelle fois à démontrer l'impact primordial des TCC sur la dynamique du système bouclé. Utilisant le résultat de la synthèse classique comme condition initiale de la synthèse tenant compte des TCC, la nouvelle synthèse des gains permet d'atteindre un gain final de 1.22. On note en particulier que le gain atteint par l'inclusion des TCC est très significativement inférieur à celui obtenu avec la synthèse classique. Ce résultat met en lumière le fait que, en dépit de leur contribution généralement qualifiée dans la littérature de parasite, les TCC peuvent contribuer à améliorer les performances du système bouclé lorsqu'ils sont adéquatement considérés dans la phase de synthèse.

**Évaluation comparative du comportement du système non linéaire en boucle fermée** Le contrôleur autoséquence  $\mathcal{C}(\kappa)$  précédemment synthétisé est implémenté sur le système non linéaire d'origine  $\mathcal{S}(\delta)$  tel qu'illustré à la Fig. 4.13. Les performances des deux ajustements du contrôleur autoséquence sont évaluées de manière comparative. Le premier objectif est d'évaluer la capacité du contrôleur à supprimer le phénomène de *flutter* tout en fournissant un niveau de performance adéquat en termes de temps de réponse et d'amortissement. À cette fin, on considère une vitesse d'écoulement de l'air de  $U = 15$  m/s avec la condition initiale  $\alpha_0 = 5^\circ$  et  $h_0 = 0.01$  m pour laquelle le BACT présente un cycle limite d'oscillation. Le système, initialement en boucle ouverte, est placé en boucle fermée à  $t = 5$  s. Finalement, la performance en suivi de référence est évaluée en imposant la valeur de  $\pm 8^\circ$

9. Résultats obtenus avec un ordinateur présentant un quad-core intel i7-3630QM cadencé à 2.40GHz avec 16.00GB RAM et MATLAB 2014b.

à l'entrée de référence à l'instant  $t = 10$  s. Les résultats de simulation sont illustrés à la Fig. 4.16 avec une évolution des gains du contrôleur montrée à la Fig. 4.17.

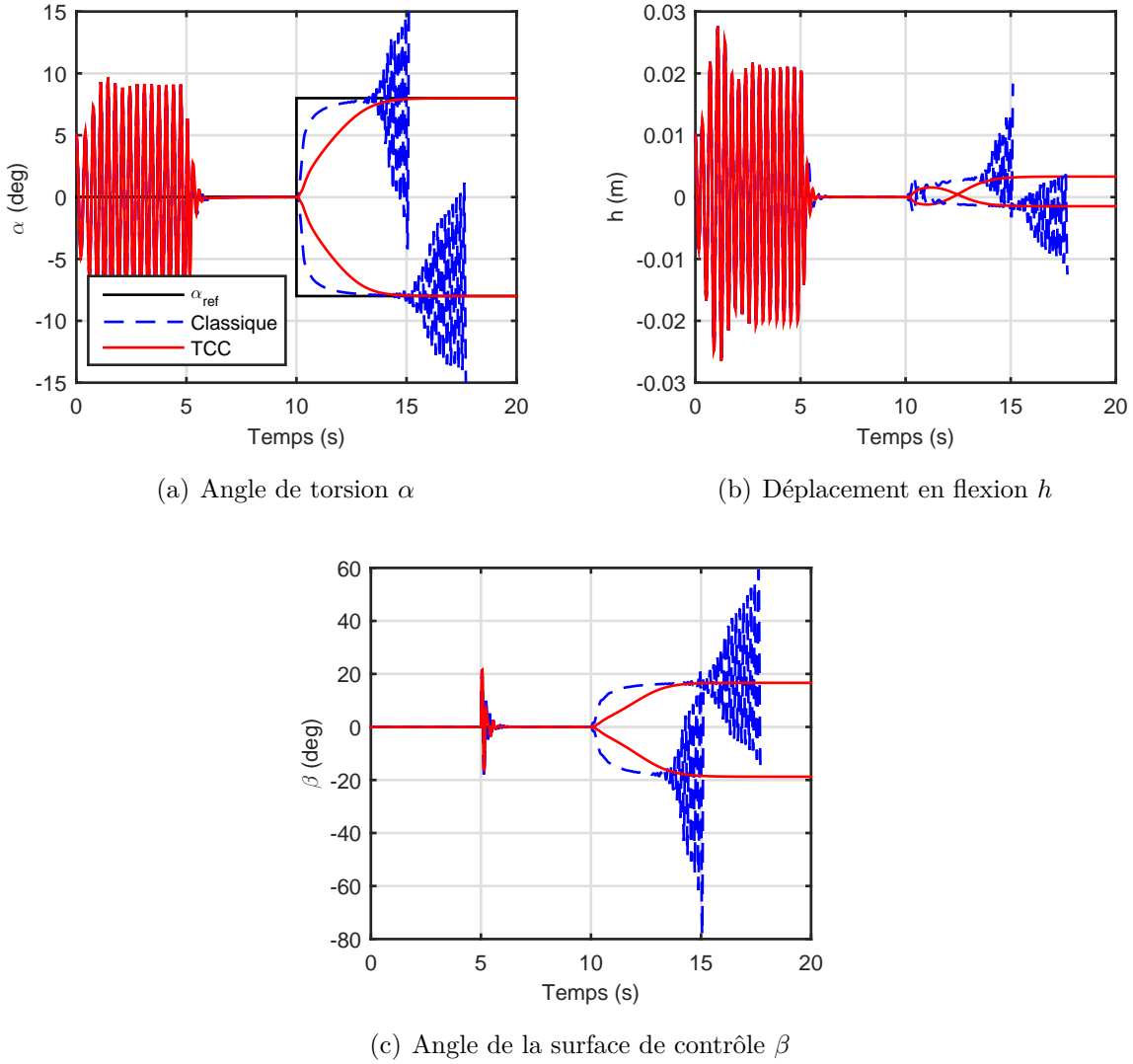


Figure 4.16 Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du *flutter* et en suivi de référence pour  $U = 15$  m/s

Les deux contrôleurs séquencés suppriment avec succès le *flutter* en moins d'une seconde (Figs. 4.16(a) et 4.16(b)) avec un effort de commande raisonnable (Fig. 4.16(c)). Cependant, le contrôleur séquencé synthétisé en négligeant les TCC ne permet pas d'opérer correctement le système pour des angles de torsion supérieurs ou égaux à  $\pm 8^\circ$ . De telles références provoquent en effet la déstabilisation du système bouclé. Inversement, le contrôleur séquencé synthétisé en tenant compte des TCC maintient la stabilité du système bouclé avec un niveau de performance adéquat en termes de temps de réponse et d'amortissement.

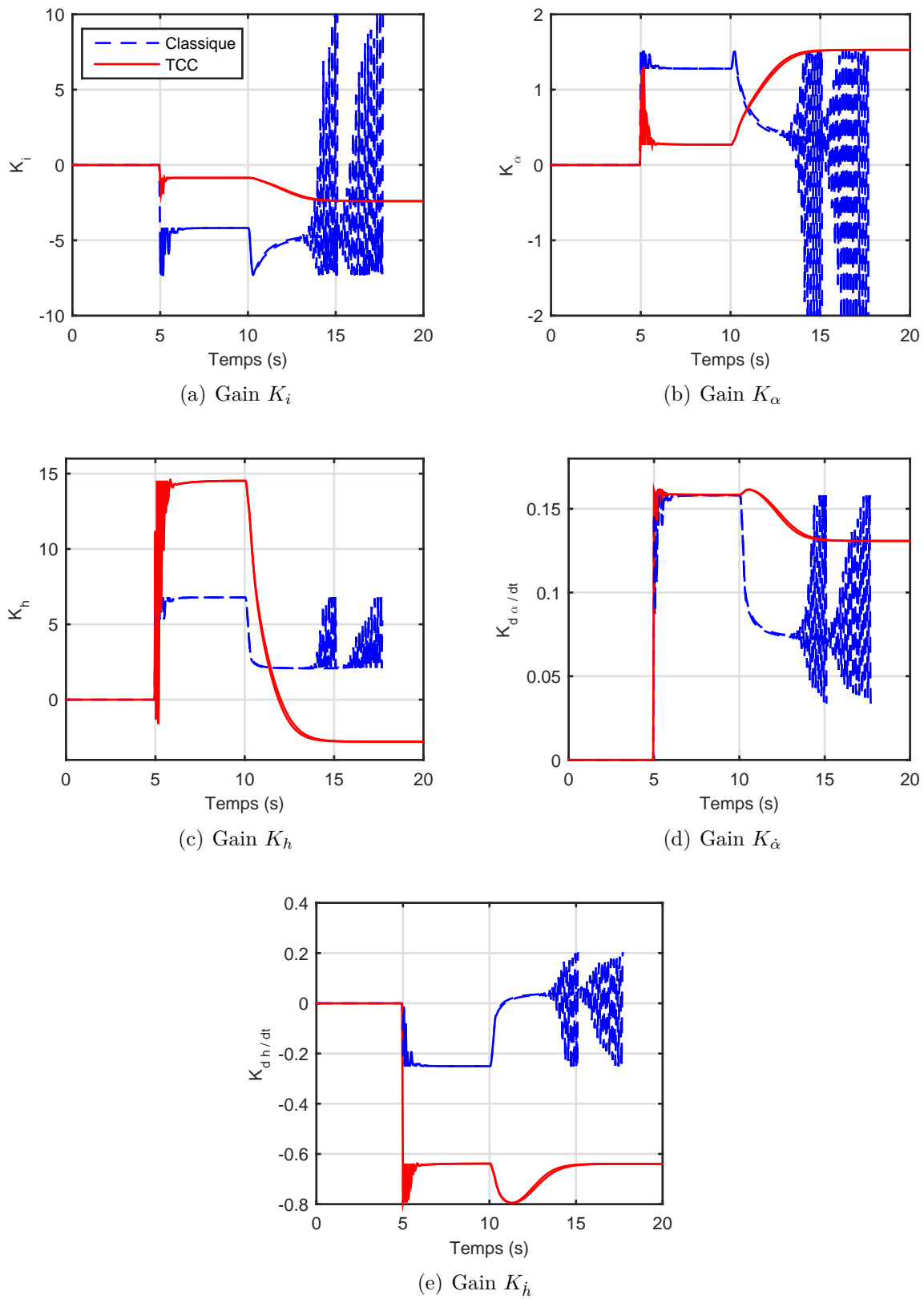


Figure 4.17 Évolution des gains du contrôleur lorsque placé en boucle fermée avec le BACT

On se focalise à présent sur la simulation du BACT en boucle fermée avec le contrôleur synthétisé en présence des TCC. La figure 4.18 illustre la réponse du système bouclé pour les vitesses d'écoulement de l'air  $U \in \{10, 11, \dots, 19, 20\}$  m/s en suppression de *flutter* et en suivi de référence pour  $\alpha_r \in \{-10^\circ, -8^\circ, \dots, 8^\circ, 10^\circ\}$ . Ce résultat confirme que la stratégie de contrôle permet une suppression adéquate du *flutter* et un bon suivi de référence pour  $\alpha_r \in [-10^\circ, 10^\circ]$ , autant en termes de temps de réponse que d'amortissement. L'effort de commande demeure satisfaisant, à l'exception des configurations aérodynamiques les moins favorables, i.e., pour de faibles vitesses d'écoulement de l'air  $U \leq 12$  m/s et pour de larges valeurs du signal de référence  $\alpha_r$ .

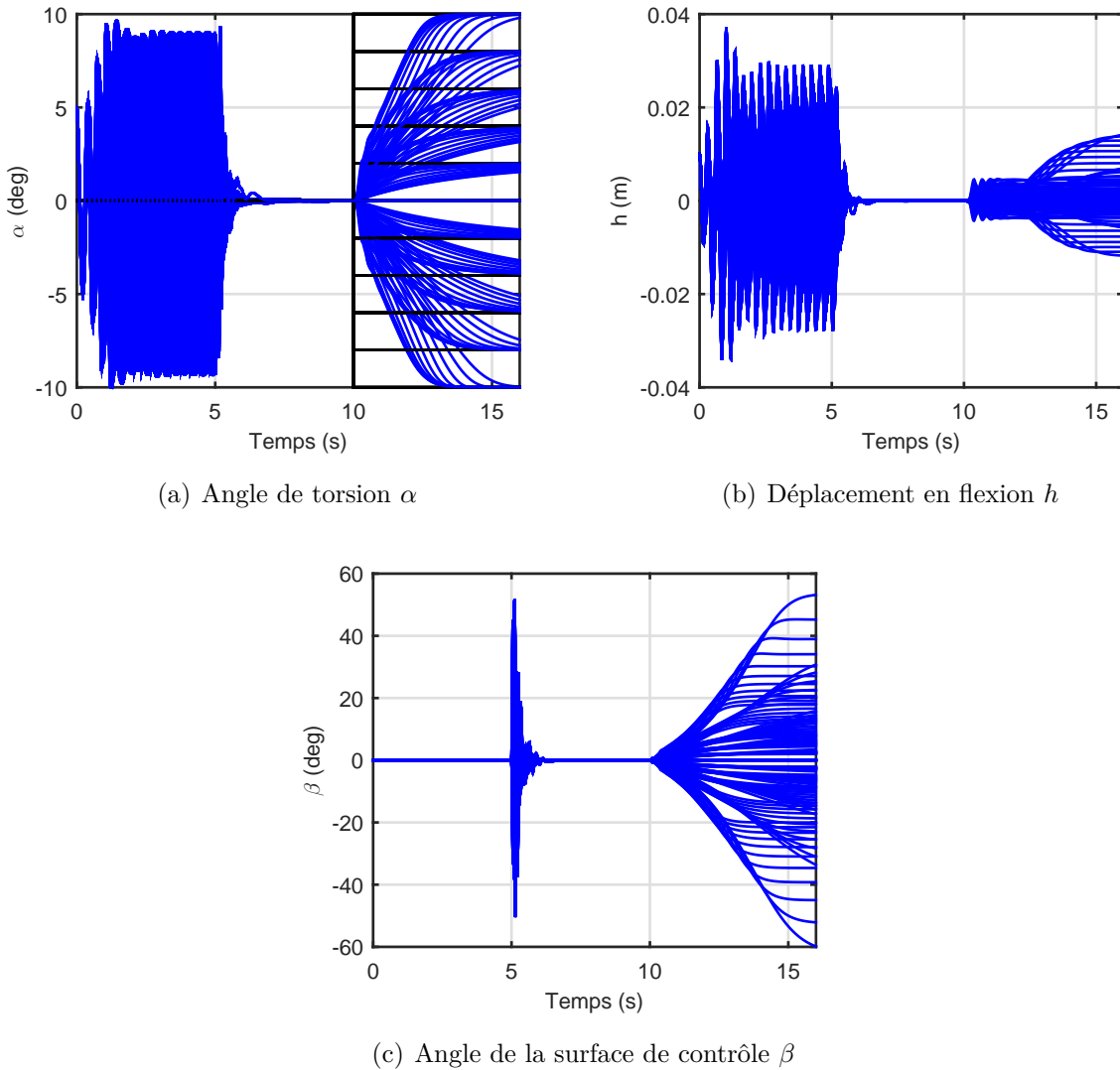


Figure 4.18 Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du *flutter* et en suivi de référence  $U \in \{10, 11, \dots, 19, 20\}$  m/s

Finalement, la robustesse de la stratégie de contrôle est évaluée pour des perturbations de la rigidité structurale en torsion du BACT atteignant les  $\pm 10\%$ . Sur la base de la Fig. 4.19, on observe que le contrôleur séquencé garantit la suppression robuste du *flutter* et un bon niveau de performance en suivi de référence.

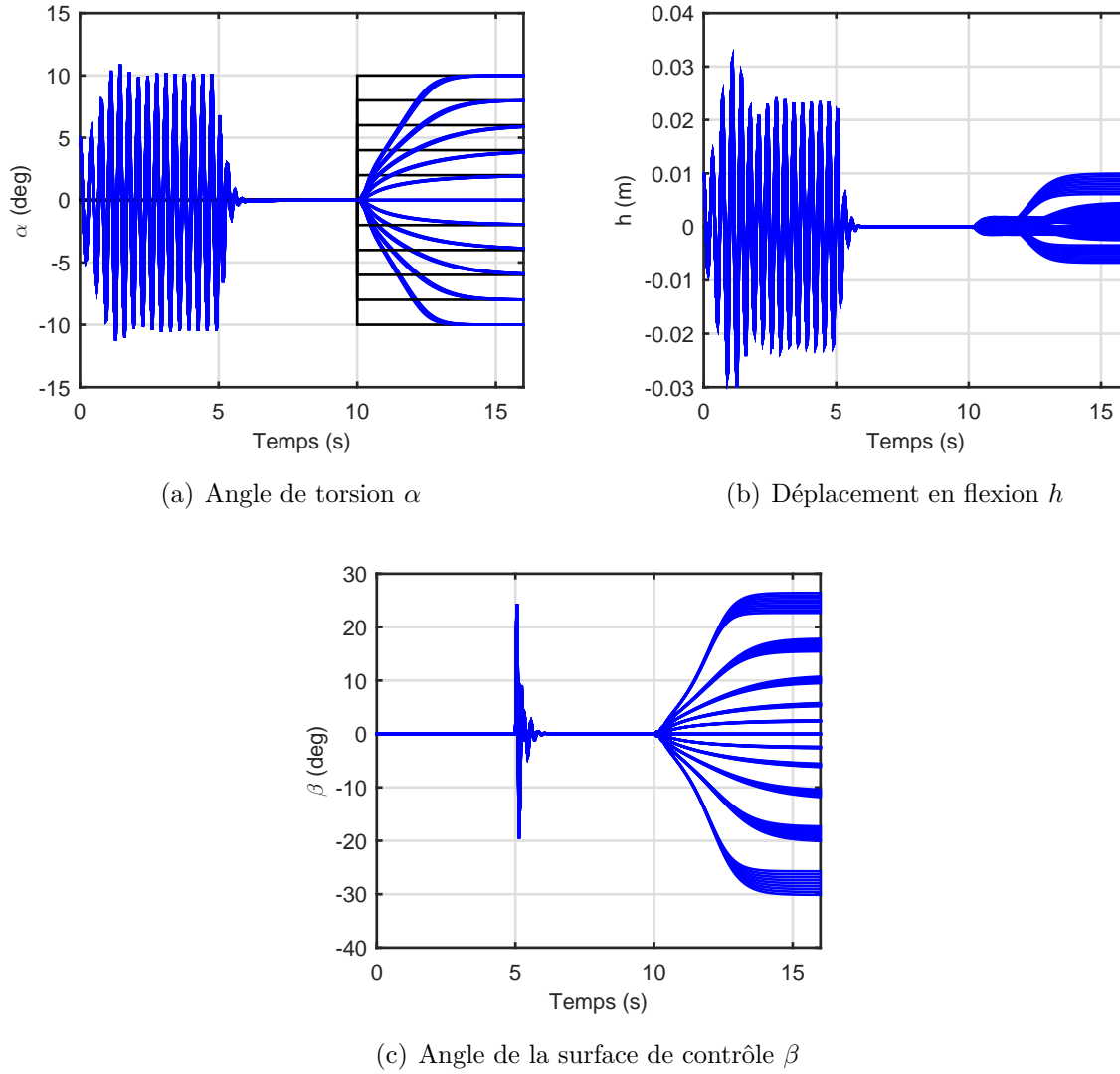


Figure 4.19 Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du *flutter* et en suivi de référence pour  $U = 16$  m/s et une perturbation du coefficient de rigidité en torsion atteignant les  $\pm 10\%$



## 4.2 Approche modale par placement de structure propre

La Section 4.1 a permis de mettre en avant la méthode d'autoséquencement des gains comme étant une méthode pertinente qui permet la gestion efficace des TCC dans le processus de synthèse des contrôleurs séquencé. La solution proposée dans la Section 4.1 repose sur des méthodes de synthèse  $H_\infty$  structurée dont la mise en œuvre pratique peut s'avérer complexe (choix des canaux de performance, optimisation multiobjectif, nécessité de lisser l'effort d'optimisation sur le domaine d'opération, importance du choix de la condition initiale, ...). Dans cette section, une approche basée sur le placement de structure propre est proposée. Bien que ne permettant pas de prendre en compte autant de critères qu'une synthèse  $H_\infty$  structurée, cette approche présente l'avantage d'une plus grande simplicité dans sa mise en œuvre pratique. La Sous-Section 4.2.1 présente quelques rappels quant à la méthode de placement de structure propre et son extension au problème du séquencement des gains. L'extension de la méthode quant à l'inclusion des TCC est détaillée dans la Sous-Section 4.2.2. Finalement, des exemples d'application sont présentés dans la Sous-Section 4.2.3.

### 4.2.1 Rappels sur le placement de structure propre

L'un des aspects primordiaux du contrôle de systèmes LTI réside dans la capacité de la stratégie de contrôle adoptée à placer correctement les pôles du système en boucle fermée. Plus généralement, dans le cadre de systèmes multi-entrées multi-sorties, le placement de structure propre vise à placer à la fois les pôles et les vecteurs propres associés du système bouclé.

#### 4.2.1.1 Décomposition modale

Afin de mettre en lumière l'impact des valeurs propres et des vecteurs propres sur la réponse temporelle, considérons le système :

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}, \quad (4.84)$$

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . On suppose que le signal d'entrée est tel que  $\mathbf{u} \in L^2(0, T)$  pour tout  $T \geq 0$ . Afin de simplifier l'étude, supposons que  $\mathbf{A}$  admette  $n$  valeurs propres  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$  deux à deux distinctes<sup>10</sup>. Notons alors  $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n \in \mathbb{C}^n$  les vecteurs propres associés et posons la matrice  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \dots \ \mathbf{u}_n] \in \mathcal{G}l_n(\mathbb{C})$ . De l'identité  $\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}$  où

---

10. Dans le cas d'une matrice  $\mathbf{A}$  dont au moins l'une des valeurs propres est de multiplicité supérieure ou égale à deux, des développements analogues peuvent être menés en remplaçant l'étape de diagonalisation par l'étape d'obtention de la forme de Jordan.

$\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ , on obtient que  $\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Lambda}\mathbf{U}^{-1}$ . En notant  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{C}^n$  les colonnes de  $(\mathbf{U}^{-1})^\top$ , la solution du système associée à la condition initiale  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  est donnée pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= e^{\mathbf{A}t} \mathbf{x}_0 + \int_0^t e^{\mathbf{A}(t-\tau)} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \mathbf{U} e^{\mathbf{\Lambda}t} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{x}_0 + \int_0^t \mathbf{U} e^{\mathbf{\Lambda}(t-\tau)} \mathbf{U}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau) d\tau \\ &= \underbrace{\sum_{i=1}^n (\mathbf{v}_i^\top \mathbf{x}_0) e^{\lambda_i t} \mathbf{u}_i}_{\text{Réponse à la condition initiale}} + \underbrace{\sum_{i=1}^n \int_0^t (\mathbf{v}_i^\top \mathbf{B} \mathbf{u}(\tau)) e^{\lambda_i(t-\tau)} d\tau \mathbf{u}_i}_{\text{Réponse forcée}}. \end{aligned} \quad (4.85a)$$

La réponse du système, autant pour sa composante homogène liée à la condition initiale que pour sa composante forcée, se présente comme étant la somme de la contribution des différents modes  $(\lambda_i, \mathbf{u}_i)$ . On observe en particulier, autant au niveau de la réponse homogène que de la réponse forcée, que le  $i$ -ème mode du système, à travers le terme  $e^{\lambda_i t}$ , se trouve être exclusivement excité dans la direction du vecteur propre  $\mathbf{u}_i$  associé<sup>11</sup>. Si l'entrée de commande  $u$  est choisie de telle sorte que  $\mathbf{B} \mathbf{u} = \alpha \mathbf{u}_{i_0}$  avec  $\alpha \in L^2(0, T)$  pour tout  $T \geq 0$ , on obtient que :

$$\mathbf{x}(t) = \int_0^t \alpha(\tau) e^{\lambda_{i_0}(t-\tau)} d\tau \mathbf{u}_{i_0} + o_{t \rightarrow +\infty}(e^{\omega t}), \quad (4.86)$$

pour  $\omega > \omega_0 = \max(\mathcal{Re}(\lambda_1), \dots, \mathcal{Re}(\lambda_n))$ . En particulier, si  $\mathbf{A}$  est Hurwitz, i.e.,  $\omega_0 < 0$ , on peut prendre  $\omega_0 < \omega < 0$ , traduisant le fait que la composante liée à la condition initiale  $\mathbf{x}_0$  converge exponentiellement vers 0. La réponse du système se retrouve ainsi dominée par le  $i_0$ -mode dans la direction  $\mathbf{u}_{i_0}$ .

Le résultat précédent portant sur la décomposition modale est le fondement de l'approche modale par placement de structure propre qui permet, en choisissant judicieusement les vecteurs propres, d'assigner les modes du système sur certaines sorties ou états.

#### 4.2.1.2 Placement de structure propre

Considérons un système LTI donné par la représentation d'état :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \mathbf{x} + \mathbf{B} \mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C} \mathbf{x} + \mathbf{D} \mathbf{u} \end{cases} \quad (4.87)$$

---

11. Dans le cas général d'une matrice  $\mathbf{A}$  présentant au moins une valeur propre avec multiplicité supérieure ou égale à deux, l'excitation se produit dans le sous-espace propre associé à la valeur propre.

où  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p \times n}$  et  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{p \times m}$ . Supposons que la stratégie de contrôle consiste à trouver un gain de retour de sortie  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . La commande prend alors la forme  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$ . De manière à assurer que le système en boucle fermée ainsi posé est bien défini, i.e., que les fonctions de transfert rentrant en jeu sont bien définies et propres (Zhou et al., 1996), il faut supposer que  $\mathbf{I}_p - \mathbf{K}\mathbf{D} \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R})$ . Dans la majorité des applications,  $\mathbf{D} = \mathbf{0}_{p \times m}$ , rendant la condition trivialement satisfaite pour tout gain de retour de sortie  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$ . Sous cette hypothèse, on obtient la dynamique en boucle fermée suivante :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = [\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\mathbf{I}_p - \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{C}] \mathbf{x} \\ \mathbf{y} = (\mathbf{I}_p - \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x} \end{cases} \quad (4.88)$$

L'objectif du placement de structure propre est alors de trouver un gain  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  permettant de placer les valeurs propres et les vecteur propres correspondant du système en boucle fermée. Plus précisément, on a la définition suivante.

**Définition 4.1** *Soit un système LTI  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$ . La paire  $(\lambda, \mathbf{v}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  est dite assignée par le retour de sortie  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  si  $\lambda$  est une valeur propre du système bouclé avec  $\mathbf{v}$  pour vecteur propre correspondant, i.e.,*

$$[\mathbf{A} + \mathbf{BK}(\mathbf{I}_p - \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{C}] \mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}. \quad (4.89)$$

La résolution directe du placement de structure propre tel que formulé par (4.89) n'est pas aisé dans la mesure où la matrice de gain  $\mathbf{K}$  y intervient de manière non linéaire. De manière à simplifier la résolution de ce problème, fixons  $(\lambda, \mathbf{v}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  la paire à assigner par le retour de sortie  $\mathbf{K}$ . Introduisons le vecteur  $\mathbf{w} = (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{D})^{-1}\mathbf{K}\mathbf{C}\mathbf{v}$  qui, par définition, satisfait  $\mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ . En notant que  $\mathbf{K}(\mathbf{I}_p - \mathbf{DK}) = (\mathbf{I}_m - \mathbf{K}\mathbf{D})\mathbf{K}$ , on obtient que<sup>12</sup>  $\mathbf{w} = \mathbf{K}(\mathbf{I}_p - \mathbf{DK})^{-1}\mathbf{C}\mathbf{v}$ . Ainsi, (4.89) est équivalent à  $\mathbf{A}\mathbf{v} + \mathbf{B}\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ . On en déduit alors le théorème suivant qui est le fondement des méthodes de placement de structure propre.

**Théorème 4.5 (Le Gorrec et al. (1998))** *Soit un système LTI  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$ . La paire  $(\lambda, \mathbf{v}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  est assignée par le retour de sortie  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  si*

---

12. Un calcul direct sur la recherche d'un élément du noyau des différentes matrices montre que  $\mathbf{I}_p - \mathbf{K}\mathbf{D} \in \mathcal{G}_p(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{D} \\ \mathbf{K} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \in \mathcal{G}_{m+p}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \mathbf{I}_m - \mathbf{DK} \in \mathcal{G}_m(\mathbb{R})$

et seulement s'il existe  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$  tel que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.90a)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{w}) = \mathbf{w}. \quad (4.90b)$$

L'avantage de la formulation du Théorème 4.5 comparativement à la formulation de (4.89) réside dans le fait que le gain  $\mathbf{K}$  y intervient de manière affine. La condition (4.90a) consiste à trouver un vecteur dans le noyau de  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix}$ , i.e.,  $\begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \in \ker \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right)$ . Un tel vecteur existe toujours puisque  $\dim_{\mathbb{C}} \left( \ker \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \right) \geq m \geq 1$ . Lorsque l'on a  $\dim_{\mathbb{C}} \left( \ker \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \right) = 1$ , il n'y a pas de degré de liberté quant au placement du vecteur propre  $\mathbf{v}$  associé à la valeur propre  $\lambda$  désirée en boucle fermée. *A contrario*, si  $\dim_{\mathbb{C}} \left( \ker \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \right) > 1$ , des degrés de liberté existent quant au choix du vecteur propre  $\mathbf{v}$ . D'un point de vue applicatif, on a dans la majorité des cas que  $\text{rg}(\mathbf{B}) = m$  et  $\lambda \notin \text{sp}_{\mathbb{C}}(\mathbf{A})$ , i.e., la matrice  $\mathbf{B}$  est de colonne rang plein et la valeur propre à placer en boucle fermée ne coïncide pas avec un pôle du système en boucle ouverte. Dans ce cas, on a  $\dim_{\mathbb{C}} \left( \ker \left( \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \right) \right) = m \geq 1$ . Sous ces hypothèses, des degrés de libertés existent quant au choix de  $\mathbf{v}$  dès lors que  $m \geq 2$ , i.e., une configuration d'un système multi-entrées. Dans ce cas, le choix du vecteur  $\mathbf{v}$  peut être dicté par des considérations de type découplage. En effet, supposons que l'on souhaite placer la valeur propre  $\lambda \in \mathbb{C}$  de manière à ce qu'elle n'ait pas d'influence sur une partie des sortie  $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{D}_k \mathbf{u}$  une fois le système placé en boucle fermée avec le retour de sortie  $\mathbf{u} = \mathbf{K}\mathbf{y}$ . Afin de formuler ce problème, notons que

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{D}_k \mathbf{u} = \left[ \mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{K} (\mathbf{I}_p - \mathbf{D}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{C} \right] \mathbf{x}. \quad (4.91)$$

Ainsi, sur la base de l'analyse modale de la Sous-Section 4.2.1.1, le mode  $(\lambda, \mathbf{v})$  est découplé de la sortie  $\mathbf{y}_k$  si et seulement si  $\left[ \mathbf{C}_k + \mathbf{D}_k \mathbf{K} (\mathbf{I}_p - \mathbf{D}\mathbf{K})^{-1} \mathbf{C} \right] \mathbf{v} = \mathbf{0}$ . À la vue de (4.90b), la dernière égalité est vérifiée si et seulement si  $\mathbf{C}_k \mathbf{v} + \mathbf{D}_k \mathbf{w} = \mathbf{0}$ . On obtient du Théorème 4.5, le corollaire suivant.

**Corollaire 4.6** *Soit un système LTI  $(\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times m} \times \mathbb{R}^{p \times n} \times \mathbb{R}^{p \times m}$ . La paire  $(\lambda, \mathbf{v}) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$  est assignée par le retour de sortie  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{p \times m}$  avec découplage sur la*

sortie  $\mathbf{y}_k = \mathbf{C}_k \mathbf{x} + \mathbf{D}_k \mathbf{u}$  si et seulement s'il existe  $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^m$  telle que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_k & \mathbf{D}_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} = \mathbf{0}, \quad (4.92a)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{v} + \mathbf{D}\mathbf{w}) = \mathbf{w}. \quad (4.92b)$$

Avec ou sans découplage, on cherche en général à placer simultanément plusieurs paires<sup>13</sup>  $(\lambda_i, \mathbf{v}_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $1 \leq i \leq n_p$ . Dans le cas sans découplage (le raisonnement est analogue pour le cas avec découplage), le Théorème 4.5 mène à chercher  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n_p} \in \mathbb{C}^m$  et  $\mathbf{K} \in \mathbb{C}^{m \times p}$  tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, n_p\}$ ,  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{v}_i + \mathbf{D}\mathbf{w}_i) = \mathbf{w}_i$ .

En particulier, en posant  $\mathbf{V} = [\mathbf{v}_1 \ \dots \ \mathbf{v}_{n_p}]$  et  $\mathbf{W} = [\mathbf{w}_1 \ \dots \ \mathbf{w}_{n_p}]$ , la seconde condition s'écrit de manière compacte sous la forme  $\mathbf{K}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}) = \mathbf{W}$ . Si une solution existe pour cette équation matricielle, et si  $\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}$  est de ligne rang plein, i.e.,  $\text{rg}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}) = p$ , alors  $\mathbf{K} = \mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W})^\dagger$ . Cependant, sous la seule hypothèse que  $\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}$  est de ligne rang plein, il n'est pas garanti que la matrice définie par  $\mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W})^\dagger$  vérifie bel et bien l'égalité matricielle  $\mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W})^\dagger(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}) = \mathbf{W}$ . Ainsi, en général, la procédure de synthèse consiste à :

1. choisir les paires  $(\lambda_i, \mathbf{v}_i) \in \mathbb{C} \times \mathbb{C}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ ,  $1 \leq i \leq n_p$ , à assigner en boucle fermée ;
2. calculer pour  $1 \leq i \leq n_p$  les vecteurs  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n_p} \in \mathbb{C}^m$  tels que :
  - cas du placement sans découplage :  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$  ;
  - cas du placement avec découplage :  $\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \lambda_i \mathbf{I}_n & \mathbf{B} \\ \mathbf{C}_{k,i} & \mathbf{D}_{k,i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_i \\ \mathbf{w}_i \end{bmatrix} = \mathbf{0}$  ;
3. vérifier si  $\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}$  est de ligne rang plein ;
4. vérifier si  $\mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W})^\dagger(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W}) = \mathbf{W}$  .

Dans ce cas, l'unique gain fournissant le placement de structure propre désiré est donné par  $\mathbf{K} = \mathbf{W}(\mathbf{C}\mathbf{V} + \mathbf{D}\mathbf{W})^\dagger$ . Si le point 3 est vérifié mais que le point 4 est mis en défaut, cela indique qu'il n'existe pas de solution au placement de structure propre désiré. Ce cas de figure peut par exemple se produire lorsque l'on essaye de placer plus de valeurs propres que la dimension du système ( $n_p > p$ ) ou lorsque les vecteurs propres à placer ne forment pas une famille libre de vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ . Un tel problème peut également survenir lorsque la

---

13. D'un point de vue théorique, les  $\lambda_i \in \mathbb{C}$  peuvent être sélectionnés de manière quelconque. Néanmoins, travaillant avec des systèmes à coefficients réels et désirant obtenir un gain de retour de sortie également à coefficients réels, l'ensemble des valeurs propres  $\lambda_i$  imposées au système en boucle fermée, comptées avec multiplicité, doit être involutif par passage au conjugué.

représentation d'état du système en boucle ouverte n'est pas minimale (présence de modes cachés).

#### 4.2.1.3 Autoséquencement des gains

La méthode de placement de structure propre peut être mise à profit dans le cadre de l'auto-séquencement des gains. En effet, considérons un système linéaire  $(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta}))$  où  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  représente le paramètre de séquencement. Dans cette configuration, on cherche à séquencer le gain de retour de sortie de dimension  $m \times p$  comme suit :

$$\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{K}_1\phi_1(\boldsymbol{\theta}) + \dots + \mathbf{K}_r\phi_r(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.93)$$

où  $\mathbf{K}_1, \dots, \mathbf{K}_r \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont les gains ajustables du contrôleur et  $\phi_1, \dots, \phi_r : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de séquencement choisies *a priori*. La synthèse d'un tel contrôleur séquencé peut être effectuée par la technique du placement de structure propre en tirant avantage du produit de Kronecker : pour  $\mathbf{M} = (m_{i,j})_{i,j} \in \mathbb{C}^{m \times n}$  et  $\mathbf{N} \in \mathbb{C}^{p \times q}$  quelconques, leur produit de Kronecker est la matrice  $\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} \in \mathbb{C}^{mp \times nq}$  définie par

$$\mathbf{M} \otimes \mathbf{N} = \begin{bmatrix} m_{11}\mathbf{N} & \dots & m_{1n}\mathbf{N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{m1}\mathbf{N} & \dots & m_{mn}\mathbf{N} \end{bmatrix}. \quad (4.94)$$

On a alors le lemme suivant.

**Lemme 4.7 (Magni (1999))** *La synthèse du gain de retour de sortie séquencé (4.93) est équivalente à la synthèse dans le cadre d'une approche multimodèle du contrôleur par retour de sortie :*

$$\mathbf{K}_{GS} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_2 & \dots & \mathbf{K}_r \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times pr}, \quad (4.95)$$

*relativement au système augmenté :*

$$(\mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}), \Phi(\boldsymbol{\theta}) \otimes \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}), \Phi(\boldsymbol{\theta}) \otimes \mathbf{D}(\boldsymbol{\theta})), \quad (4.96)$$

où  $\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \phi_1(\boldsymbol{\theta}) & \dots & \phi_r(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}^\top$ .

Ainsi, la stratégie d'autoséquencement nécessite d'augmenter le nombre  $p$  de sorties du système à contrôler à  $pr$  sorties. En combinant le Théorème 4.5 et le Lemme 4.7, il est possible de tirer profit des capacités multimodèle de la synthèse par placement de structure propre en

considérant simultanément plusieurs points de fonctionnement couvrant le domaine d'opération  $\Theta$ .

#### 4.2.1.4 Exemple de mise en œuvre et émergence des termes de couplage cachés

La mise en œuvre de la méthode d'autoséquencement par placement de structure propre est illustrée sur l'exemple du missile introduit à la Sous-Section 4.1.4.1 et est issue de l'article (Döll et al., 2001). Au point de fonctionnement  $\theta_e = (\alpha_e, M_e)$ , la dynamique du système linéarisé est donnée sous forme de la représentation d'état suivante<sup>14</sup> :

$$\mathcal{S}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\theta_e) \delta \mathbf{x} + \mathbf{B}(\theta_e) \delta u \\ \delta \mathbf{y} = \mathbf{C}(\theta_e) \delta \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.97)$$

où  $\mathbf{x} = [\alpha \quad q \quad \delta_t \quad \dot{\delta}_t]^\top$ ,  $u = \delta_c$  et  $\mathbf{y} = [\eta \quad q]^\top$ . La stratégie de contrôle adoptée est celle d'un retour d'état avec composante intégrale :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta \eta_c - \delta \eta \\ \delta u = K_i(\theta_e) \delta x_i + K_\eta(\theta_e) \delta \eta + K_q(\theta_e) \delta q \end{cases} \quad (4.98)$$

où  $K_i$ ,  $K_\eta$  et  $K_q$  sont les trois gains du contrôleur à séquencer sur le domaine d'opération  $\Theta$ . Le séquencement est spécifié *a priori* sous la forme d'un polynôme quadratique du point de fonctionnement  $\theta = (\alpha, M)$ . Sur la base de (4.93), on choisit donc de prendre  $r = 6$  avec  $\phi_1(\theta) = 1$ ,  $\phi_2(\theta) = |\alpha|$ ,  $\phi_3(\theta) = M$ ,  $\phi_4(\theta) = \alpha^2$ ,  $\phi_6(\theta) = |\alpha|M$  et  $\phi_5(\theta) = M^2$ . La méthode de placement de structure propre étant formulée pour une configuration de type retour de sortie, la composant intégrale du contrôleur est incluse dans une augmentation de la dynamique du système :

$$\mathcal{S}_{l,a}(\theta_e) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}} \\ \delta \dot{x}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ x_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_a(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta \eta_c \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_a(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta x_i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.99)$$

---

14. Contrairement à l'approche basée sur la synthèse  $H_\infty$  structurée, on ne tient pas compte ici des aspects de robustesse, i.e.,  $\delta_n = \delta_m = 0$ .

avec

$$\mathbf{A}_a(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ -\mathbf{C}_\eta(\boldsymbol{\theta}_e) & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{4 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_a(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 4} & 1 \\ \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_e) & 0 \end{bmatrix}, \quad (4.100)$$

où  $\mathbf{C}_\eta(\boldsymbol{\theta}_e)$  est la sortie associée à l'accélération normale  $\eta$ , correspondant à la première ligne de la matrice  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Dès lors, sur la base du système augmenté  $\mathcal{S}_{l,a}(\boldsymbol{\theta}_e)$ , le problème de synthèse se résume au problème du design du contrôleur par retour de sortie  $\delta u = \begin{bmatrix} K_i(\boldsymbol{\theta}_e) & K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e) & K_q(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y \end{bmatrix}$ . Dans le design, on souhaite assigner les valeurs propres au système en boucle fermée telles que données dans le Tab. 4.5 (Döll et al., 2001).

Tableau 4.5 Points d'opération et valeurs propres associées désirées pour le système en boucle fermée

	$M_e$	$\alpha_e$	$\lambda_r$	$\lambda_c$
$\boldsymbol{\theta}_1$	4	20°	-14	$-19 \pm 19j$
$\boldsymbol{\theta}_2$	4	0°	-13.9	$-15 \pm 16j$
$\boldsymbol{\theta}_3$	2	0°	-12	$-12 \pm 12j$
$\boldsymbol{\theta}_4$	2	20°	-13.5	$-13.5 \pm 13.5j$
$\boldsymbol{\theta}_5$	4	10°	-13.7	$-13.7 \pm 13.7j$
$\boldsymbol{\theta}_6$	3	0°	-12.5	$-12.5 \pm 12.5j$

Le nombre de gains ajustables dans la synthèse est de  $3 \times 6 = 18$ , ce qui correspond au nombre de valeurs propres que l'on souhaite placer. On a donc autant de contraintes que de degrés de liberté. On augmente alors l'équation de sortie du système tel que suggéré par le Lemme 4.7 et on applique ensuite le Théorème 4.5 pour synthétiser les gains du contrôleur autoséquenté.

L'étape de synthèse étant à présent complétée, il reste à implémenter le contrôleur séquenté sur le système non linéaire d'origine. Pour cela on recourt à l'implémentation classique  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  (4.57) illustrée à la Fig 4.5 dont on sait déjà qu'elle va mener à l'émergence de TCC. Ce résultat se visualise aisément au niveau de l'analyse de l'implémentation finale. En effet, on souhaite qu'une fois le système non linéaire  $\mathcal{S}$  placé en boucle fermée avec le contrôleur séquenté  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ , la linéarisation du système bouclé (illustré à la Fig 4.5) au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  donne lieu à un système linéaire dont les caractéristiques correspondent au placement de pôles désiré du Tab 4.5. Or ce n'est pas le cas comme l'illustre les résultats du Tab. 4.6.

On observe en effet que les placements de pôles obtenus pour les points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_1$ ,  $\boldsymbol{\theta}_4$  et  $\boldsymbol{\theta}_5$  diffèrent de ceux initialement imposés lors de la synthèse<sup>15</sup>. En particulier pour  $\boldsymbol{\theta}_5$ , alors

15. Notons que les résultats coïncident pour les points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_2$ ,  $\boldsymbol{\theta}_3$  et  $\boldsymbol{\theta}_6$ . Cela provient du fait que



Tableau 4.6 Position des pôles du système en boucle fermée pour des gains synthétisés en ne tenant pas compte de l'impact des TCC et implémentés avec  $\mathcal{C}(\kappa)$

	$M_e$	$\alpha_e$	$\lambda_r$	$\lambda_c$
$\theta_1$	4	20°	<b>-10.3</b>	<b>-19.5 ± 24.2j</b>
$\theta_2$	4	0°	-13.9	-15 ± 16j
$\theta_3$	2	0°	-12	-12 ± 12j
$\theta_4$	2	20°	<b>-34.2</b>	<b>-5.90 ± 10.8j</b>
$\theta_5$	4	10°	<b>-47.9</b>	<b>-1.51 ± 10.6j</b>
$\theta_6$	3	0°	-12.5	-12.5 ± 12.5j

que l'on souhaitait imposer un amortissement de  $\sqrt{2}/2 \approx 0.707$ , le résultat final donne lieu à un système mal amorti avec un facteur d'amortissement d'approximativement 0.141. On s'attend donc au niveau temporel à observer des dépassements importants en suivi d'entrées de référence de type échelon. Dans la littérature, ce problème a généralement été adressé via l'ajout *ad hoc* de pré-filtres permettant d'atténuer les dépassements (Döll et al., 2001). Nous allons voir qu'un tel ajout est en réalité non nécessaire et que l'intégration explicite des TCC dans la méthode de placement de structure propre permet de résoudre ce problème.

#### 4.2.2 Inclusion des termes de couplage cachés dans le placement de structure propre

L'inclusion des TCC dans la méthode de placement de structure propre pour l'autoséquen-  
cement des gains a été présentée dans deux articles de conférences (Lhachemi et al., 2016c,d)  
et deux articles de journaux publiés dans *Journal of Guidance, Control, and Dynamics* (Lha-  
chemi et al., 2017c) et *Control Engineering Practice* (Lhachemi et al., 2017d). Les différents  
éléments qui y sont présentés sont ici repris.

##### 4.2.2.1 Discussion préliminaire sur l'impact de la position du gain intégral

L'étude présentée se scinde en deux parties, les deux portant sur la synthèse d'un contrôleur  
séquentiel par retour de sortie avec composante intégrale. La première partie de l'étude est  
présentée dans la Sous-Section 4.2.2.2 et se focalise sur le cas où le gain de l'intégrateur se  
situe en amont de la composante intégrale. La seconde partie est présentée dans la Sous-  
Section 4.2.2.3 et s'intéresse à un gain de l'intégrateur se situant en aval de la composante  
intégrale. Dans le cas de figure d'un gain intégral  $K_i$  statique (i.e.,  $K_i \in \mathbb{R}$ ), une telle per-  
mutation n'a aucun impact sur la dynamique du contrôleur outre un facteur d'échelle quant

---

les TCC sont nuls pour  $\alpha_e = 0$ , confère (4.61a-4.61b).

à la valeur de l'état intégral. Cependant, dans le cas d'un contrôleur séquencé par l'intermédiaire d'une variable endogène, le choix de l'une ou de l'autre des deux configurations a un impact important sur la structure même des TCC (Rugh and Shamma, 2000). Pour illustrer cela, considérons l'exemple d'un système mono-entrée  $u(t) \in \mathbb{R}$  et mono-sortie  $y(t) \in \mathbb{R}$  dont l'équilibre peut être caractérisé par la valeur de la sortie à l'équilibre, notée  $y_e$ . Supposons que l'on souhaite contrôler ce système avec un simple contrôleur PI. L'équilibre du système étant paramétrisé par la valeur prise par la sortie à l'équilibre, l'implémentation du contrôleur séquencé est envisagé sous l'une des deux formes suivantes :

$$\mathcal{C}_{\text{PI},1} \triangleq \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = K_i(y)(r - y) \\ u = \tilde{x}_i + K_p(y)y \end{cases} \quad \mathcal{C}_{\text{PI},2} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_i = r - y \\ u = K_i(y)x_i + K_p(y)y \end{cases} \quad (4.101)$$

où  $K_i, K_p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  sont deux gains séquencés que l'on suppose de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose également que le gain intégral  $K_i$  ne s'annule pas. Dans les deux cas, la composante intégrale permet alors de garantir qu'à l'équilibre l'égalité  $r_e = y_e$  est vérifiée. Dans le cas du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{PI},1}$  l'équilibre de la composante intégrale est donnée par  $\tilde{x}_{i,e} = u_e - K_p(y_e)y_e$ , tandis que dans le cas du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{PI},2}$ , on a  $x_{i,e} = (u_e - K_p(y_e)y_e) / K_i(y_e)$ . La linéarisation de la dynamique du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{PI},1}$  associée à la sortie à l'équilibre  $y_e$  est donnée par

$$\mathcal{C}_{\text{PI},1,l}(y_e) = \begin{cases} \delta \dot{z}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = K_i(y_e)\delta z_i + \left[ K_p(y_e) + \frac{\partial K_p}{\partial y} \Big|_{y_e} y_e \right] \delta y \end{cases} \quad (4.102)$$

où  $\delta z_i = \delta \tilde{x}_i / K_i(y_e)$  (la partie en rouge correspond aux TCC). Dans le cas du second contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{PI},2}$ , on obtient que

$$\mathcal{C}_{\text{PI},2,l}(y_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = K_i(y_e)\delta x_i + \left[ K_p(y_e) + \frac{1}{K_i(y_e)} \frac{\partial K_i}{\partial y} \Big|_{y_e} u_e + \left( \frac{\partial K_p}{\partial y} \Big|_{y_e} - \frac{K_p(y_e)}{K_i(y_e)} \frac{\partial K_i}{\partial y} \Big|_{y_e} \right) y_e \right] \delta y \end{cases} \quad (4.103)$$

En comparant les dynamiques linéarisées données par (4.102) et (4.103), on note que  $\mathcal{C}_{\text{PI},1}$  présente des TCC relativement simples dépendant linéairement du gain  $K_p$ . *A contrario*, les TCC émergeant de  $\mathcal{C}_{\text{PI},2}$  présentent une structure plus complexe, dépendant de manière non linéaire des gains  $K_i$  et  $K_p$ . Cette disparité observée entre les deux architectures de contrôleurs séquencés provient directement de la nature de la contribution de la composante intégrale au niveau de l'équation de sortie. En effet, dans le cas de  $\mathcal{C}_{\text{PI},1}$ , la linéarisation

du terme  $\tilde{x}_i$  donne simplement lieu à  $\delta\tilde{x}_i$ . La situation de  $\mathcal{C}_{PI,2}$  est plus complexe puisque le terme intégral intervient sous la forme  $K_i(y)x_i$ , ce qui donne lieu, après linéarisation, à  $K_i(y_e)\delta x_i + (\partial K_i/\partial y)(y_e)x_{i,e}\delta y$ .

Ainsi, l'étude de la structure des TCC semble indiquer que la synthèse des gains du contrôleur  $\mathcal{C}_{PI,1}$  est plus aisée que celle du contrôleur  $\mathcal{C}_{PI,2}$ . Néanmoins, la présence d'une composante intégrale pure est généralement préférable à des fins de rejet de perturbations. Le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{PI,2}$  semble donc plus adéquat que l'architecture de contrôle  $\mathcal{C}_{PI,1}$ . Ces deux configurations, pour le cas général d'un contrôleur par retour de sortie avec composante intégrale, sont étudiées dans le cadre de la synthèse par placement de structure propre dans les prochains paragraphes. Pour cela, on se place dans le cadre du système à contrôler  $\mathcal{S}$  donné par (3.31) tel qu'introduit à la Sous-Section 3.2.2.

Les deux approches se basent sur l'augmentation de la dynamique du système linéarisé avec la composant intégrale portant sur l'erreur de suivi  $r - y_1$ . Plus spécifiquement, la dynamique du système linéarisé  $\mathcal{S}_l(\theta_e)$  est augmentée comme suit <sup>16</sup> :

$$\mathcal{S}_{a,l}(\theta_e) \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta \dot{x} \\ \delta \dot{x}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a^S(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta x_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_a^S(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta y \end{bmatrix} = \mathbf{C}_a^S(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta x_i \end{bmatrix} + \mathbf{D}_a^S(\theta_e) \begin{bmatrix} \delta u \\ \delta r \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.104)$$

avec

$$\mathbf{A}_a^S(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^S(\theta_e) & \mathbf{0}_{n \times p_1} \\ -\mathbf{C}_{y_1}^S(\theta_e) & \mathbf{0}_{p_1 \times p_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a^S(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u^S(\theta_e) & \mathbf{0}_{n \times p_1} \\ -\mathbf{D}_{u,y_1}^S(\theta_e) & \mathbf{I}_{p_1} \end{bmatrix}, \quad (4.105a)$$

$$\mathbf{C}_a^S(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times n} & \mathbf{I}_{p_1} \\ \mathbf{C}^S(\theta_e) & \mathbf{0}_{p \times p_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{D}_a^S(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times m} & \mathbf{0}_{p_1 \times p_1} \\ \mathbf{D}_u^S(\theta_e) & \mathbf{0}_{p \times p_1} \end{bmatrix}, \quad (4.105b)$$

où  $\mathbf{C}_{y_1}^S(\theta_e) \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$  et  $\mathbf{D}_{u,y_1}^S(\theta_e) \in \mathbb{R}^{p_1 \times m}$  correspondent aux  $p_1$  première lignes des matrices  $\mathbf{C}^S(\theta_e)$  et  $\mathbf{D}_u^S(\theta_e)$ .

#### 4.2.2.2 Gain intégral localisé en amont de l'action intégrale

Dans cette première phase, on s'attache à étudier le contrôle de  $\mathcal{S}$  par un contrôleur séquencé par retour de sortie avec gain d'intégration situé en amont de la composante intégrale. Plus précisément, on s'intéresse à l'architecture de contrôle illustrée à la Fig. 4.20 et dont la

<sup>16</sup>. La contribution de l'entrée  $\delta w$  est omise car, de par sa nature exogène, n'a pas d'impact sur le placement de structure propre.

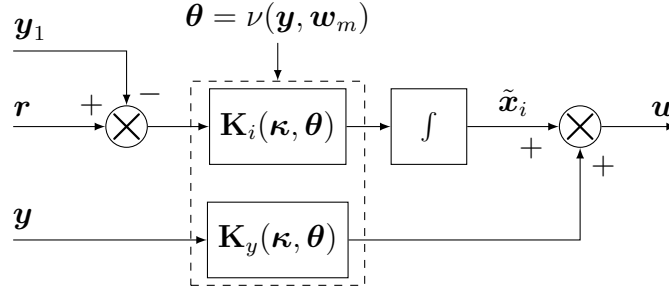


Figure 4.20 Structure du contrôleur nonlinéaire séquencé par retour de sortie avec gain intégral en amont de la composante intégrale  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$

dynamique est donnée par :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] \\ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (4.106)$$

où  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$  et  $\mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont des matrices dont les coefficients sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  du point d'opération  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , utilisé comme variable de séquencement. Ces deux matrices dépendent également du vecteur  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$  rassemblant l'ensemble des paramètres ajustables au cours de la synthèse. On suppose que  $m = p_1$ , i.e., que le nombre d'entrées  $m$  du système coïncide avec le nombre de sorties  $p_1$  du système à contrôler.

L'équilibre du contrôleur séquencé  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ , lorsque placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}$ , est caractérisé par :

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) [\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)] \\ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \tilde{\mathbf{x}}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{cases} \quad (4.107)$$

De manière à garantir une erreur de suivi nulle en régime permanent, on doit donc supposer que  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  est de colonne rang plein. Puisque  $m = p_1$ , cela revient à supposer que le gain intégral est inversible, i.e.,  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \in \mathcal{G}l_m(\mathbb{R})$ . Sous cette hypothèse,  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et l'équilibre de la variable d'intégration est caractérisé de manière unique par  $\tilde{\mathbf{x}}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ .

La dynamique linéarisée  $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  du contrôleur séquencé est alors illustrée à la Fig. 4.21 et

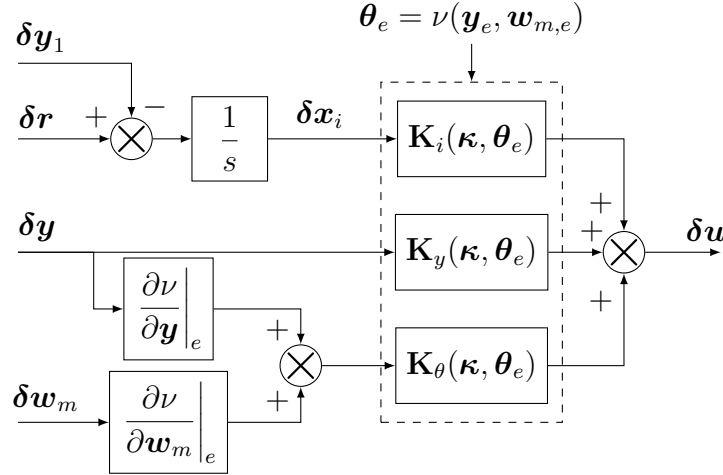


Figure 4.21 Dynamique linéarisée  $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  du contrôleur séquencé

est caractérisée par :

$$\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{y} + \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \boldsymbol{\theta} = \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{y} + \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{w}_m \end{cases} \quad (4.108)$$

où  $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)^{-1} \delta \tilde{\mathbf{x}}_i$ . En notant  $\theta_l$  la  $l$ -ième composante de  $\boldsymbol{\theta}$ , la  $l$ -ième colonne du TCC  $\mathbf{K}_\theta$  prend la forme :

$$\mathbf{K}_{\theta,l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial \theta_l} \right|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{y}_e. \quad (4.109)$$

Sur la base du système augmenté (4.104) incluant la contribution de l'intégrateur  $\delta \mathbf{x}_i$ , le système bouclé constitué de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  et de  $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  est équivalent au contrôle par retour de sortie du système  $\mathcal{S}_{a,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  avec le gain<sup>17</sup> :

$$\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \left. \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \right|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \end{bmatrix}. \quad (4.110)$$

La méthode de placement de structure propre n'est pas directement applicable sur  $\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  dans la mesure où  $\mathbf{K}_\theta$  n'est pas indépendant de  $\mathbf{K}_\sigma$  et de  $\mathbf{K}_y$ . Le problème doit donc encore être reformulé de manière à pouvoir appliquer le Théorème 4.5 portant sur le placement de structure propre. Pour cela, dans le contexte du Lemme 4.7, on choisit *a priori* la struc-

17. La contribution de l'entrée  $\mathbf{w}_m$  est omise puisque sa nature exogène la rend non contributive du point de vue du placement de structure propre.

ture de séquençement des gains sous la forme de (4.93). Plus précisément,  $r$  fonctions de séquençement  $\phi_1, \dots, \phi_r : \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$  sont choisies *a priori*, permettant d'effectuer le séquençement des gains :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{i,j} \phi_j(\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{y,j} \phi_j(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.111)$$

où le vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{rm(p+p_1)}$  rassemble les éléments des matrices  $\mathbf{K}_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$  et  $\mathbf{K}_{y,j} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ . En notant  $\Phi(\boldsymbol{\theta}) = [\phi_1(\boldsymbol{\theta}) \dots \phi_r(\boldsymbol{\theta})]^\top$ , les TCC se réécrivent sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) &= [\mathbf{K}_{\theta,1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \dots \mathbf{K}_{\theta,s}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)] \\ &= \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{y,j} (\nabla \phi_j(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \otimes \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e)) \\ &= \mathbf{K}_b \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times 1} \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (4.112)$$

où  $\mathbf{K}_b \in \mathbb{R}^{m \times r(p+p_1)}$  rassemble les paramètres ajustables :

$$\mathbf{K}_b \triangleq [\mathbf{K}_{i,1} \quad \mathbf{K}_{y,1} \quad \mathbf{K}_{i,2} \quad \mathbf{K}_{y,2} \quad \dots \quad \mathbf{K}_{i,r} \quad \mathbf{K}_{y,r}], \quad (4.113)$$

et  $J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e)$  dénote la matrice jacobienne de  $\Phi$  évaluée en  $\boldsymbol{\theta}_e$ . Sur la base de l'équation de sortie de  $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$ , on obtient :

$$\boldsymbol{\delta u} = \mathbf{K}_b \left\{ \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta \sigma} \\ \boldsymbol{\delta y} \end{bmatrix} + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times 1} \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \boldsymbol{\delta y} \right\}. \quad (4.114)$$

Sous cette formulation, il est à présent possible de modifier l'équation de sortie du système augmenté  $\mathcal{S}_{a,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  comme suit :

$$\mathcal{S}_{b,l}(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta \dot{x}} \\ \boldsymbol{\delta \dot{x}_i} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x} \\ \boldsymbol{\delta x_i} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta u} \\ \boldsymbol{\delta r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_b = \mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x} \\ \boldsymbol{\delta x_i} \end{bmatrix} + \mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta u} \\ \boldsymbol{\delta r} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.115)$$

avec  $\mathbf{A}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{A}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{B}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{B}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) &= \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{C}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e) + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times 1} \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{C}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e), \\ \mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) &= \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{D}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e) + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times 1} \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{D}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e),\end{aligned}\tag{4.116}$$

où  $\mathbf{C}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{p \times (n+p_1)}$  et  $\mathbf{D}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{p \times (m+p_1)}$  dénotent, respectivement, les sous-matrices  $\mathbf{C}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{D}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$  correspondant à la sortie du système  $\delta \mathbf{y}$  (i.e., les  $p$  dernières lignes). Sous cette nouvelle formulation, la sortie du système est donnée par  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_b \mathbf{Y}_b$  où les composantes de  $\mathbf{K}_b$  sont statiques (i.e., indépendantes du point d'opération courant  $\boldsymbol{\theta}_e$ ) et indépendantes. De la sorte, il est possible d'effectuer la synthèse du contrôleur autoséquenté en présence de TCC via la technique du placement de structure propre sur la base du système augmenté  $\mathcal{S}_{b,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Cela est résumé dans la proposition suivante.

**Proposition 4.8** *Le design du contrôleur séquenté (non linéaire) par retour de sortie  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  donné par (4.107), sur la base de la dynamique linéarisée  $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  exprimée par (4.108) avec un séquentement des gains choisi sous la forme (4.111) est équivalent au design, dans le cadre d'une synthèse multimodèle, du gain par retour de sortie  $\mathbf{K}_b$  relativement au système augmenté  $(\mathbf{A}_b(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{B}_b(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{C}_b(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{D}_b(\boldsymbol{\theta}))$  où les matrices sont données par (4.116).*

Dans la configuration où aucun TCC n'émerge dans la dynamique linéarisée du contrôleur séquenté, les matrices de l'équation de sortie du système augmenté  $\mathcal{S}_{b,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  se réduisent à  $\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{C}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{D}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Dans ce cas, la Proposition 4.8 se réduit au résultat du Lemme 4.7.

La procédure de synthèse est alors la suivante. Soient  $N_\theta$  points d'opération  $(\boldsymbol{\theta}_k)_{1 \leq k \leq N_\theta} \in \Theta$  et  $N_\theta$  scalaires  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq N_\theta} \in \mathbb{C}$ . L'objectif du design est de calculer une unique matrice  $\mathbf{K}_b \in \mathbb{R}^{m \times r(p+p_1)}$  telle que chaque  $\lambda_k$  soit un pôle du système bouclé pour le système dont la représentation d'état en boucle ouverte est donnée par (4.116) avec  $\boldsymbol{\theta}_e = \boldsymbol{\theta}_k$ . Si plusieurs pôles  $\lambda_k, \lambda_{k+1} \dots, \lambda_{k'}$  sont à imposer en boucle fermée pour un unique point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ , la procédure précédente est appliquée en prenant  $\boldsymbol{\theta}_k = \boldsymbol{\theta}_{k+1} = \dots = \boldsymbol{\theta}_{k'} = \boldsymbol{\theta}_e$ .

Sur la base du Théorème 4.5 portant sur le placement de structure propre, la première étape réside dans le calcul d'une paire  $(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) \in \mathbb{C}^{n+p_1} \times \mathbb{C}^m$  pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_k$  telle que  $(\mathbf{A}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) - \lambda \mathbf{I}_{n+p_1}) \mathbf{v}_k + \mathbf{B}_{b,\delta \mathbf{u}}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ , où  $\mathbf{B}_{b,\delta \mathbf{u}}^S(\boldsymbol{\theta}_k)$  et  $\mathbf{D}_{b,\delta \mathbf{u}}^S(\boldsymbol{\theta}_k)$  dénotent respectivement les  $m$  premières colonnes de  $\mathbf{B}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k)$  et  $\mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k)$  correspondant à l'entrée  $\delta \mathbf{u}$ . Ensuite, la synthèse consiste à trouver une unique matrice  $\mathbf{K}_b$  telle que pour tout

$k \in \{1, \dots, N_\theta\}$ ,  $\mathbf{K}_b [\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{v}_k + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{w}_k] = \mathbf{w}_k$ . En introduisant  $\mathbf{V} = [v_1 \dots v_{N_\theta}]$  et  $\mathbf{W} = [w_1 \dots w_{N_\theta}]$ , et en supposant que 1) un tel gain  $\mathbf{K}_b$  existe et 2)  $\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{V} + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{W}$  est de ligne rang plein, alors on a  $\mathbf{K}_b = \mathbf{W} (\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{V} + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{W})^\dagger$ . En pratique on vérifie 1)  $\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{V} + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{W}$  est de ligne rang plein et 2) l'égalité matricielle  $\mathbf{W} (\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{V} + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{W})^\dagger (\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{V} + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{W}) = \mathbf{W}$  est satisfaite. Si ces deux conditions sont rencontrées, alors l'unique gain  $\mathbf{K}_b$  fournissant le placement de structure propre désiré est donné par  $\mathbf{K}_b = \mathbf{W} (\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{V} + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{W})^\dagger$ .

#### 4.2.2.3 Gain intégral localisé en aval de l'action intégrale

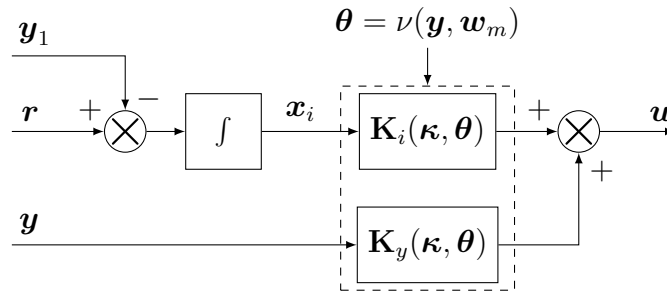


Figure 4.22 Structure du contrôleur nonlinéaire séquencé par retour de sortie avec gain intégral en aval de la composante intégrale  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$

Dans cette seconde phase, on s'attache à étudier le contrôle du système  $\mathcal{S}$  par un contrôleur séquencé de type retour de sortie pour un gain d'intégration situé en aval de la composante intégrale. L'architecture de contrôle étudiée est celle de la Fig. 4.22 et la dynamique est donnée par :

$$\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{u} = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_i + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (4.117)$$

où  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$  et  $\mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  sont des matrices dont les coefficients sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  du point d'opération  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . La dépendance vis-à-vis du vecteur  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathcal{K} \subset \mathbb{R}^{n_k}$  dénote la dépendance des matrices relativement à des paramètres ajustables. Comme pour l'étude précédente, on suppose que le  $m = p_1$ , i.e., que le nombre d'entrées  $m$  du système coïncide avec le nombre de sorties  $p_1$  du système à contrôler.

La mise à l'équilibre de  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ , lorsque placé en boucle fermée



avec le système  $\mathcal{S}$ , donne les relations :

$$\begin{cases} \mathbf{0} = \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{cases} \quad (4.118)$$

Ainsi,  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et, sous l'hypothèse que le gain intégral est inversible, la variable d'intégration à l'équilibre est caractérisé de manière unique par :

$$\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)^{-1} [\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e)]. \quad (4.119)$$

La linéarisation de la dynamique du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  donne alors lieu à la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  illustrée à la Fig. 4.21 et caractérisée par :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{y} + \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \boldsymbol{\theta} \\ \delta \boldsymbol{\theta} = \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{y} + \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{w}_m} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{w}_m \end{cases} \quad (4.120)$$

En notant  $\theta_l$  la  $l$ -ième composante de  $\boldsymbol{\theta}$ , la  $l$ -ième colonne du TCC  $\mathbf{K}_\theta$  prend la forme :

$$\mathbf{K}_{\theta,l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \frac{\partial \mathbf{K}_i}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) + \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e). \quad (4.121)$$

En comparant les contrôleurs séquencés  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  et  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  correspondant, respectivement, à un gain intégral situé en aval et en amont de la composante intégrale, les dynamique linéarisées associées données par (4.108) et (4.120) présentent la même structure globale. La différence intervient dans la structure des TCC respectivement donnés par (4.109) et (4.121). En particulier, les TCC liés au contrôleur séquencé ici étudié  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  font intervenir la composante intégrale à l'équilibre  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$ .

Comme lors de la première phase de l'étude, on considère le système augmenté (4.104) incluant la contribution de l'intégrateur  $\delta \mathbf{x}_i$ . Ainsi, le système bouclé résultant de l'interconnexion de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  avec  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  est équivalent au contrôle par retour de sortie du système  $\mathcal{S}_{a,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  via le gain de rétroaction<sup>18</sup> :

$$\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \end{bmatrix}. \quad (4.122)$$

---

18. La contribution de l'entrée  $\mathbf{w}_m$  est omise puisque sa nature exogène la rend non contributive du point de vue du placement de structure propre.

Dans le contexte du Lemme 4.7, on choisit une nouvelle fois *a priori* la structure de séquencement des gains sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{i,j} \phi_j(\boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{y,j} \phi_j(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.123)$$

où le vecteur de paramètres ajustables  $\boldsymbol{\kappa} \in \mathbb{R}^{rm(p+p_1)}$  rassemble les éléments des matrices  $\mathbf{K}_{i,j} \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$  et  $\mathbf{K}_{y,j} \in \mathbb{R}^{m \times p}$  pour  $j \in \{1, \dots, r\}$ . Les TCC émergeant de  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  sont alors reformulés sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) &= \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{\theta,1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) & \dots & \mathbf{K}_{\theta,s}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{i,j} \left( \nabla \phi_j(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \otimes \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \right) + \sum_{j=1}^r \mathbf{K}_{y,j} \left( \nabla \phi_j(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \otimes \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \right) \\ &= \mathbf{K}_b \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right), \end{aligned} \quad (4.124)$$

où  $\Phi(\boldsymbol{\theta}) = [\phi_1(\boldsymbol{\theta}) \dots \phi_r(\boldsymbol{\theta})]^\top$ ,  $J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e)$  représente la matrice jacobienne de  $\Phi$  évaluée en  $\boldsymbol{\theta}_e$  et  $\mathbf{K}_b \in \mathbb{R}^{m \times r(p+p_1)}$  tel que :

$$\mathbf{K}_b \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{K}_{i,1} & \mathbf{K}_{y,1} & \mathbf{K}_{i,2} & \mathbf{K}_{y,2} & \dots & \mathbf{K}_{i,r} & \mathbf{K}_{y,r} \end{bmatrix}. \quad (4.125)$$

Sur la base de l'équation de sortie de  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$ , on obtient :

$$\boldsymbol{\delta u} = \mathbf{K}_b \left\{ \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x}_i \\ \boldsymbol{\delta y} \end{bmatrix} + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \boldsymbol{\delta y} \right\}. \quad (4.126)$$

Il est à présent possible de modifier l'équation de sortie du système augmenté  $\mathcal{S}_{a,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  afin d'obtenir la représentation d'état suivante :

$$\mathcal{S}_{b,l}(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta \dot{x}} \\ \boldsymbol{\delta \dot{x}_i} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x} \\ \boldsymbol{\delta x}_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta u} \\ \boldsymbol{\delta r} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Y}_b = \mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x} \\ \boldsymbol{\delta x}_i \end{bmatrix} + \mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta u} \\ \boldsymbol{\delta r} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.127)$$

avec  $\mathbf{A}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{A}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{B}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{B}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) &= \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{C}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e) + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{C}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e), \\ \mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_e) &= \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{D}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e) + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{D}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e). \end{aligned} \quad (4.128)$$

où  $\mathbf{C}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{p \times (n+p_1)}$  et  $\mathbf{D}_{a,y}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{p \times (m+p_1)}$  dénotent, respectivement, les sous-matrices  $\mathbf{C}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{D}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e)$  correspondant à la sortie du système  $\delta \mathbf{y}$  (i.e., les  $p$  dernières lignes). Sous cette nouvelle formulation, la sortie du système est donnée par  $\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_b \mathbf{Y}_b$  où les composantes de  $\mathbf{K}_b$  sont statiques (i.e., indépendantes du point d'opération courant  $\boldsymbol{\theta}_e$ ) et indépendantes. Cependant, contrairement à la configuration  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e)$  précédemment étudiée, les matrices de l'équation de sortie dépendent ici explicitement de la condition d'équilibre  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$  de la composante intégrale du contrôleur séquencé. Celle-ci étant caractérisée par la valeur des gains du contrôleur et les conditions d'équilibre du système (4.118), on obtient, après reformulation,

$$\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{K}_b \left\{ \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right\}. \quad (4.129)$$

Le problème ainsi reformulé prend alors la forme de la proposition suivante.

**Proposition 4.9** *Le design du contrôleur séquencé (non linéaire) par retour de sortie  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  donné par (4.118), sur la base de la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  exprimée par (4.120) avec un séquençement des gains choisi sous la forme (4.123) est équivalent au design, dans le cadre d'une synthèse multimodèle, du gain par retour de sortie  $\mathbf{K}_b$  relativement au système augmenté  $(\mathbf{A}_b(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{B}_b(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{C}_b(\boldsymbol{\theta}), \mathbf{D}_b(\boldsymbol{\theta}))$  où les matrices sont données par (4.128) et avec une composante intégrale à l'équilibre caractérisée par (4.129).*

La procédure de synthèse est alors la suivante. Soient  $N_\theta$  points d'opération  $(\boldsymbol{\theta}_k)_{1 \leq k \leq N_\theta} \in \Theta$  et  $N_\theta$  scalaires  $(\lambda_k)_{1 \leq k \leq N_\theta} \in \mathbb{C}$ . L'objectif du design est de calculer une unique matrice  $\mathbf{K}_b \in \mathbb{R}^{m \times r(p+p_1)}$  telle que chaque  $\lambda_k$  soit un pôle du système bouclé pour le système ont la représentation d'état en boucle ouverte est donnée par (4.128) avec  $\boldsymbol{\theta}_e = \boldsymbol{\theta}_k$ . Tirant une nouvelle fois profit du Théorème 4.5 portant sur la placement de structure propre, la première étape est identique à celle de l'étude sur le gain intégral situé en amont de la composante intégrale. En effet, pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_k$ , on détermine une paire  $(\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_k) \in \mathbb{C}^{n+p_1} \times \mathbb{C}^m$  telle que  $(\mathbf{A}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) - \lambda \mathbf{I}_{n+p_1}) \mathbf{v}_k + \mathbf{B}_{b,\delta \mathbf{u}}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{w}_k = \mathbf{0}$ . Dans un second temps, la synthèse consiste également à trouver une unique matrice  $\mathbf{K}_b$  telle que pour tout  $k \in \{1, \dots, N_\theta\}$ ,  $\mathbf{K}_b [\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{v}_k + \mathbf{D}_{b,\delta \mathbf{u}}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{w}_k] = \mathbf{w}_k$ . Cependant, les matrices  $\mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k)$  et

$\mathbf{D}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k)$  dépendent de la valeur de la condition d'équilibre de la composante intégrale  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_k)$ . Cette dernière s'exprimant sous la forme (4.129), la synthèse des gains du contrôleur séquencé consiste donc à déterminer le gain de retour de sorte  $\mathbf{K}_b \in \mathbb{R}^{m \times r(p+p_1)}$  et les valeurs des composantes intégrales à l'équilibre  $\mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_1), \dots, \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_{N_\theta}) \in \mathbb{R}^{p_1}$  tels que

$$\forall k \in \{1, \dots, N_\theta\}, \begin{cases} \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{K}_b \left\{ \Phi(\boldsymbol{\theta}_k) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_k) \\ \mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_k) \end{bmatrix} \right\} \\ \mathbf{w}_k = \mathbf{K}_b \left[ \mathbf{C}_b^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{v}_k + \mathbf{D}_{b,\delta u}^S(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{w}_k \right] \end{cases} \quad (4.130)$$

On obtient donc un système d'équations couplées à résoudre afin d'obtenir le placement de pôles souhaité.

### 4.2.3 Applications

La méthode de gestion des TCC sur la base de la technique du placement de structure propre est mise en œuvre pour les deux mêmes applications que dans le cadre de la synthèse  $H_\infty$  structurée (Sous-Section 4.1.4), à savoir le contrôle de la dynamique en tangage d'un missile ainsi que le contrôle de la dynamique flexible d'une section d'aile.

#### 4.2.3.1 Contrôle de la dynamique en tangage d'un missile

On considère à nouveau le modèle du missile tel que présenté à la Sous-Section 4.1.4.1. On reprend en particulier l'étude menée dans la Sous-Section 4.2.1.4. Les résultats présentés sont issus des deux articles de conférences (Lhachemi et al., 2016a,c) et de l'article de journal (Lhachemi et al., 2017d).

**Structure de contrôle.** On envisage les deux structures de contrôle précédemment étudiées, à savoir un contrôleur séquencé par retour de sortie avec gain intégral situé, respectivement, en amont et en aval de la composante intégrale. Plus spécifiquement, la configuration « en aval »  $\mathcal{C}(\kappa)$  est caractérisée par la dynamique (4.57) et est illustrée à la Fig 4.5. Pour la configuration « en amont », la dynamique du contrôleur est illustrée à la Fig. 4.23 et est caractérisée par :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = K_i(\boldsymbol{\theta}) \eta_c - \eta \\ \delta_c = \tilde{x}_i + K_\eta(\boldsymbol{\theta}) \eta + K_q(\boldsymbol{\theta}) q \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) \end{cases} \quad (4.131)$$



intégrale (4.116),

$$\mathbf{C}_b(\boldsymbol{\theta}_e) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a,x_i}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_{a,\eta}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_{a,q}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} 0 \\ \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e) \\ q_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \mathbf{C}_{a,\alpha}(\boldsymbol{\theta}_e), \quad (4.134)$$

tandis que pour la configuration avec un gain intégral situé en aval de la composante intégrale (4.128),

$$\mathbf{C}_b(\boldsymbol{\theta}_e) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{a,x_i}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_{a,\eta}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_{a,q}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \eta_e(\boldsymbol{\theta}_e) \\ q_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \mathbf{C}_{a,\alpha}(\boldsymbol{\theta}_e), \quad (4.135)$$

où<sup>19</sup>  $J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) = \text{sign}(\alpha_e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & M_e & 2|\alpha_e| \end{bmatrix}^\top$  avec la convention  $\text{sign}(0) = 0$ . Les matrices  $\mathbf{C}_{a,x_i}(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{C}_{a,\eta}(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{C}_{a,q}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{C}_{a,\alpha}(\boldsymbol{\theta}_e)$  représentent, respectivement, les lignes de  $\mathbf{C}_a(\boldsymbol{\theta}_e)$  correspondant aux sorties du système  $\delta x_i$ ,  $\delta \eta$ ,  $\delta q$  et  $\delta \alpha$ .

**Synthèse des gains du contrôleur séquencé.** Sous cette forme, il est possible de procéder à la synthèse des gains des deux contrôleurs  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  et  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  en tenant compte de l'impact des TCC. Les gains ainsi obtenus, pour

1. la synthèse sans tenir compte des TCC telle que effectuée à la Sous-Section 4.2.1.4,
2. la synthèse avec TCC pour  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ ,
3. la synthèse avec TCC pour  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$ ,

sont donnés, respectivement, dans les Tab. 4.7, Tab. 4.8 et Tab. 4.9.

On note que les gains  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_4$  obtenus sont identiques pour les trois approches. Cela provient du fait que ces gains, de par le choix des fonctions de séquencement, n'interviennent pas dans l'expression des TCC (cf. (4.134) et (4.135) sur la base de l'expression de  $J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e)$ ).

**Analyse des résultats de synthèse.** Afin de valider la phase de synthèse, le système est placé en boucle fermée avec les différents contrôleurs synthétisés. On a déjà vu que les gains obtenus en négligeant l'impact des TCC et implémentés avec l'architecture de contrôle  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  aboutissent au placement de pôles du Tab. 4.6, ne coïncidant pas avec le placement de pôles initialement souhaité du Tab. 4.5. Similairement, l'implémentation de ces mêmes gains avec l'architecture de contrôle  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  donne lieu au placement de pôles du Tab. 4.10

---

19. La matrice jacobienne est ici calculée uniquement relativement à la variable de séquencement endogène  $\alpha$ .

Tableau 4.7 Gains séquencés du missile par placement de structure propre - Synthèse ne tenant pas compte des TCC

$K$	$K_i$	$K_\eta$	$K_q$
$K_1$	1.9890	-0.3018	0.8019
$K_2$	-0.9998	0.1498	-0.3382
$K_3$	<b>0.4270</b>	<b>0.2247</b>	<b>0.6279</b>
$K_4$	0.1297	-0.0199	0.0394
$K_5$	<b>-0.1045</b>	<b>-0.0274</b>	<b>-0.0986</b>
$K_6$	<b>0.3489</b>	<b>-0.2069</b>	<b>-0.1977</b>

Tableau 4.8 Gains séquencés du missile par placement de structure propre - Synthèse tenant compte des TCC pour  $\mathcal{C}(\kappa)$

$K$	$K_i$	$K_\eta$	$K_q$
$K_1$	1.9890	-0.3018	0.8019
$K_2$	-0.9998	0.1498	-0.3382
$K_3$	<b>0.0041</b>	<b>0.1517</b>	<b>0.3693</b>
$K_4$	0.1297	-0.0199	0.0394
$K_5$	<b>-0.0230</b>	<b>-0.0188</b>	<b>-0.0674</b>
$K_6$	<b>0.4682</b>	<b>-0.1299</b>	<b>0.0219</b>

Tableau 4.9 Gains séquencés du missile par placement de structure propre - Synthèse tenant compte des TCC pour  $\tilde{\mathcal{C}}(\kappa)$

$K$	$K_i$	$K_\eta$	$K_q$
$K_1$	1.9890	-0.3018	0.8019
$K_2$	-0.9998	0.1498	-0.3382
$K_3$	<b>0.0777</b>	<b>0.1549</b>	<b>0.3602</b>
$K_4$	0.1297	-0.0199	0.0394
$K_5$	<b>-0.0476</b>	<b>-0.0204</b>	<b>-0.0705</b>
$K_6$	<b>0.6613</b>	<b>-0.0951</b>	<b>0.2099</b>

qui, une nouvelle fois, ne coïncide pas avec celui initialement désiré. *A contrario*, pour les deux synthèses effectuées en tenant compte des TCC, correspondant respectivement aux contrôleurs  $\mathcal{C}(\kappa)$  et  $\tilde{\mathcal{C}}(\kappa)$ , la linéarisation de la dynamique en boucle fermée aux différents points d'opération utilisés dans le design permettent de retrouver le placement de pôles souhaité du Tab. 4.5. Ces résultats valident les procédures de synthèse employées.

**Évaluation comparative du comportement du système non linéaire en boucle fermée.** Pour conclure ce premier exemple d'application, on présente les simulations temporelles correspondant aux différents ajustements obtenus. L'évolution du nombre de Mach est régie par (4.65). Pour le cas du contrôleur  $\tilde{\mathcal{C}}(\kappa)$  l'implémentation utilisée est illustrée à la

Tableau 4.10 Position des pôles du système en boucle fermée pour des gains synthétisés en ne tenant pas compte de l'impact des TCC et implémentés avec  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$

$\theta_1$	$M_e$	$\alpha_e$	$\lambda_r$	$\lambda_c$
$\theta_1$	4	20°	<b>-5.62</b>	<b>-16.3 ± 37.0j</b>
$\theta_2$	4	0°	-13.9	-15 ± 16j
$\theta_3$	2	0°	-12	-12 ± 12j
$\theta_4$	2	20°	<b>-19.4</b>	<b>-11.2 ± 11.5j</b>
$\theta_5$	4	10°	<b>-42.7</b>	<b>-2.95 ± 10.8j</b>
$\theta_6$	3	0°	-12.5	-12.5 ± 12.5j

Fig. 4.5, tandis que pour le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  l'implémentation est celle de la Fig. 4.23. Les évolutions temporelles obtenues pour les grandeurs physiques et les gains des contrôleurs sont illustrées aux Figs. 4.24-4.26. Pour les deux structures de contrôle  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  et  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ , la performance en suivi de référence (Figs. 4.24(a) et 4.25(a)) est meilleure pour les gains obtenus en tenant compte des TCC, notamment en termes de dépassement. En particulier pour la Fig. 4.25(a), le dépassement maximal obtenu est de 48.2% pour les gains synthétisés sans inclure l'impact des TCC contre 6.7% lorsque ces termes sont adéquatement considérés dans le design. Le dépassement excessif en suivi de référence se traduit par une réduction plus importante du nombre de Mach au cours de la manœuvre (Figs. 4.24(b) et 4.25(b)) et plus d'oscillations pour l'angle d'attaque  $\alpha$  (Figs. 4.24(c) et 4.25(c)) et la vitesse en tangage  $q$  (Figs. 4.24(d) et 4.25(d)). L'effort de commande obtenu est également moins soutenu comparativement à l'approche négligeant les TCC (Figs. 4.24(e) et 4.24(f) ainsi que Figs. 4.25(e) et 4.25(f)), avec des gains dont l'amplitude demeure similaire (Fig. 4.26).

Notons que le contrôleur  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  dont le gain intégral est située en aval de la composante intégrale assure un meilleur rejet de perturbations comparativement au contrôleur  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  dont le gain intégral est situé en amont de la composante intégrale. En effet, lors du premier échelon, l'erreur de suivi observé à  $t = 1$  s est légèrement supérieur à  $1.85g$  pour  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  alors qu'elle est inférieure à  $0.2g$  pour  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$ . Cette erreur, en dépit de la composante intégrale, est induite par la nature temps variant de la variable de séquençement qu'est le nombre de Mach dont l'évolution est donnée par les Figs. 4.24(b) et 4.25(b).

On évalue finalement la robustesse de la stratégie de contrôle en procédant à des simulations temporelles pour des coefficients aérodynamiques perturbés d'une amplitude maximale de  $\pm 25\%$ . On se limite ici à la configuration du contrôleur  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  qui affiche une meilleure performance en rejet de perturbation. Les résultats obtenus sont illustrés à la Fig. 4.27, indiquant une bien meilleure performance robuste du système bouclé dont les gains du contrôleur ont été synthétisés en tenant compte des TCC. Il est à noter que le comportement temporel ob-



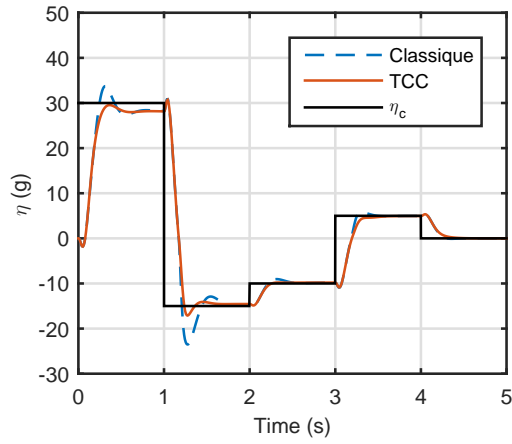
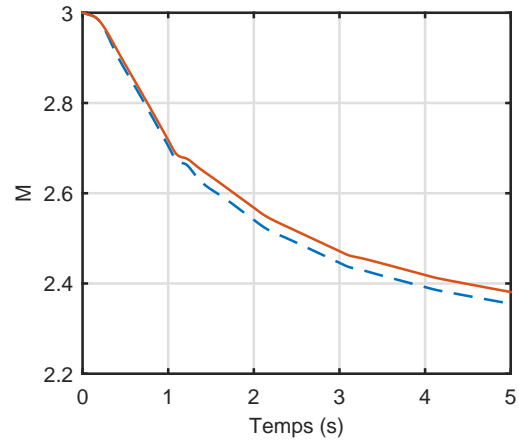
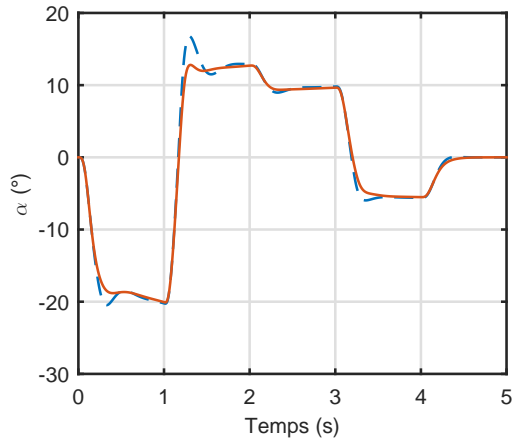
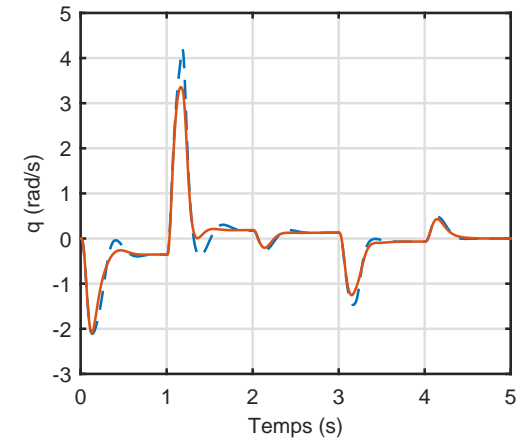
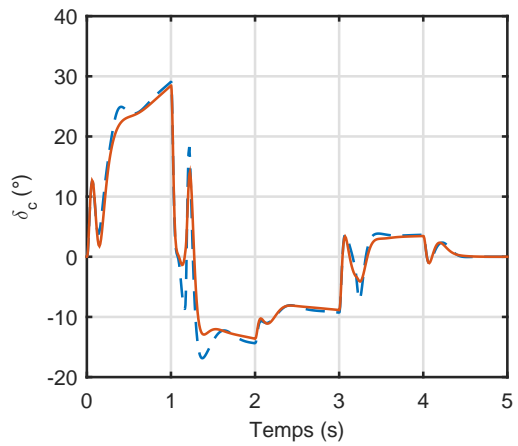
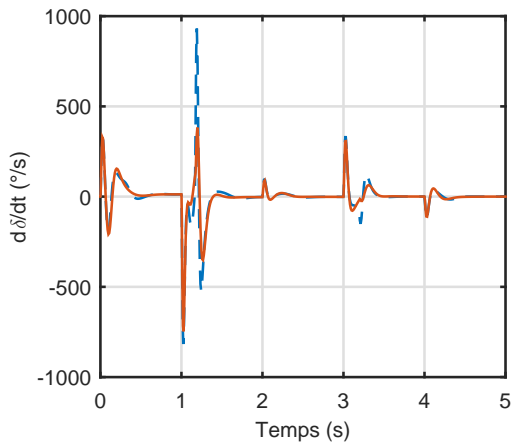
(a) Accélération normale  $\eta$ (b) Nombre de Mach  $M$ (c) Angle d'attaque  $\alpha$ (d) Vitesse en tangage  $q$ (e) Angle de la gouverne  $\delta_t$ (f) Vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ 

Figure 4.24 Réponse du missile en boucle fermée avec  $\tilde{\mathcal{C}}(\kappa)$  pour une série d'échelons de référence

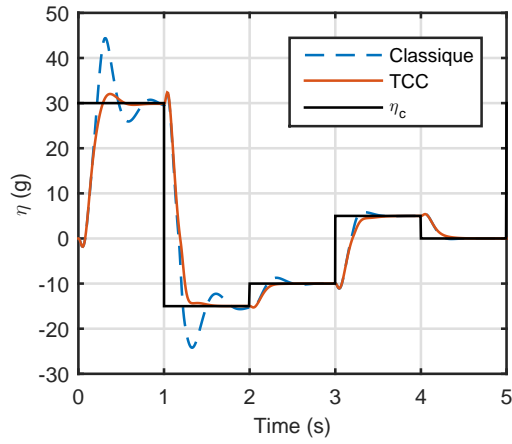
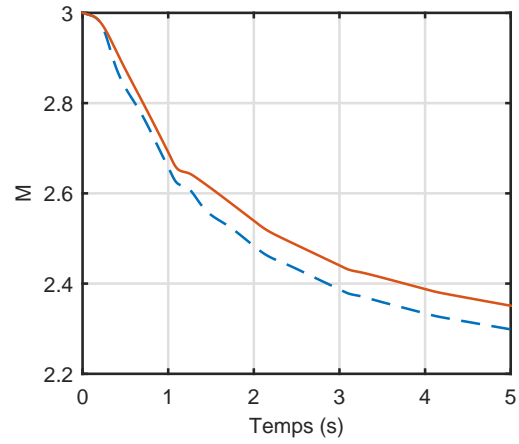
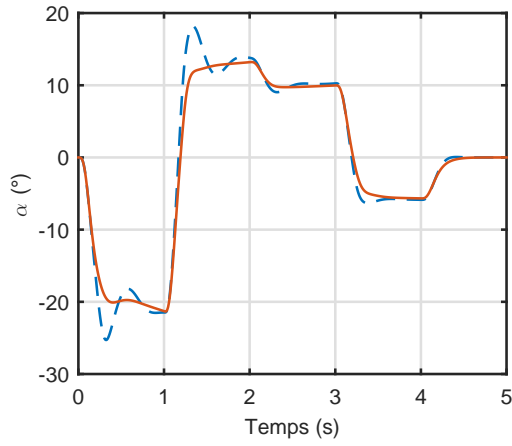
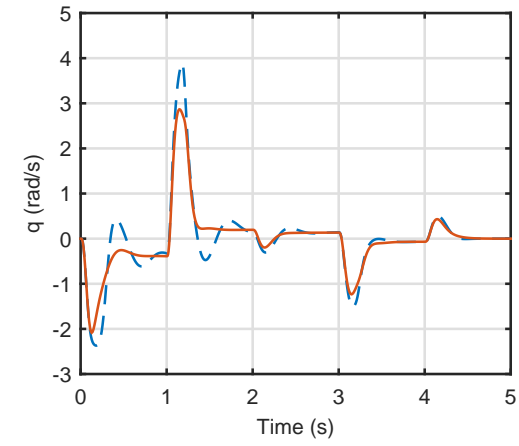
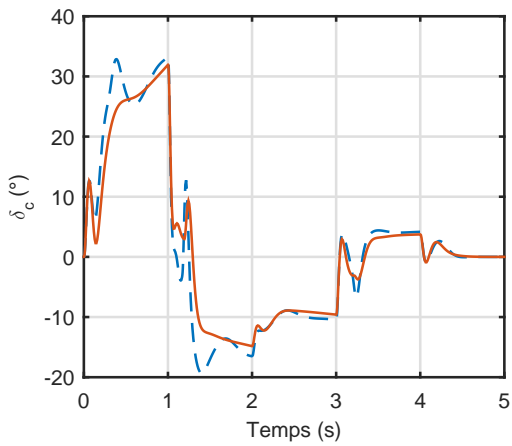
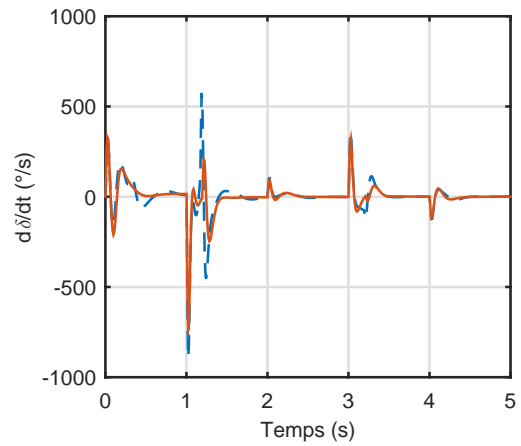
(a) Accélération normale  $\eta$ (b) Nombre de Mach  $M$ (c) Angle d'attaque  $\alpha$ (d) Vitesse en tangage  $q$ (e) Angle de la gouverne  $\delta_t$ (f) Vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ 

Figure 4.25 Réponse du missile en boucle fermée avec  $\mathcal{C}(\kappa)$  pour une série d'échelons de référence

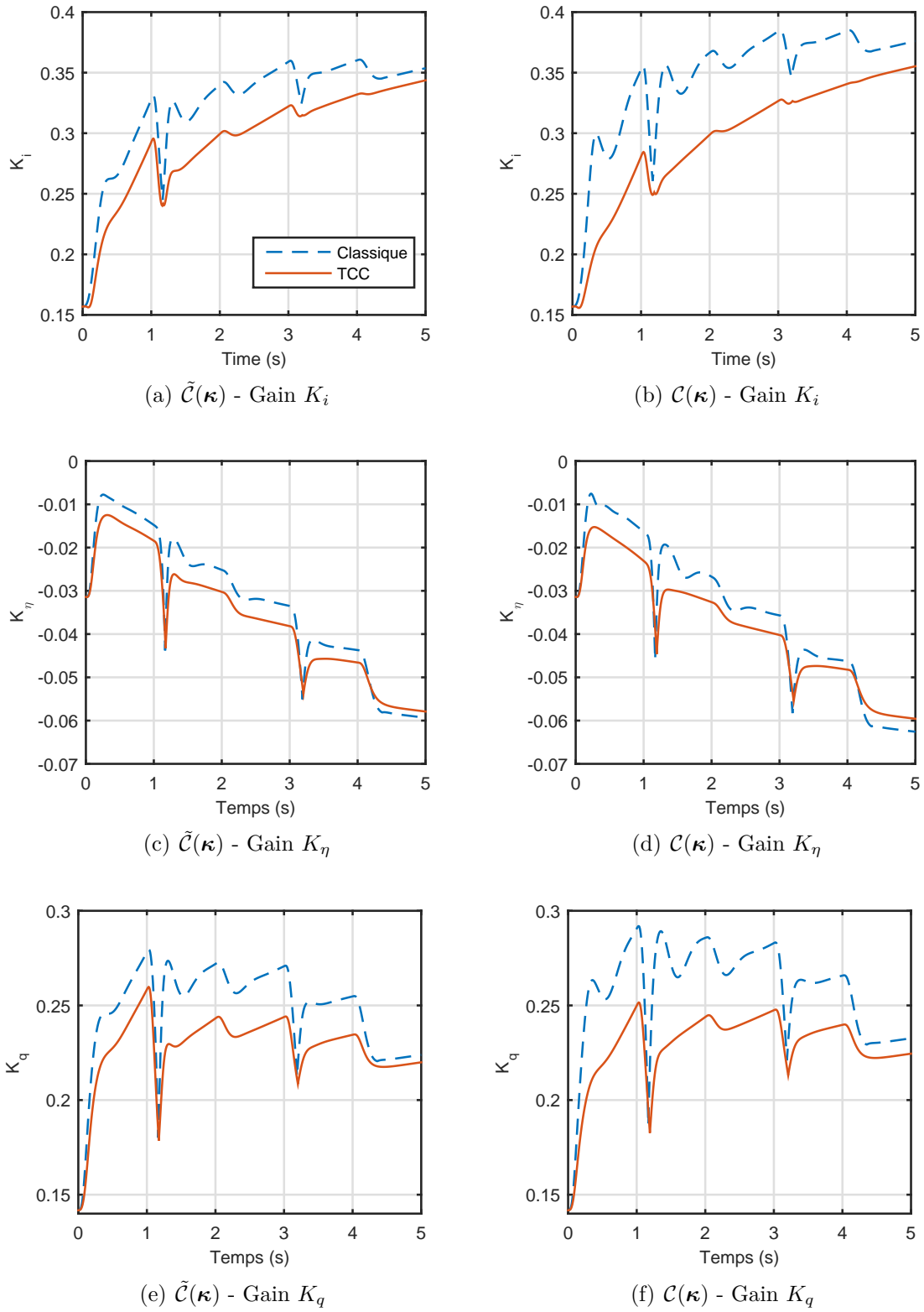


Figure 4.26 Commande du missile - Évolution des gains des contrôleurs  $\tilde{\mathcal{C}}(\kappa)$  (colonne de gauche) et  $\mathcal{C}(\kappa)$  (colonne de droite)

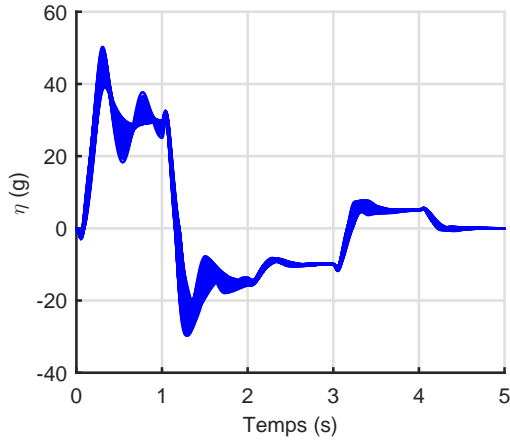
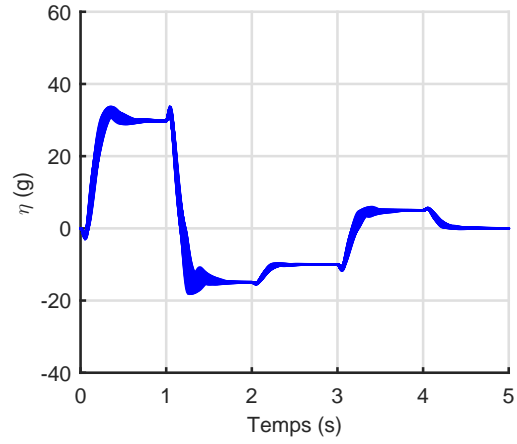
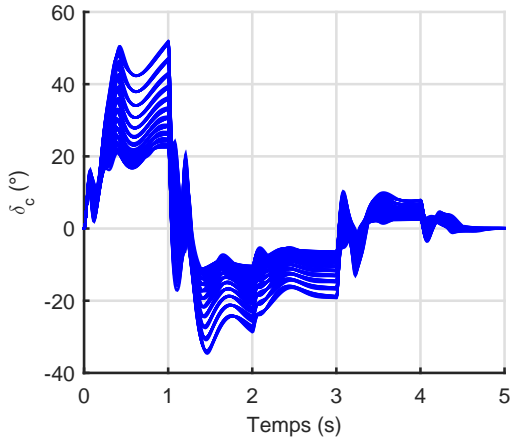
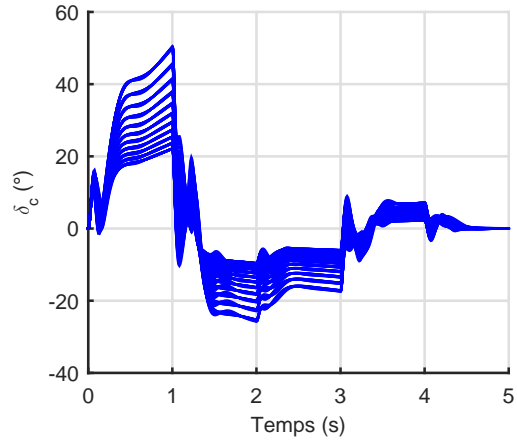
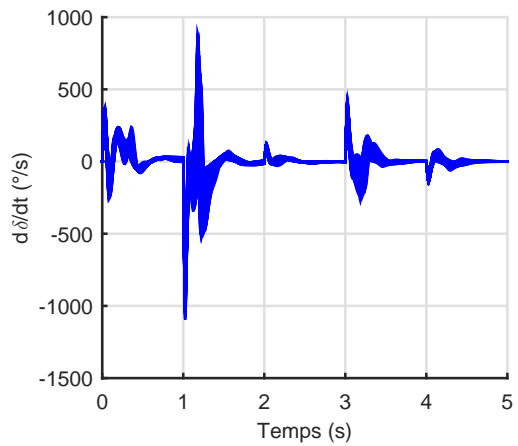
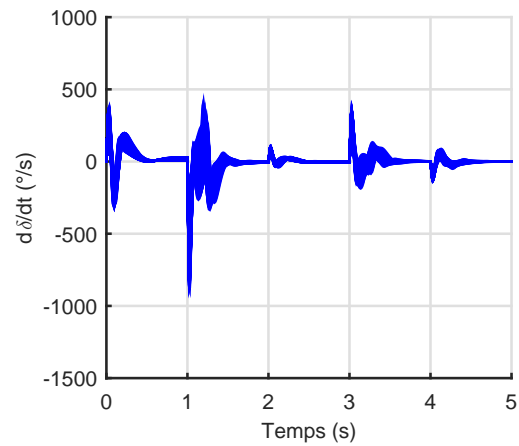
(a) Synthèse classique - accélération  $\eta$ (b) Synthèse avec TCC - accélération  $\eta$ (c) Synthèse classique - angle de la gouverne  $\delta_t$ (d) Synthèse avec TCC - angle de la gouverne  $\delta_t$ (e) Synthèse classique - vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ (f) Synthèse avec TCC - vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ 

Figure 4.27 Réponse du missile en boucle fermée avec  $\mathcal{C}(\kappa)$  pour des coefficients aérodynamiques perturbés avec une amplitude maximale de  $\pm 25\%$

tenu sur la base du placement de structure propre (dont la complexité de mise en œuvre est réduite) est proche des résultats obtenus avec l'approche de synthèse robuste  $H_\infty$  structurée de la Sous-Section 4.1.4.1 (cf. Fig. 4.10).

#### 4.2.3.2 Suppression active du *flutter* pour le BACT

Pour le second exemple d'application, on reprend le cas du modèle du BACT étudié à la Sous-Section 4.1.4.2. Les résultats présentés sont tirés de l'article de journal (Lhachemi et al., 2017c). On se focalise sur la synthèse du contrôleur séquencé par retour de sortie  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  donnée par (4.77) et illustrée à la Fig. 4.13 correspondant à un gain d'intégration situé en aval de la composante intégrale.

**Augmentation de la dynamique du système pour le placement de structure propre.** De manière à formuler le problème de synthèse sous la forme d'un contrôle par retour de sortie, la composante intégrale du contrôleur est incluse dans un modèle augmenté du BACT. On obtient, sur la base du modèle linéarisé du BACT<sup>20</sup>  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  donné par (4.75), le modèle augmenté :

$$\mathcal{S}_{a,l}(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{cases} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}} \\ \delta \dot{x}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta x_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_a \begin{bmatrix} \delta \beta \\ \delta \alpha_r \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta x_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_a \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta x_i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.136)$$

avec

$$\mathbf{A}_a(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ -\mathbf{C}_\alpha & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{\beta_c} & \mathbf{0}_{6 \times 1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_a = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{1 \times 6} & 1 \\ \mathbf{C} & \mathbf{0}_{4 \times 1} \end{bmatrix}, \quad (4.137)$$

où  $\mathbf{C}_\alpha$  représente la ligne de  $\mathbf{C}$  correspondant à la sortie  $\delta \alpha$ . Dès lors, la dynamique en boucle fermée du système  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  avec le contrôleur  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  est équivalente au contrôle par retour de sortie du système augmenté  $\mathcal{S}_{a,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  avec le gain matriciel :

$$\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{bmatrix} K_i(\boldsymbol{\theta}_e) & K_h(\boldsymbol{\theta}_e) & K_\alpha(\boldsymbol{\theta}_e) + K_\alpha^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e) & K_h(\boldsymbol{\theta}_e) & K_{\dot{\alpha}}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix}, \quad (4.138)$$

où le TCC  $K_\alpha^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est donné par (4.80a). Sur la base de la formule de séquence *a priori* (4.93), on choisit de prendre  $r = 6$  avec  $\phi_1(\boldsymbol{\theta}) = 1$ ,  $\phi_2(\boldsymbol{\theta}) = U$ ,  $\phi_3(\boldsymbol{\theta}) = \alpha$ ,  $\phi_4(\boldsymbol{\theta}) = U^2$ ,

---

20. On ne considère pas explicitement les aspects d'incertitudes paramétriques. Dès lors, comparativement à la représentation  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  donnée par (4.75), la dépendance relativement à  $\delta$  est omise.

$\phi_5(\boldsymbol{\theta}) = U|\alpha|$  et  $\phi_6(\boldsymbol{\theta}) = \alpha^2$ . On introduit en conséquence  $\Phi(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} 1 & U & |\alpha| & U^2 & U|\alpha| & \alpha^2 \end{bmatrix}^\top$ . Les matrices de la représentation d'état de  $\mathcal{S}_{l,b}(\boldsymbol{\theta}_e)$  sont alors données par  $\mathbf{A}_b(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{A}_a(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{B}_b = \mathbf{B}_a$ ,  $\mathbf{D}_b = \mathbf{0}_{30 \times 2}$  et, puisque le gain intégral est situé en aval de la composante intégrale, l'application de (4.128) donne :

$$\mathbf{C}_b(\boldsymbol{\theta}_e) = \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \mathbf{C}_a + \left( J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \otimes \begin{bmatrix} x_{i,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ y_e(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \right) \mathbf{C}_{a,\alpha}, \quad (4.139)$$

où <sup>21</sup>  $J_\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) = \text{sign}(\alpha_e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & U_e & 2|\alpha_e| \end{bmatrix}^\top$  avec la convention  $\text{sign}(0) = 0$ . La matrice  $\mathbf{C}_{a,\alpha}$  représente la ligne de  $\mathbf{C}_a$  correspondant à la sortie du système  $\delta\alpha$ . Les paramètres ajustables du contrôleur sont alors rassemblés dans  $\mathbf{K}_b \in \mathbb{R}^{1 \times 30}$ , prenant la forme :

$$\mathbf{K}_b = \begin{bmatrix} K_{i,1} & K_{\alpha,1} & K_{h,1} & K_{\dot{\alpha},1} & K_{\dot{h},1} & K_{i,2} & \dots & K_{h,6} \end{bmatrix}. \quad (4.140)$$

**Procédure de synthèse des gains du contrôleur séquencé.** Sous cette forme, il est possible de procéder à la synthèse des gains du contrôleur  $\mathcal{C}(\boldsymbol{\kappa})$  conformément à la procédure décrite dans la Sous-Section 4.2.2.3. À cette fin, il s'agit de déterminer les points d'opération et les placements de pôles associés à considérer dans la synthèse. La stratégie employée pour sélectionner les points d'opération est la suivante. Un premier point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_1 = (10^\circ, 12 \text{ m/s})$  est considéré pour calculer un premier gain  $K_{b,1}$ . Basé sur l'évaluation des pôles du système en boucle ouverte (Tab. 4.11) et un design LQR préliminaire (de plus amples explications sont fournies ci-dessous), les valeurs propres spécifiées dans le Tab. 4.12 sont placées pour améliorer à la fois la constante de temps et l'amortissement des pôles dominants du système bouclé. Une analyse de stabilité du système LTI en boucle fermée avec le gain  $K_{b,1}$  ainsi calculé, au travers du domaine d'opération  $\Theta$ , est effectuée. Sur la base de ces résultats, un second point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_2 = (10^\circ, 20 \text{ m/s})$  est sélectionné parmi les points d'opération échouant le test de stabilité, ainsi que le placement de structure propre correspondant à effectuer (Tab. 4.12). La procédure est ensuite itérée, permettant de sélectionner six points d'opération. Les valeurs propres ainsi placées en boucle fermée sont résumées dans le Tab. 4.12. La procédure est complétée avec succès dès lors que le test de stabilité et de performance (constante de temps et amortissement) est positif pour les différents points d'opération testés. Dans le cas contraire, la première possibilité est de modifier les paramètres de synthèse en modifiant les points d'opération utilisés et/ou les valeurs propres placées en boucle fermée. Si de tels ajustements ne permettent pas d'obtenir de résultats satisfaisants

---

21. La matrice jacobienne est ici calculée uniquement relativement à la variable de séquençement endogène  $\alpha$ .

sur l'ensemble du domaine d'opération, la seconde option est de modifier les fonctions de séquencement de manière à augmenter leurs degrés de liberté, permettant ainsi de considérer un plus grand nombre de points d'opération dans la procédure de synthèse.

Tableau 4.11 Points d'opération utilisés pour le design du contrôleur du BACT et pôles en boucle ouverte associés

$\theta_k$	$\alpha_e$ (deg)	$U_e$ (m/s)	$\lambda_{c,1}$	$\lambda_{c,2}$	$\lambda_{c,3}$
$\theta_1$	10	12	$-0.599 \pm 30.3i$	$-1.65 \pm 15.3i$	$-25 \pm 43.3i$
$\theta_2$	10	20	$-0.820 \pm 31.5i$	$-1.97 \pm 15.6i$	$-25 \pm 43.3i$
$\theta_3$	3	14	$0.854 \pm 16.9i$	$-3.24 \pm 16.0i$	$-25 \pm 43.3i$
$\theta_4$	6	13	$-0.543 \pm 23.5i$	$-1.78 \pm 15.5i$	$-25 \pm 43.3i$
$\theta_5$	3	18	$1.06 \pm 17.6i$	$-3.72 \pm 16.6i$	$-25 \pm 43.3i$
$\theta_6$	1	20	$2.00 \pm 16.3i$	$-4.79 \pm 16.0i$	$-25 \pm 43.3i$

Tableau 4.12 Paramètres du placement de pôles pour le contrôle du BACT

$\theta_k$	$\alpha_e$ (deg)	$U_e$ (m/s)	$\lambda_r$	$\lambda_{c,1}$	$\lambda_{c,2}$
$\theta_1$	10	12	-2.98	$-8.19 \pm 6.58i$	$-8.78 \pm 13.3i$
$\theta_2$	10	20	-2.84	$-1.95 \pm 10.2i$	$-16.2 \pm 28.8i$
$\theta_3$	3	14	-0.509	$-4.60 \pm 18.7i$	$-15.2 \pm 14.2i$
$\theta_4$	6	13	-0.858	$-2.66 \pm 14.0i$	$-16.4 \pm 13.1i$
$\theta_5$	3	18	-0.661	$-6.11 \pm 16.2i$	$-14.0 \pm 24.4i$
$\theta_6$	1	20	-1.03	$-2.91 \pm 13.8i$	$-15.0 \pm 24.5i$

Le choix du placement de pôles désiré est toujours délicat. En effet, il n'existe pas de règles s'appliquant de manière universelle permettant d'obtenir un niveau de performance adéquat pour le système bouclé. Pour le cas du BACT, on observe en particulier que l'amélioration de l'amortissement des pôles non dominants aboutit généralement à un effort de commande non soutenable ou à des performances du système bouclé non satisfaisantes dans certaines régions du domaine d'opération. Dans ce contexte, les valeurs propres placées en boucle fermée telles que listées dans le Tab. 4.12 sont issues d'un design LQR préliminaire permettant de dessiner une zone pertinente du plan complexe où assigner les pôles, ainsi que d'un ajustement *a posteriori* effectué à la main sur la base d'une procédure de type « essais-erreurs ». Pour chaque point d'opération  $\theta_k$ , l'index de performance quadratique  $\mathcal{J}$  a été sélectionné comme suit :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} c_1 \delta x_i^2(t) + c_2 \delta \alpha^2(t) + c_3 \delta h^2(t) + c_4 \delta \beta_c^2(t) dt, \quad (4.141)$$

où les pondérations  $c_i \in \mathbb{R}_+^*$  sont ajustées afin d'obtenir un comportement adéquat du système bouclé au point d'opération  $\theta_k$  avec un effort de commande soutenable. Parmi les sept pôles

du système bouclé ainsi obtenu, les cinq plus lents sont utilisés comme valeurs initiales pour le placement de structure propre. De par le fait que seuls cinq des sept pôles que compte le système bouclé sont placés lors de la synthèse, il est nécessaire de valider *a posteriori* que les deux pôles restants sont adéquatement placés.

Une nouvelle fois, deux synthèses ont été effectuées, la première faisant fi de la contribution des TCC, tandis que la seconde les inclut explicitement dans le processus de synthèse. Les gains ainsi obtenus sont résumés dans le Tab. 4.13. La seule différence observée l'est pour les paramètres ajustables du gain séquencé  $K_\alpha$ .

Tableau 4.13 Gains séquencés du BACT par placement de structure propre - synthèse avec/sans TCC

	$K_i$	$K_\alpha$		$K_h$	$K_{\dot{\alpha}}$	$K_{\dot{h}}$
		classique	TCC			
$K_1$	-7.3150	-1.4693	18.8081	-113.8780	1.2779	-9.5216
$K_2$	0.7420	0.7455	-1.8065	15.7404	-0.1040	0.8274
$K_3$	4.7541	-104.0091	-36.6005	-140.7791	-1.8637	22.7389
$K_4$	-0.0217	-0.0321	0.0429	-0.4840	0.0021	-0.0170
$K_5$	-0.5841	4.9016	2.5877	-4.2826	0.1282	-1.7004
$K_6$	-41.6507	2.0273	-16.4242	633.5000	-2.7847	31.8530

**Analyse des résultats de synthèse.** Afin de valider le processus de synthèse, le système non linéaire en boucle fermée est linéarisé aux différents points d'opération utilisés dans le design (Tab. 4.12). Comme attendu, la mise en œuvre de la méthode de placement de structure propre en faisant fi de la contribution des TCC donne lieu à un placement de pôles effectif distinct de celui désiré, confère le Tab. 4.14. En particulier, le système bouclé est instable pour des angles d'attaque  $\alpha_e$  au-delà de cinq degrés. *A contrario*, l'approche ici développée pour inclure la contribution des TCC permet effectivement d'obtenir le placement de pôles désiré du Tab. 4.5.

Comme mentionné précédemment, la position des deux pôles restants qui n'ont pas été placés lors de la synthèse doivent être validés *a posteriori*. Pour l'approche incluant l'impact des TCC, ces pôles sont localisés, pour les six points d'opération du design, respectivement en  $-8.79 \pm 49.0i$ ,  $-8.22 \pm 43.4i$ ,  $-7.33 \pm 39.2i$ ,  $-7.83 \pm 44.8i$ ,  $-7.21 \pm 35.3i$  et  $-9.37 \pm 35.7i$ . Ils sont ainsi stables, correspondant aux pôles les plus rapides du système bouclé.

**Évaluation comparative du comportement du système non linéaire en boucle fermée.** Le contrôleur autoséquenté  $\mathcal{C}(\kappa)$  précédemment synthétisé est implémenté sur le



Tableau 4.14 Position des pôles du système en boucle fermée pour des gains synthétisés en ne tenant pas compte de l'impact des TCC et implémentés avec  $\mathcal{C}(\kappa)$

$\theta_k$	$\alpha_e$ (deg)	$U_e$ (m/s)	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
$\theta_1$	10	12	<b>8.77</b>	<b>0.728</b>	$-3.46 \pm 16.6i$
$\theta_2$	10	20	<b><math>3.47 \pm 2.99i</math></b>	$-5.60 \pm 18.6i$	$-11.1 \pm 52.1i$
$\theta_3$	3	14	$-0.963 \pm 2.22i$	$-1.37 \pm 18.4i$	$-9.63 \pm 44.8i$
$\theta_4$	6	13	<b>6.08</b>	<b>1.00</b>	$-2.66 \pm 16.1i$
$\theta_5$	3	18	$-1.97$	$-6.66$	$-2.35 \pm 19.6i$
$\theta_6$	1	20	$-1.04$	$-2.93 \pm 13.8i$	$-14.9 \pm 24.3i$

système non linéaire d'origine  $\mathcal{S}$  tel qu'illustré à la Fig. 4.13. Pour une vitesse d'écoulement de l'air  $U = 16$  m/s, la condition initiale est prise comme étant  $h_0 = 0.01$  m et  $\alpha_0 = 5^\circ$  (les autres composantes du vecteur d'état sont initialisés à zéro), entraînant en boucle ouverte le phénomène de *flutter* à travers l'émergence de cycles limites d'oscillation. Le système est placé en boucle fermée à  $t = 5$  s. La performance du contrôleur en termes de suppression du *flutter* est évaluée en fixant à zéro l'entrée de référence  $\alpha_r$  durant 5 s. Finalement, de manière à évaluer la performance en suivi de références de type échelon à travers le domaine d'opération, l'entrée de référence  $\alpha_r$  est imposée à  $\pm 8^\circ$  à  $t = 10$  s. Les réponses temporelles des différentes grandeurs physiques sont illustrées à la Fig. 4.28, tandis que l'évolution des gains est donnée à la Fig. 4.29.

Les gains du contrôleur séquencé obtenus en ignorant la contribution des TCC permettent de réduire l'amplitude des oscillations, autant pour l'angle de torsion  $\alpha$  que le déplacement en flexion  $h$ , mais échouent à supprimer totalement le phénomène de *flutter*. De plus le système bouclé est instable pour des angles de référence au-delà de  $4^\circ$ . *A contrario*, le contrôleur séquencé synthétisé en tenant compte des TCC offre un bon niveau de performance, autant en suppression du *flutter* qu'en suivi de référence, tout en maintenant un effort de commande soutenable.

Les simulations se focalisent à présent sur les gains synthétisés en présence des TCC. La Fig. 4.30 illustre la réponse du système bouclé pour différentes valeurs de la vitesse de l'écoulement de l'air  $U \in \{12, 13, \dots, 19, 20\}$  m/s afin d'évaluer la performance en suppression du *flutter* et suivi de référence pour  $\alpha_{\text{ref}} \in \{-10, -8, \dots, 8, 10\}$  deg. En particulier, on constate que la stratégie de contrôle proposée permet d'obtenir la suppression du *flutter* ainsi qu'un suivi de référence avec un bon temps de réponse (inférieur à deux secondes) et un bon amortissement (Fig. 4.30(a) et Fig. 4.30(b)). De plus, l'effort de commande demeure raisonnable (Fig. 4.30(c)), à l'exception des configurations aérodynamiques les plus défavorables (correspondant aux faibles vitesses de l'écoulement de l'air  $U$ ) et les angles de référence les plus

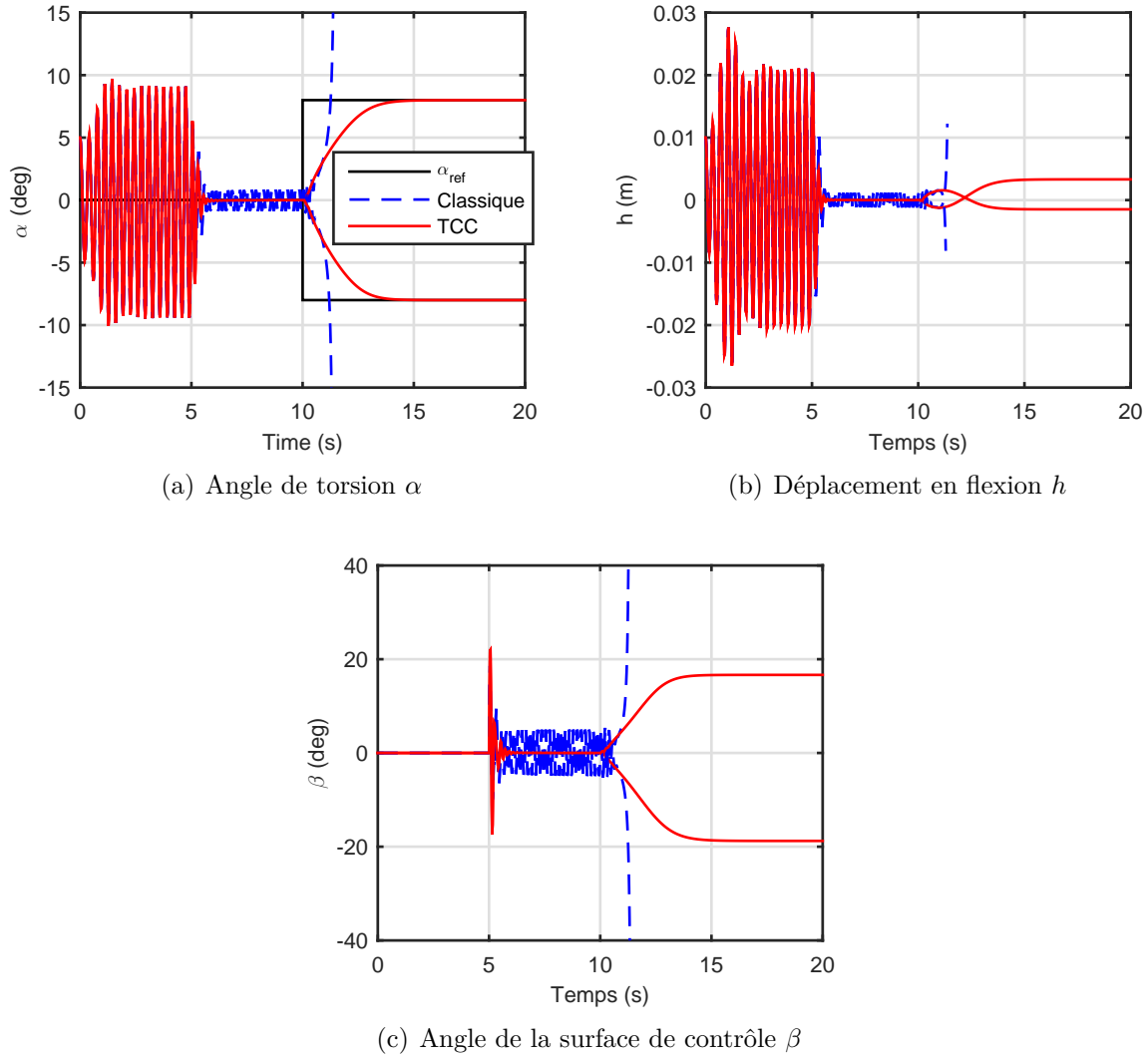


Figure 4.28 Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du *flutter* et en suivi de référence pour  $U = 16 \text{ m/s}$

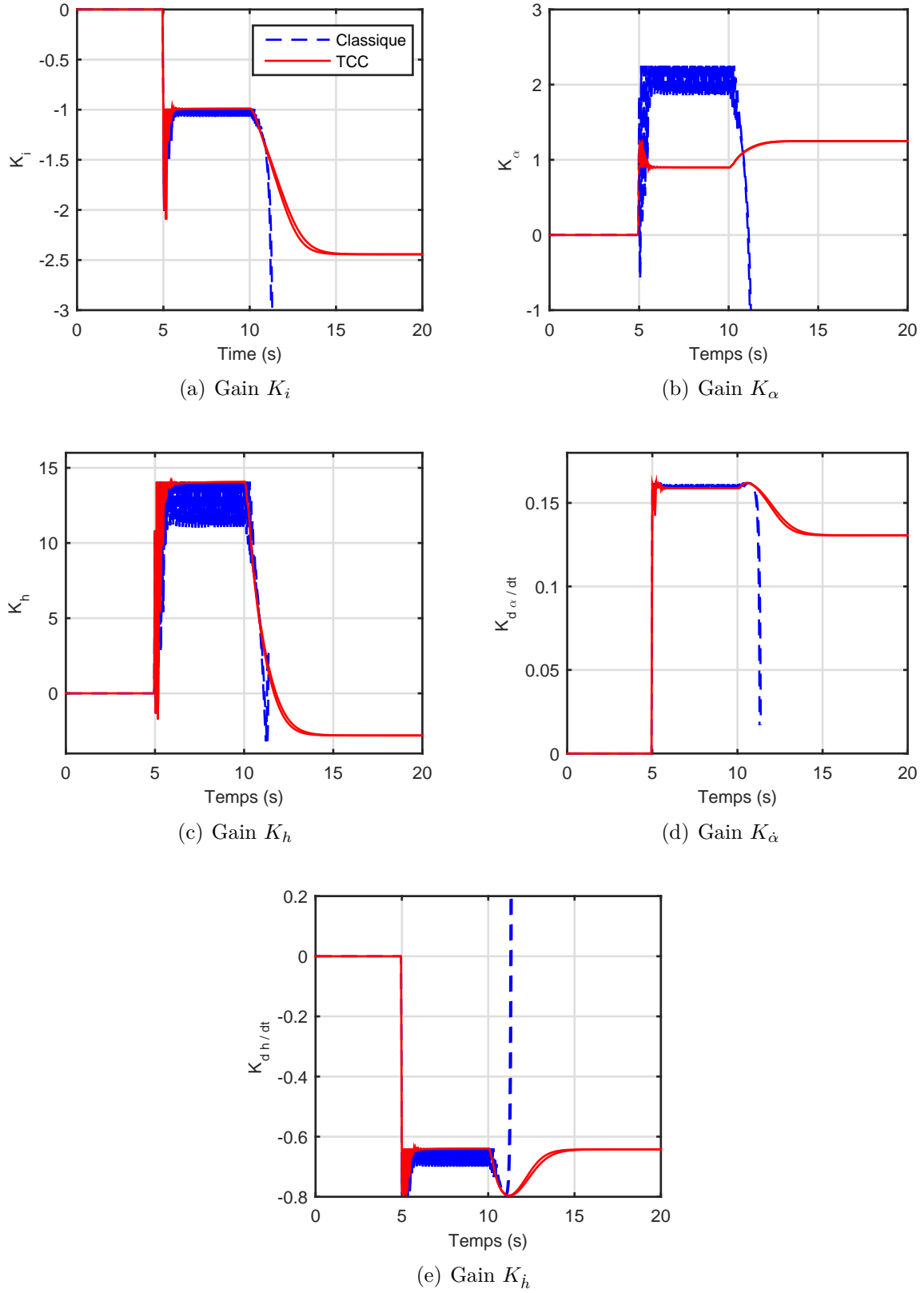


Figure 4.29 Commande du BACT - Évolution des gains du contrôleur  $\mathcal{C}(\kappa)$

élevés.

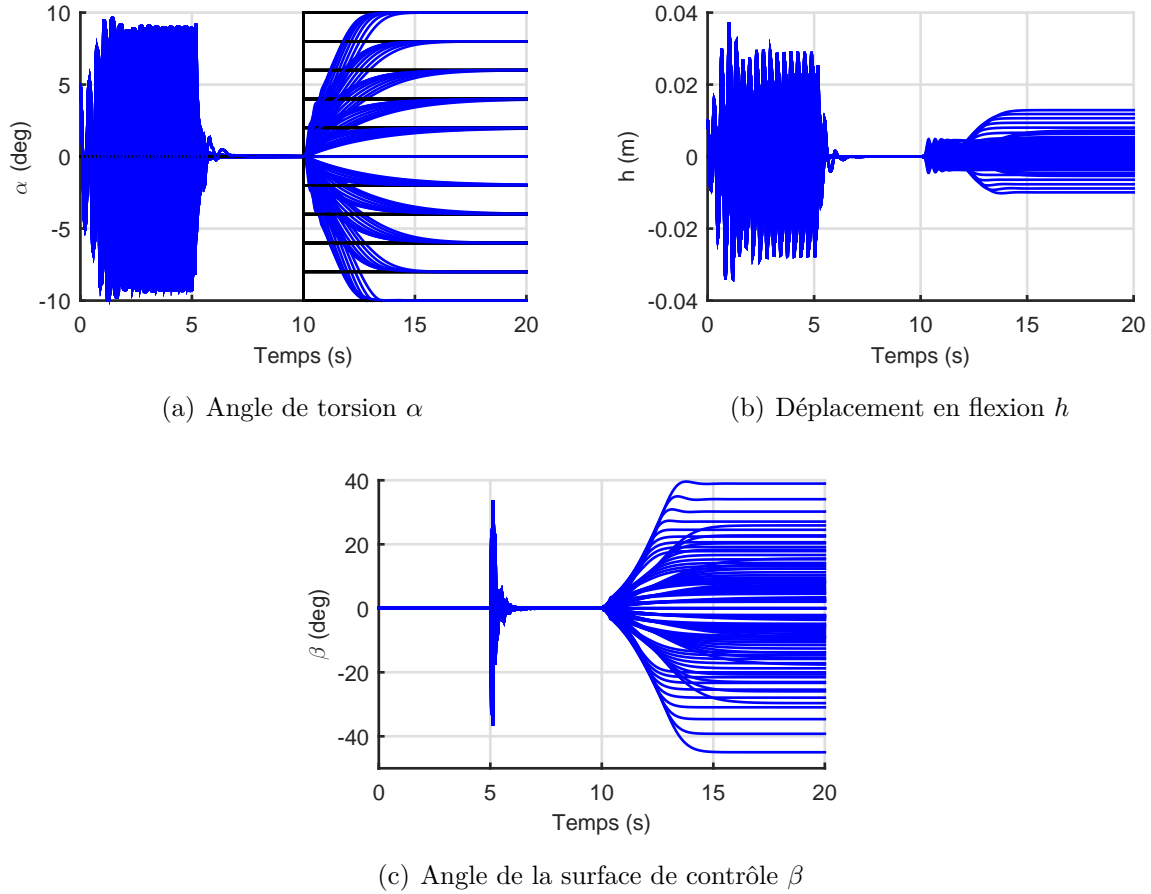


Figure 4.30 Réponse du BACT en boucle fermée en suppression du *flutter* et en suivi de référence pour  $U \in \{12, 13, \dots, 19, 20\}$

### 4.3 Approche par une méthode de synthèse itérative

L'idée commune développée dans les Sections 4.1 et 4.2 pour gérer les TCC réside dans l'autoséquencement des gains du contrôleur. En tirant une nouvelle fois profit de cette idée d'autoséquencement des gains, cette section vise à fournir une dernière méthode d'ajustement des gains impliqués dans la formule d'autoséquencement par le biais d'une procédure de synthèse générique. L'approche proposée est développée dans la Sous-Section 4.3.1 pour ensuite être étendue de manière à inclure l'impact des TCC dans la Sous-Section 4.3.2.

### 4.3.1 Méthode des noyaux pour l'autoséquence des gains

Dans cette section, on reprend le système précédemment étudié tel qu'introduit à la Sous-Section 3.2.2 en supposant que l'équation de sortie ne dépend pas explicitement de l'entrée de commande  $\mathbf{u}$ , i.e.,

$$\mathcal{S} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{w}) \end{cases} \quad (4.142)$$

On renvoie à la Sous-Section 3.2.2 pour l'explication des différentes grandeurs ainsi que l'introduction du point d'opération  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  du système. À des fins de synthèse, on considère une nouvelle fois la dynamique linéarisée, au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  du système  $\mathcal{S}$ . En négligeant la contribution de  $\delta \mathbf{w}$ , elle prend la forme :

$$\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x} + \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{y} = \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x} \end{cases} \quad (4.143)$$

L'objectif est de synthétiser une famille de contrôleurs séquencée par retour de sortie prenant la forme suivante :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (4.144)$$

où

$$\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_1(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{k}_{p_1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p_1}, \quad (4.145a)$$

$$\mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{k}_{p_1+1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) & \dots & \mathbf{k}_{p_1+p}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times p}, \quad (4.145b)$$

sont les gains du contrôleur à ajuster au travers du domaine d'opération  $\Theta$ .

Supposons que pour chaque gain  $\mathbf{k}_j(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} k_{j,1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) & \dots & k_{j,m}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}^\top \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq j \leq p + p_1$ , un ensemble fini de  $r_j \in \mathbb{N}^*$  fonctions linéairement indépendantes  $\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j} \in \mathcal{C}^0(\Theta, \mathbb{R})$  ont été sélectionnées *a priori*. On note alors  $E_j = \text{span}_{\mathbb{R}}(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j}) \subset \mathcal{C}^0(\Theta, \mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel dans lequel peuvent être sélectionnés les gains  $k_{j,1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}), \dots, k_{j,m}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})$ , où, par définition,  $\dim_{\mathbb{R}}(E_j) = r_j$ . On introduit également la notation  $r = r_1 + \dots + r_{p+p_1}$ .

Dans ce cadre, l'objectif du design est de trouver  $m(p+p_1)$  gains prenant la forme de fonctions  $k_{j,k} \in E_j$ ,  $1 \leq j \leq p+p_1$  et  $1 \leq k \leq m$ , de telle sorte que pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ , l'interconnexion de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  avec  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  est stable et présente un niveau adéquat de performance (au regard de l'application considérée).

#### 4.3.1.1 Reformulation du problème

Les gains du contrôleur  $k_{j,k} \in E_j$ ,  $1 \leq j \leq p + p_1$  et  $1 \leq k \leq m$ , peuvent être réécrits de manière explicite sous la forme :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, k_{j,k}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \sum_{l=1}^{r_j} k_{j,k,l} \phi_{j,l}(\boldsymbol{\theta}), \quad (4.146)$$

où  $\boldsymbol{\kappa}$  rassemble l'ensemble des  $mr$  paramètres (scalaire) ajustables  $k_{j,k,l} \in \mathbb{R}$  lors de la synthèse. En introduisant les matrices :

$$\boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{\theta}) = [\phi_{j,1}(\boldsymbol{\theta}) \quad \dots \quad \phi_{j,r_j}(\boldsymbol{\theta})] \in \mathbb{R}^{1 \times r_j}, \quad (4.147)$$

$$\mathbf{L}_j = (k_{j,k,l})_{k,l} \in \mathbb{R}^{m \times r_j}, \quad (4.148)$$

l'équation (4.146) peut être écrite sous la forme compacte suivante :

$$\mathbf{k}_j(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} k_{j,1}(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ k_{j,m}(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \mathbf{L}_j \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{\theta})^\top. \quad (4.149)$$

Finalement, en concaténant les gains séquencés et les paramètres ajustables comme suit :

$$\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{k}_1(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \quad \dots \quad \mathbf{k}_{p+p_1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})]^\top \in \mathbb{R}^{(p+p_1) \times m}, \quad (4.150a)$$

$$\mathbf{K} = [\mathbf{L}_1 \quad \dots \quad \mathbf{L}_{p+p_1}]^\top \in \mathbb{R}^{r \times m}, \quad (4.150b)$$

la forme compacte suivante peut être obtenue :

$$\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{K}, \quad (4.151)$$

où

$$\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) = \text{diag}(\boldsymbol{\Phi}_1(\boldsymbol{\theta}), \dots, \boldsymbol{\Phi}_{p+p_1}(\boldsymbol{\theta})) \in \mathbb{R}^{(p+p_1) \times r}. \quad (4.152)$$

On obtient que la transformation linéaire  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^r, \mathbb{R}^{p+p_1})$  permet de faire le lien entre la matrice de paramètres ajustables  $\mathbf{K}$  impliquée dans les fonctions de séquencement et les gains du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ .

### 4.3.1.2 Stratégie de synthèse

La procédure de synthèse consiste à ajuster de manière itérative les paramètres ajustables du contrôleur, i.e.,  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{r \times m}$ . Supposons pour cela que  $\mathbf{K}$  a déjà été ajusté, en fixant un certain nombre de degrés de liberté, à la valeur de  $\mathbf{K}_{k-1} \in \mathbb{R}^{r \times m}$  de telle sorte à ce que le système en boucle fermée composé de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  et de  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  est stable et présente un niveau de performance adéquat pour  $\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\} \subset \Theta$ . En s'inspirant des approches classiques de séquençement des gains, l'étape suivante consiste à ajuster le gain  $\mathbf{K}$  en la nouvelle valeur  $\mathbf{K}_k$  sur la base du modèle du système au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_k \in \Theta$  tout en préservant le design déjà effectué aux points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}$  précédemment considérés. Cette contrainte est formalisée par :

$$\forall \boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}, \quad \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{K}_{k-1} = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{K}_k. \quad (4.153)$$

En introduisant  $\mathcal{K}(\boldsymbol{\theta}_e) = \ker [\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)]$  le noyau de l'application linéaire  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)$ , la contrainte précédente est équivalente à :

$$\forall \boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}, \quad \forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad (\mathbf{K}_k - \mathbf{K}_{k-1})_l \in \mathcal{K}(\boldsymbol{\theta}_e), \quad (4.154)$$

où, pour une matrice  $\mathbf{M}$  quelconque,  $(\mathbf{M})_l$  dénote la  $l$ -ième colonne de  $\mathbf{M}$ . Ainsi, on cherche  $\Delta \mathbf{K}_k \in \mathbb{R}^{r \times m}$  satisfaisant :

$$\forall l \in \{1, \dots, m\}, \quad (\Delta \mathbf{K}_k)_l \in \mathcal{N}_k \triangleq \bigcap_{\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}} \mathcal{K}(\boldsymbol{\theta}_e), \quad (4.155)$$

tel que  $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{k-1} + \Delta \mathbf{K}_k$  assure la stabilité et un niveau de performance adéquat au système bouclé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_k$ . En introduisant l'application linéaire :

$$\mathbf{H}_k = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_k)|_{\mathcal{N}_k} \in \mathcal{L}(\mathcal{N}_k, \mathbb{R}^{p+p_1}), \quad (4.156)$$

i.e., la restriction de  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_k)$  au sous-espace vectoriel  $\mathcal{N}_k \subset \mathbb{R}^r$ , il est possible de décomposer l'espace en la somme directe :

$$\mathcal{N}_k = \ker(\mathbf{H}_k) \oplus \mathcal{I}_k = \mathcal{N}_{k+1} \oplus \mathcal{I}_k, \quad (4.157)$$

où  $\mathcal{I}_k$  est un supplémentaire quelconque de  $\ker(\mathbf{H}_k)$  dans  $\mathcal{N}_k$ . La seconde égalité est vérifiée car  $\mathcal{N}_{k+1} = \mathcal{N}_k \cap \mathcal{K}(\boldsymbol{\theta}_k) \subset \mathcal{N}_k$ . Soit  $n_k \in \mathbb{N}$  la codimension de  $\mathcal{N}_{k+1}$  dans  $\mathcal{N}_k$ , i.e.,  $n_k = \text{codim}_{\mathcal{N}_k}(\mathcal{N}_{k+1}) = \dim(\mathcal{N}_k) - \dim(\mathcal{N}_{k+1}) = \dim(\mathcal{I}_k)$  et soit  $(\mathbf{f}_k^1, \dots, \mathbf{f}_k^{n_k})$  une base de  $\mathcal{I}_k$ . On

peut alors écrire les colonnes de  $\Delta \mathbf{K}_k$  sous la forme :

$$\forall l \in \{1, \dots, m\}, \exists! \mathbf{v}_{k,l} \in \mathcal{N}_{k+1}, \exists! (\lambda_{k,l}^1, \dots, \lambda_{k,l}^{n_k}) \in \mathbb{R}^{n_k} : (\Delta \mathbf{K}_k)_l = \mathbf{v}_{k,l} + \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_{k,l}^i \mathbf{f}_k^i. \quad (4.158)$$

Ainsi,  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) \Delta \mathbf{K}_k = \mathbf{0}$  pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}$  et

$$\forall l \in \{1, \dots, m\}, (\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_k) \Delta \mathbf{K}_k)_l = \sum_{i=1}^{n_k} \lambda_{k,l}^i (\mathbf{H}_k \mathbf{f}_k^i), \quad (4.159)$$

où  $(\mathbf{H}_k \mathbf{f}_k^i)_{1 \leq i \leq n_k}$  est une famille linéairement indépendante telle que

$$\text{Im}(\mathbf{H}_k) = \text{span}_{\mathbb{R}} (\mathbf{H}_k \mathbf{f}_k^1, \dots, \mathbf{H}_k \mathbf{f}_k^{n_k}), \quad (4.160)$$

i.e., est une base de l'espace des degrés de liberté dans l'ajustement du gain du contrôleur  $\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\theta}_k)$  permettant de préserver le design effectués aux points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}$ . Dans ce contexte,  $(\lambda_{k,1}^1, \dots, \lambda_{k,m}^{n_k}) \in \mathbb{R}^{rn_k}$  sont les degrés de liberté à ajuster de manière à assurer la stabilité et le niveau de performance souhaité au système bouclé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_k$ . Le vecteur  $\mathbf{v}_{k,l} \in \mathcal{N}_{k+1}$  peut être omis à cette étape de la procédure de synthèse dans l'expression de  $\Delta \mathbf{K}_k$  puisque, par définition,  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{v}_{k,l} = \mathbf{0}$  pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_k\}$ . En effet, le sous-espace  $\mathcal{N}_{k+1}$  représente les degrés de liberté devant être ajustés ultérieurement sur la base de nouveaux points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_{k+1}, \boldsymbol{\theta}_{k+2}, \dots$ .

### 4.3.1.3 Convergence des itérations

La procédure précédemment décrite est stoppée à l'itération  $k_f \in \mathbb{N}^*$  si et seulement s'il ne reste plus aucun degré de liberté lors de la mise en œuvre de la synthèse à l'itération  $k_f + 1$ , i.e.,  $\mathcal{N}_{k_f+1} = \emptyset$ . Le théorème ci-dessous garantit l'existence d'un tel entier  $k_f$ .

**Théorème 4.10** *Supposons que pour  $1 \leq j \leq p + p_1$ , la famille de fonctions  $(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j})$  est libre. Alors il existe  $k_f \in \mathbb{N}^*$  et un ensemble de points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k_f} \in \Theta$  tel que  $\mathcal{N}_1 \supsetneq \mathcal{N}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{N}_{k_f+1} = \emptyset$ .*

**Démonstration.** Notons tout d'abord que si la chaîne d'inclusions  $\mathcal{N}_1 \supset \mathcal{N}_2 \supset \dots \supset \mathcal{N}_{k_f+1} = \emptyset$  n'était pas stricte, i.e., il existe  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  tel que  $\mathcal{N}_{k_0} = \mathcal{N}_{k_0+1}$ , alors, sur la base de (4.157), on a que  $\mathcal{I}_{k_0} = \{0\}$ , i.e., aucun degré de liberté n'est disponible lors de l'itération  $k_0$ . De la sorte, le gain  $\mathbf{K}_{k_f}$  obtenu sur la base des points  $\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k_0-1}, \boldsymbol{\theta}_{k_0}, \boldsymbol{\theta}_{k_0+1}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k_f}$  est, par construction, identique au gain  $\mathbf{K}_{k_f-1}^*$  obtenu sur la base des points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_1^* = \boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k_0-1}^* = \boldsymbol{\theta}_{k_0-1}, \boldsymbol{\theta}_{k_0}^* = \boldsymbol{\theta}_{k_0+1}, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k_f-1}^* = \boldsymbol{\theta}_{k_f}$  en respectant scrupuleusement



la même procédure de design (i.e., entre les deux synthèses, on ne fait que retirer le point d'opération  $\theta_{k_0}$  en lequel aucun degré de liberté n'est disponible; le reste de la procédure demeurant strictement identique.). En itérant de la sorte, il n'y a donc pas de restriction à supposer que la chaîne d'inclusions est stricte.

Raisonnons par l'absurde en supposant qu'un tel  $k_f$  n'existe pas. Alors, il existe un  $k_0 \in \mathbb{N}^*$  et des points d'opération  $\theta_1, \dots, \theta_{k_0} \in \Theta$  tels que 1)  $\mathcal{N}_{k_0+1}$  n'est pas réduit au sous-espace vectoriel trivial; 2) pour tout  $\theta \in \Theta$ , prendre  $\theta_{k_0+1} = \theta$  donne lieu à  $\mathcal{N}_{k_0+1} = \mathcal{N}_{k_0+2}$ . Il en découle donc que pour tout  $\theta \in \Theta$  et tout vecteur non nul  $\mathbf{x} \in \mathcal{N}_{k_0+1} \neq \{\mathbf{0}\}$ ,  $\mathbf{G}(\theta)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . De par la structure bloc diagonale de  $\mathbf{G}(\theta)$  donnée par (4.152), il existe  $j \in \{1, \dots, p+p_1\}$  et un vecteur non nul  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{r_j}$  tels que pour tout  $\theta \in \Theta$ ,  $\Phi_j(\theta)\mathbf{x}_j = \mathbf{0}$ . La famille  $(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j})$  étant supposée libre, on obtient la contradiction souhaitée.  $\square$

Le Théorème 4.10 assure l'existence d'un ensemble fini de points d'opération permettant de fixer progressivement l'ensemble des degrés de liberté du contrôleur séquencé. Cela donne donc lieu, pour une telle suite de points d'opération satisfaisant l'énoncé du théorème, à la décomposition suivante de l'espace des paramètres ajustables :

$$\mathbb{R}^r = \bigoplus_{k=1}^{k_f} \mathcal{I}_k = \bigoplus_{k=1}^{k_f} \text{span}_{\mathbb{R}}(\mathbf{f}_k^1, \dots, \mathbf{f}_k^{n_k}). \quad (4.161)$$

On déduit le corollaire ci-dessous assurant qu'après un certain nombre d'itérations déjà effectuées en des points d'opération quelconques, un choix judicieux des prochains points d'opération permet de compléter la procédure de synthèse.

**Corollaire 4.11** *Supposons que pour  $1 \leq j \leq p+p_1$ , la famille de fonctions  $(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j})$  est libre. Soit  $k_i \in \mathbb{N}^*$  et soient  $\theta_1, \dots, \theta_{k_i} \in \Theta$  un ensemble de points d'opération vérifiant  $\mathcal{N}_1 \supsetneq \mathcal{N}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{N}_{k_i+1} \neq \emptyset$ . Alors il existe un entier  $k_f > k_i$  et un ensemble de points d'opération  $\theta_{k_i+1}, \dots, \theta_{k_f} \in \Theta$  tel que  $\mathcal{N}_1 \supsetneq \mathcal{N}_2 \supsetneq \dots \supsetneq \mathcal{N}_{k_f+1} = \emptyset$ .*

**Démonstration.** Ce résultat est une conséquence directe de la seconde partie de la démonstration du Théorème 4.10  $\square$

Finalement, en supposant que  $k$  itérations ont été effectuées et que  $\mathcal{N}_{k+1} \neq \emptyset$ , on caractérise les points d'opération admissibles  $\theta \in \Theta$  permettant d'obtenir des degrés de libertés dans l'ajustement des gains du contrôleur à l'itération  $k+1$  (i.e.,  $\mathcal{I}_{k+1} \neq \{0\}$ ). Pour cela, on

introduit pour tout  $1 \leq j \leq p + p_1$  l'opérateur de projection  $\pi_j : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathbb{R}^{r_j}$  tel que

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^r, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \pi_1(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \pi_{p+p_1}(\mathbf{x}) \end{bmatrix}. \quad (4.162)$$

Un point d'opération  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  pris comme  $\boldsymbol{\theta}_{k+1} = \boldsymbol{\theta}$  est tel que  $\mathcal{N}_{k+1} \supsetneq \mathcal{N}_{k+2}$  si et seulement si  $\mathcal{I}_{k+1} \neq \{0\}$ , ce qui est équivalent à  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})\mathbf{N}_{k+1} \neq \mathbf{0}$  où  $\mathbf{N}_{k+1}$  est une matrice dont les colonnes forment une base de  $\mathcal{N}_{k+1}$ . Sur la base de la structure bloc diagonale de  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$  (4.152), la dernière condition est satisfaite si et seulement s'il existe  $1 \leq j \leq p + p_1$  tel que  $\Phi_j(\boldsymbol{\theta})\pi_j(\mathbf{N}_{k+1}) \neq \mathbf{0}$ .

#### 4.3.1.4 Ajustement des gains du contrôleur à chaque itération

À des fins de synthèse, la représentation d'état (4.143) est augmentée de manière à inclure la composante intégrale de contrôleur :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{x}_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} = \mathbf{C}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.163)$$

avec

$$\mathbf{A}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{n \times p_1} \\ -\mathbf{C}_{y_1}^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{p_1 \times p_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_u(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{n \times p_1} \\ \mathbf{0}_{p_1 \times m} & \mathbf{I}_{p_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{p_1 \times n} & \mathbf{I}_{p_1} \\ \mathbf{C}^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{p \times p_1} \end{bmatrix}, \quad (4.164)$$

où  $\mathbf{C}_{y_1}^c(\boldsymbol{\theta}_e)$  représente les  $p_1$  premières lignes de  $\mathbf{C}^c(\boldsymbol{\theta}_e)$  qui correspondent à la sortie  $\delta \mathbf{y}_1$  de (4.143). Ainsi, la dynamique du système bouclé composée de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  et de  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  est équivalente au retour de sortie du système augmenté (4.163) avec le gain  $\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)^\top = \mathbf{K}^\top \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top$ . Puisque  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est une application linéaire, l'équation de sortie du système augmenté (4.163) peut être modifiée comme suit :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \delta \dot{\mathbf{x}} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} = \mathbf{A}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{x}_i \end{bmatrix} + \mathbf{B}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{r} \end{bmatrix} \\ \delta \mathbf{Y}_b = \mathbf{C}_b^c(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x} \\ \delta \mathbf{x}_i \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.165)$$

où l'on a  $\mathbf{C}_b^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \mathbf{C}_a^c(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Dès lors, le modèle d'état (4.163) en boucle fermée avec le gain séquencé  $\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\theta}_e)^\top$  est équivalent à (4.165) en boucle fermée avec le gain statique  $\mathbf{K}$ , i.e.,  $\boldsymbol{\delta u} = \mathbf{K}^\top \boldsymbol{\delta Y}_b$ . Le principal avantage de la représentation d'état augmentée (4.165) relativement à (4.163) est que les composantes du gain  $\mathbf{K}$  sont statiques (i.e., ne sont pas fonction de la variable de séquençement  $\boldsymbol{\theta}_e$ ) et indépendantes.

Supposons que le gain  $\mathbf{K}$  a été ajusté à la valeur  $\mathbf{K}_{k-1}$  sur la base des points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}$ . On cherche à présent (lorsque des degrés de liberté sont encore disponibles), à ajuster le gain  $\mathbf{K}$  à sa nouvelle valeur  $\mathbf{K}_k$  afin de stabiliser et d'assurer un niveau de performance adéquat au système bouclé en  $\boldsymbol{\theta}_k$  tout en préservant le design précédemment effectué aux points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \{\boldsymbol{\theta}_1, \dots, \boldsymbol{\theta}_{k-1}\}$ . Sur la base de la stratégie développée précédemment, on a  $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{k-1} + \Delta \mathbf{K}_k$  où  $\Delta \mathbf{K}_k$  est donné par :

$$\Delta \mathbf{K}_k = \mathbf{F}_k \boldsymbol{\Lambda}_k, \quad (4.166)$$

avec

$$\mathbf{F}_k = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_k^1 & \dots & \mathbf{f}_k^{n_k} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{r \times n_k}, \quad \boldsymbol{\Lambda}_k = \left( \lambda_{k,l}^i \right)_{i,l} \in \mathbb{R}^{n_k \times m}. \quad (4.167)$$

On obtient,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\delta u} &= \mathbf{K}_k^\top \boldsymbol{\delta Y}_b \\ &= \mathbf{K}_{k-1}^\top \boldsymbol{\delta Y}_b + \Delta \mathbf{K}_k^\top \boldsymbol{\delta Y}_b \\ &= \mathbf{K}_{k-1}^\top \boldsymbol{\delta Y}_b + \boldsymbol{\Lambda}_k^\top \mathbf{F}_k^\top \boldsymbol{\delta Y}_b. \end{aligned} \quad (4.168)$$

Puisque  $\mathbf{K}_{k-1}$  a déjà été obtenu lors de l'itération précédente, c'est alors une constante, de telle sorte que le terme  $\mathbf{K}_{k-1}^\top \boldsymbol{\delta Y}_b$  peut être directement intégré dans le modèle augmenté (4.165). L'ensemble des paramètres ajustables disponibles à l'itération courante sont rassemblés dans  $\boldsymbol{\Lambda}_k$ . Dès lors, le système augmenté peut être modifié de manière à ce que la sortie du système augmenté devienne  $\boldsymbol{\delta Y}_k = \mathbf{F}_k^\top \boldsymbol{\delta Y}_b$ , donnant lieu à la nouvelle entrée de commande  $\boldsymbol{\delta U}_k = \boldsymbol{\Lambda}_k^\top \boldsymbol{\delta Y}_k$ . On obtient le modèle augmenté suivant utilisé à la  $k$ -ième itération :

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta \dot{x}} \\ \boldsymbol{\delta \dot{x}_i} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_k^c(\boldsymbol{\theta}_k) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x} \\ \boldsymbol{\delta x_i} \end{bmatrix} + \mathbf{B}_k^c(\boldsymbol{\theta}_k) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta U}_k \\ \boldsymbol{\delta r} \end{bmatrix} \\ \boldsymbol{\delta Y}_k = \mathbf{C}_k^c(\boldsymbol{\theta}_k) \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x} \\ \boldsymbol{\delta x_i} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.169)$$

avec

$$\mathbf{A}_k^C(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{A}_a^C(\boldsymbol{\theta}_k) + \mathbf{B}_{a,u}^C(\boldsymbol{\theta}_k) \mathbf{K}_{k-1}^\top \mathbf{C}_b^C(\boldsymbol{\theta}_k), \quad (4.170a)$$

$$\mathbf{B}_k^C(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{B}_a^C(\boldsymbol{\theta}_k), \quad (4.170b)$$

$$\mathbf{C}_k^C(\boldsymbol{\theta}_k) = \mathbf{F}_k^\top \mathbf{C}_b^C(\boldsymbol{\theta}_k), \quad (4.170c)$$

où  $\mathbf{B}_{a,u}^C(\boldsymbol{\theta}_k)$  rassemble les  $m$  premières colonnes de  $\mathbf{B}_a^C(\boldsymbol{\theta}_k)$  qui correspondent à l'entrée  $\boldsymbol{\delta u}$ . Dans cette configuration, le gain à ajuster est  $\boldsymbol{\Lambda}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$  pour la loi de commande  $\boldsymbol{\delta U}_k = \boldsymbol{\Lambda}_k^\top \boldsymbol{\delta Y}_k$  relativement au modèle augmenté (4.169). Un tel gain peut être obtenu par n'importe quelle méthode de synthèse disponible dans la littérature (placement de pôle, LMI, LQR, etc.). Une fois  $\boldsymbol{\Lambda}_k$  synthétisé, les gains intervenant dans les formules de séquençement du contrôleur pour le système d'origine sont alors donnés par  $\mathbf{K}_k = \mathbf{K}_{k-1} + \mathbf{F}_k \boldsymbol{\Lambda}_k$ . Cette procédure est itérée jusqu'à ce que le critère d'arrêt  $\mathcal{N}_{k_f+1} = \{0\}$  soit atteint.

### 4.3.2 Inclusion de l'impact des termes de couplage cachés dans la méthode des noyaux

En l'état, la méthode des noyaux présentée à la Sous-Section 4.3.1 s'apparente à une méthode d'interpolation *a priori* des gains du contrôleur séquençé. L'objectif de cette section est d'étendre cette méthode au cas du séquençement de gains en présence de TCC.

#### 4.3.2.1 Extension de la méthode

De manière à étendre la méthode des noyaux, on se place dans le cas de figure du contrôleur séquençé par retour de sortie déjà étudié lors de l'approche par placement de structure propre (4.106), contrôleur pour lequel le gain d'intégration se situe en amont de la composante intégrale :

$$\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa}) \triangleq \begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_i = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] \\ \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{x}}_i + \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \mathbf{y} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (4.171)$$

où

$$\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{k}_1(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \quad \dots \quad \mathbf{k}_{p_1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})] \in \mathbb{R}^{m \times p_1}, \quad (4.172a)$$

$$\mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = [\mathbf{k}_{p_1+1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \quad \dots \quad \mathbf{k}_{p_1+p}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})] \in \mathbb{R}^{m \times p}. \quad (4.172b)$$

On rappelle qu'il a été obtenu, sous les hypothèses que  $m = p_1$  et que  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  est de colonne rang plein, que la linéarisation de  $\tilde{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\kappa})$  au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e$  donne lieu à

la dynamique linéarisée :

$$\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_i + \left[ \mathbf{K}_y(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \right] \delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (4.173)$$

où  $\delta \mathbf{x}_i = \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)^{-1} \delta \tilde{\mathbf{x}}_i$ . On se focalise dans cette section sur le TCC introduit par le séquençement endogène (i.e., via la variable  $\mathbf{y}$ ). C'est pour cette raison que la contribution liée au signal exogène  $\mathbf{w}_m$  est omise dans (4.173) comparativement à (4.108). En notant  $\theta_l$  la  $l$ -ième composante de  $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ , la  $l$ -ième colonne du TCC  $\mathbf{K}_\theta$ ,  $1 \leq l \leq n_\theta$ , prend la forme :

$$\mathbf{K}_{\theta,l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \frac{\partial \mathbf{K}_y}{\partial \theta_l} \Big|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \mathbf{y}_e. \quad (4.174)$$

Comme précédemment, pour chaque gain  $\mathbf{k}_j(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = [k_{j,1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) \ \dots \ k_{j,m}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})]^\top \in \mathbb{R}^m$ ,  $1 \leq j \leq p + p_1$ , on suppose qu'un ensemble fini de  $r_j \in \mathbb{N}^*$  fonctions linéairement indépendantes  $\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j} \in \mathcal{C}^0(\Theta, \mathbb{R})$  ont été sélectionnées *a priori*. On note alors  $E_j = \text{span}_{\mathbb{R}}(\phi_{j,1}, \dots, \phi_{j,r_j}) \subset \mathcal{C}^0(\Theta, \mathbb{R})$  le sous-espace vectoriel dans lequel peuvent être sélectionnés les gains scalaires  $k_{j,1}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}), \dots, k_{j,m}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta})$ , où, par définition,  $\dim_{\mathbb{R}}(E_j) = r_j$ . On émet l'hypothèse supplémentaire que  $E_j$  est clos par rapport aux dérivées partielles portant sur  $\boldsymbol{\theta}$ . En d'autres termes, pour tout  $1 \leq l \leq n_\theta$  et tout  $f \in E_j$ , on a  $\partial f / \partial \theta_l \in E_j$ . Un exemple typique consiste à sélectionner  $E_j = \mathbb{R}_{r_j}[\boldsymbol{\theta}]$ . En reprenant la définition de  $\boldsymbol{\Phi}_j$  (4.147), on a donc par hypothèse l'existence de matrices  $\mathbf{D}_{j,l} \in \mathbb{R}^{r_j \times r_j}$  telles que :

$$\forall \boldsymbol{\theta} \in \Theta, \quad \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_j}{\partial \theta_l}(\boldsymbol{\theta}) = \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{D}_{j,l}. \quad (4.175)$$

En reprenant l'écriture explicite des gains sous la forme (4.146), l'équation de sortie de  $\tilde{\mathcal{C}}_l(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)$  se réécrit sous la forme :

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{K}^\top \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \begin{bmatrix} \delta \mathbf{x}_i \\ \delta \mathbf{y} \end{bmatrix} + \mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \Big|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \delta \mathbf{y} \quad (4.176)$$

où  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta})$  sont définis comme précédemment par (4.150b) et (4.152). De manière à évaluer le second terme de l'équation précédente à partir de (4.174), on part de (4.149) dont on déduit que

$$\frac{\partial \mathbf{k}_j}{\partial \theta_l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}) = \mathbf{L}_j \left\{ \frac{\partial \boldsymbol{\Phi}_j}{\partial \theta_l}(\boldsymbol{\theta}) \right\}^\top = \mathbf{L}_j \mathbf{D}_{j,l}^\top \boldsymbol{\Phi}_j(\boldsymbol{\theta})^\top, \quad (4.177)$$

où  $\mathbf{L}_j$  est défini par (4.148). Il s'en suit que pour  $1 \leq l \leq n_\theta$ ,

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{\theta,l}(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) &= \left[ \frac{\partial \mathbf{k}_{p_1+1}}{\partial \theta_l} \bigg|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \quad \dots \quad \frac{\partial \mathbf{k}_{p_1+p}}{\partial \theta_l} \bigg|_{(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e)} \right] \mathbf{y}_e \\
&= [\mathbf{L}_{p_1+1} \quad \dots \quad \mathbf{L}_{p_1+p}] \text{diag} \left( \mathbf{D}_{p_1+1,l}^\top \boldsymbol{\Phi}_{p_1+1}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top, \dots, \mathbf{D}_{p_1+1,p}^\top \boldsymbol{\Phi}_{p_1+p}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \right) \mathbf{y}_e \\
&= \mathbf{K}^\top \underbrace{\left[ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{(r_1+\dots+r_{p_1}) \times p} \\ \text{diag} \left( \mathbf{D}_{p_1+1,l}^\top \boldsymbol{\Phi}_{p_1+1}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top, \dots, \mathbf{D}_{p_1+1,p}^\top \boldsymbol{\Phi}_{p_1+p}(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \right) \end{array} \right]}_{\triangleq \boldsymbol{\Psi}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^r} \mathbf{y}_e. \tag{4.178}
\end{aligned}$$

On en déduit donc que

$$\mathbf{K}_\theta(\boldsymbol{\kappa}, \boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{K}^\top \left[ \boldsymbol{\Psi}_1(\boldsymbol{\theta}_e) \quad \dots \quad \boldsymbol{\Psi}_{n_\theta}(\boldsymbol{\theta}_e) \right], \tag{4.179}$$

d'où, en posant

$$\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) + \left[ \begin{array}{c} \mathbf{0}_{p_1 \times n_\theta} \\ \left\{ \frac{\partial \nu}{\partial \mathbf{y}} \bigg|_{\nu^{-1}(\boldsymbol{\theta}_e)} \right\}^\top \end{array} \right] \left[ \boldsymbol{\Psi}_1(\boldsymbol{\theta}_e) \quad \dots \quad \boldsymbol{\Psi}_{n_\theta}(\boldsymbol{\theta}_e) \right]^\top \in \mathbb{R}^{(p+p_1) \times r}, \tag{4.180}$$

on obtient finalement que l'équation de sortie du contrôleur (4.176) se réécrit sous la forme :

$$\boldsymbol{\delta u} = \mathbf{K}^\top \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e)^\top \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta x}_i \\ \boldsymbol{\delta y} \end{bmatrix}. \tag{4.181}$$

Il est alors possible de mettre en œuvre la méthode introduite à la Sous-Section 4.3.1 en utilisant la matrice  $\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e)$  en lieu et place de la matrice  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)$  initialement employée. Alors que la matrice  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)$  présente une structure diagonale par bloc, on ne retrouve pas cette même structure au niveau de la matrice  $\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e)$  dû à l'interférence des TCC. Dès lors, les résultats portant sur la convergence des itérations ne s'appliquent plus, nécessitant une analyse au cas par cas suivant les fonctions de séquençement employées.

### 4.3.2.2 Application

On considère à nouveau le problème du contrôle du missile tel que présenté à la Sous-Section 4.1.4.1. On cherche à synthétiser un contrôleur séquencé prenant la forme :

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{cases} \dot{\tilde{x}}_i = K_i(\boldsymbol{\theta})(\eta_c - \eta) \\ \delta_c = \tilde{x}_i + K_\eta(\boldsymbol{\theta})\eta + K_q(\boldsymbol{\theta})q \\ \boldsymbol{\theta} = (\eta, M) \end{cases} \quad (4.182)$$

où  $K_i(\boldsymbol{\theta})$ ,  $K_\eta(\boldsymbol{\theta})$  et  $K_q(\boldsymbol{\theta})$  sont les trois gains séquencés devant être synthétisés de manière à assurer la stabilité et la performance du système bouclé. Contrairement aux synthèses précédentes, on cherche ici à séquencer les gains en fonction de l'accélération normale  $\eta$  et non l'angle d'attaque  $\alpha$ .

La linéarisation de la dynamique du contrôleur au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e = (\eta_e, M_e)$  donne la dynamique suivante :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta \eta_c - \delta \eta \\ \delta u = K_i(\boldsymbol{\theta}_e)\delta x_i + [K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e) + K_\eta^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e)]\delta \eta + K_q(\boldsymbol{\theta}_e)\delta q + K_M^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e)\delta M \end{cases} \quad (4.183)$$

avec  $\delta x_i = \delta \tilde{x}_i / K_i(\boldsymbol{\theta}_e)$  et où les TCC sont donnés pour  $z \in \{\eta, M\}$  par :

$$K_z^{\text{TCC}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \left. \frac{\partial K_z}{\partial z} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} \eta_e + \left. \frac{\partial K_z}{\partial z} \right|_{\boldsymbol{\theta}_e} q_e(\boldsymbol{\theta}_e). \quad (4.184)$$

On considère une nouvelle fois un séquençement quadratique des gains, tout en tenant compte de la symétrie du problème en  $\eta_e = 0$ . Ainsi, pour chaque gain  $K \in \{K_i, K_\eta, K_q\}$  :

$$K(\eta, M) = K_{00} + K_{10}M + K_{01}|\eta| + K_{20}M^2 + K_{11}M|\eta| + K_{02}|\eta|^2. \quad (4.185)$$

Dès lors, l'application linéaire  $\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e)$  telle que donnée par (4.180) s'écrit sous la forme :

$$\mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) + \eta_e \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\boldsymbol{\theta}_e) & q_e(\boldsymbol{\theta}_e) \frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{0}_{1 \times 6} & \mathbf{0}_{1 \times 6} & \Phi(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix}, \quad (4.186)$$

où

$$\Phi(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} 1 & M_e & |\eta_e| & M_e^2 & M_e|\eta_e| & |\eta_e|^2 \end{bmatrix}, \quad (4.187a)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}(\boldsymbol{\theta}_e) = \text{sign}(\eta_e) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & M_e & 2|\eta_e| \end{bmatrix}, \quad (4.187b)$$

avec la convention  $\text{sign}(0) = 0$ . On obtient alors que

$$\begin{bmatrix} K_i(\boldsymbol{\theta}_e) & K_\eta(\boldsymbol{\theta}_e) + K_\eta^{\text{hct}}(\boldsymbol{\theta}_e) & K_q(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix}^\top = \mathbf{G}^*(\boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{K}, \quad (4.188)$$

où  $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{18}$  rassemble les 18 paramètres ajustables :

$$\mathbf{K}^\top = \begin{bmatrix} K_{i00} & K_{i10} & \dots & K_{q02} \end{bmatrix}. \quad (4.189)$$

À des fins de synthèse, six points d'opération ont été sélectionnés tels que listés dans le Tab. 4.15. Ils sont tels que, pour tout  $k \in \{1, \dots, 6\}$ ,  $\text{rang}(\mathbf{H}_k) = 3$  (i.e.,  $n_k = 3$ ), où  $\mathbf{H}_k$  est défini par (4.156). Cela permet de garantir que le critère d'arrêt est satisfait après l'accomplissement de la sixième itération (i.e.,  $\mathcal{N}_7 = \{0\}$ ).

Tableau 4.15 Point d'opération considérés pour mettre en œuvre la méthode des noyaux sur le modèle du missile

	$\theta_1$	$\theta_2$	$\theta_3$	$\theta_4$	$\theta_5$	$\theta_6$
$\alpha_e$	0°	20°	0°	10°	0°	20°
$M_e$	2	2	2.5	2.5	3	3

Parmi l'ensemble infini des possibilités permettant de choisir le supplémentaire algébrique  $\mathcal{I}_k$  afin de former la décomposition de l'espace des paramètres ajustables suivant (4.161), une famille  $(f_k^1, f_k^2, f_k^3)_{1 \leq k \leq 6}$  formant une base orthogonale de l'espace des paramètres ajustable a été choisie. Finalement, une approche de type LQR par retour de sortie (Stevens and Lewis, 2003) a été adoptée afin de procéder lors de chaque itération à l'ajustement des degrés de liberté dans l'espace des paramètres ajustables, conformément à la procédure décrite dans la Sous-Section 4.3.1.4.

Les résultats obtenus sont illustrés par des simulations sur le modèle non linéaire pour l'implémentation du contrôleur séquencé de la Fig. 4.23. Les évolutions temporelles des différentes grandeurs physiques du système sont illustrées à la Fig. 4.31. Une nouvelle fois, on observe que l'intégration explicite des TCC dans le processus de synthèse permet d'obtenir une réponse temporelle en suivi de référence avec un dépassement moindre (Fig. 4.31(a)). L'effort de commande associé est également réduit et moins oscillatoire (Fig. 4.31(e) et Fig. 4.31(f)).



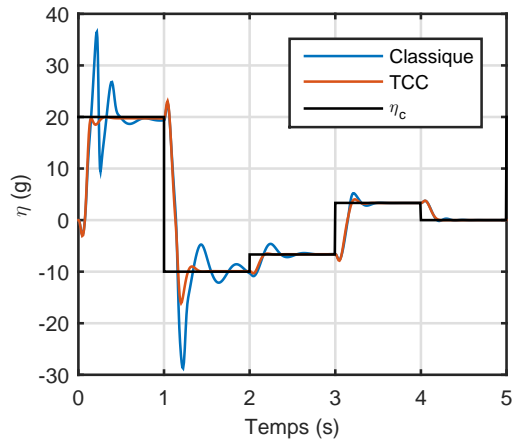
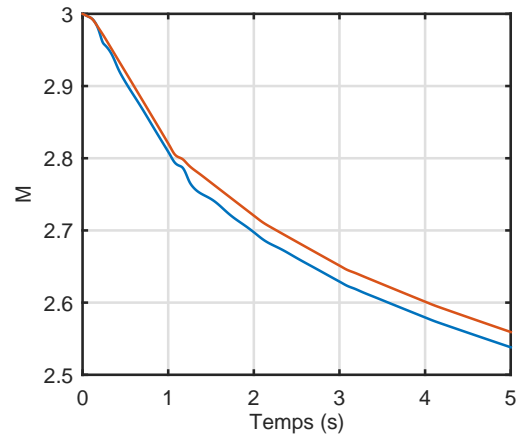
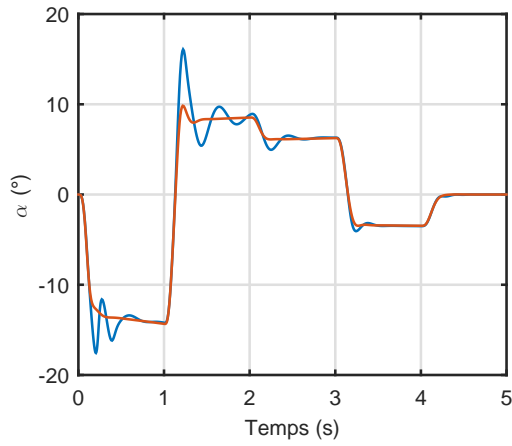
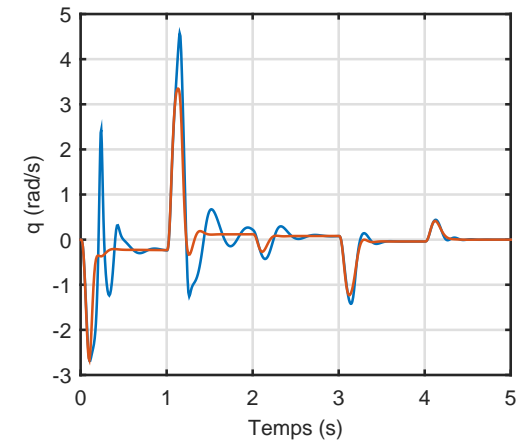
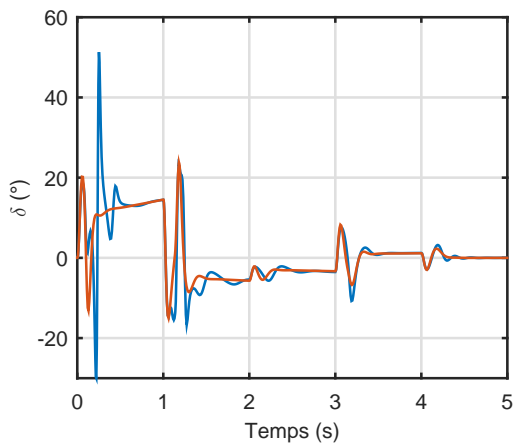
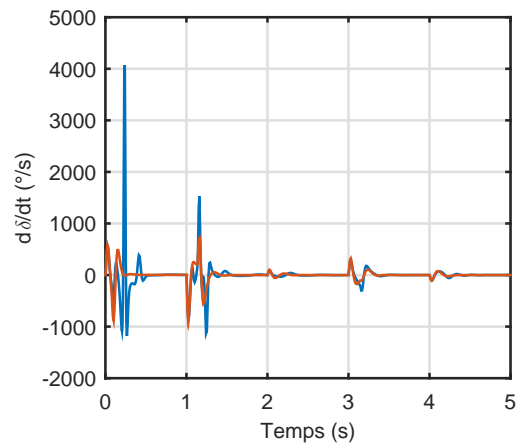
(a) Accélération normale  $\eta$ (b) Nombre de Mach  $M$ (c) Angle d'attaque  $\alpha$ (d) Vitesse en tangage  $q$ (e) Angle de la gouverne  $\delta_t$ (f) Vitesse de la gouverne  $\dot{\delta}_t$ 

Figure 4.31 Réponse temporelle du missile en boucle fermée pour une série d'échelons de référence

L'évolution temporelle des gains est illustrée à la Fig. 4.32, montrant que le meilleur comportement temporel observé dans le cadre de la synthèse avec l'intégration des TCC ne donne pas lieu à des gains plus élevés.

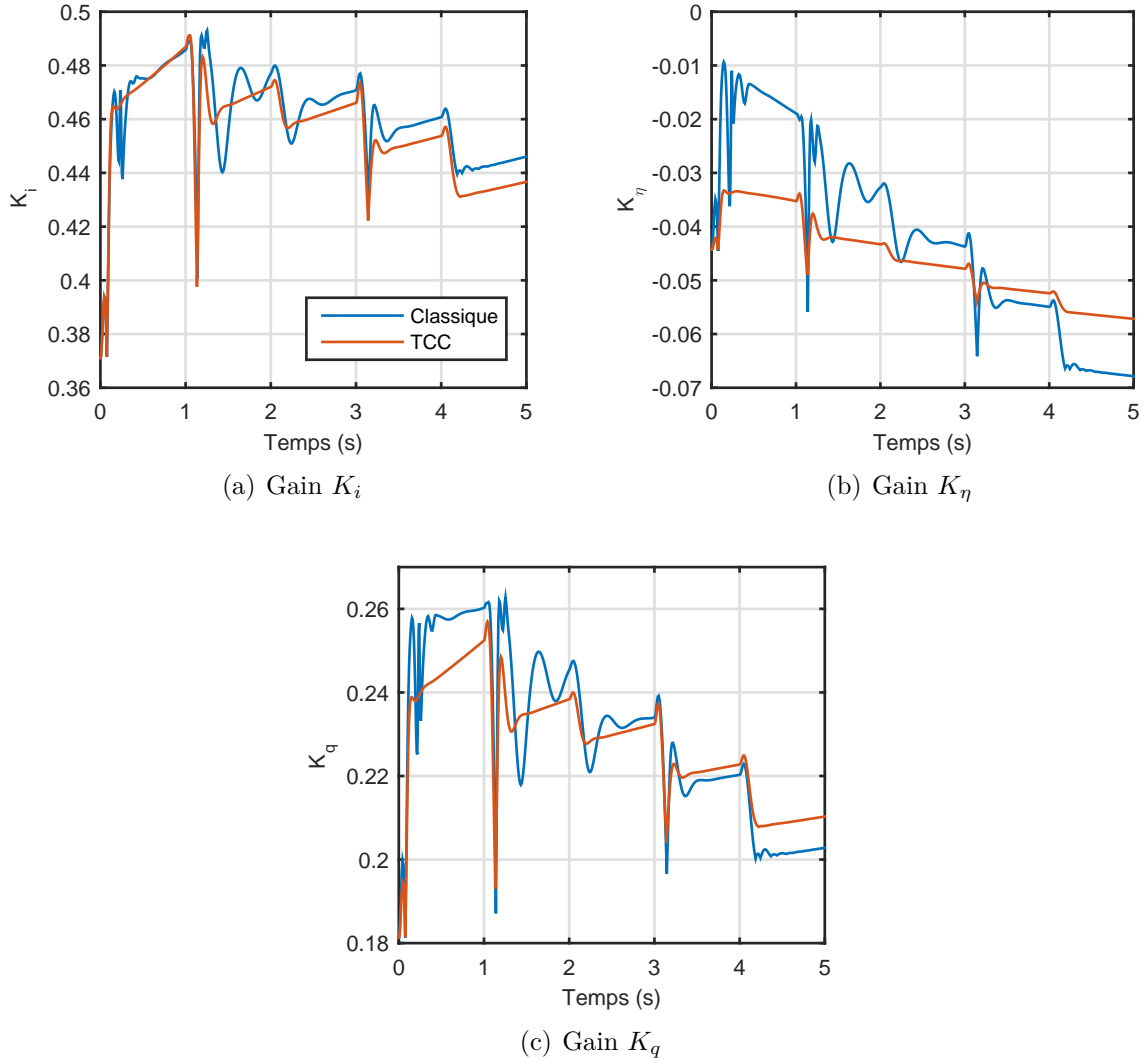


Figure 4.32 Commande du missile - Évolution des gains du contrôleur  $\mathcal{C}(\kappa)$

## CHAPITRE 5    IMPLÉMENTATIONS DE CONTRÔLEURS SÉQUENCÉS LIBRES DE TERMES DE COUPLAGE CACHÉS

Dans le Chapitre 4, il a été vu comment des méthodes d'autoséquencement permettent, de par un choix *a priori* des formules de séquencement, de tenir compte de manière explicite des TCC dans la synthèse des gains d'un contrôleur séquencé. Néanmoins, de telles approches requièrent de modifier les procédures de synthèse des contrôleurs séquencés. Elles ne permettent pas, entre autres, de procéder à une synthèse point à point classique avec un séquencement des gains *a posteriori*.

Dans ce chapitre, on s'intéresse au problème de gestion des TCC, non pas dans la phase de synthèse des gains du contrôleur séquencé, mais dans la phase d'implémentation de la famille de contrôleurs LTI. Plus précisément, on investigate l'existence d'une stratégie d'implémentation de familles de contrôleurs LTI sous la forme d'un contrôleur séquencé évitant structurellement l'émergence de TCC. L'avantage d'une telle implémentation est que la famille de contrôleurs LTI peut alors être obtenue par n'importe quelle méthode de synthèse existante, sans se soucier de la contribution des TCC dans la phase de synthèse.

Une telle stratégie d'implémentation a été présentée par Kaminer et al. (1995) sous la dénomination de *velocity-based algorithm*. L'idée fondamentale derrière cette stratégie repose dans l'utilisation, non pas du signal de mesure  $\mathbf{y}$ , mais de sa dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{y}}$  comme entrée du contrôleur séquencé. L'avantage de cette approche réside dans le fait qu'en général le signal de mesure à l'équilibre est non nul, tandis que la dérivée temporelle du signal de mesure à l'équilibre est nulle. Dès lors, le recours au signal  $\dot{\mathbf{y}}$  en lieu et place de  $\mathbf{y}$  présente l'avantage de ne pas faire émerger de TCC. Avec une telle approche, on obtient en sortie du contrôleur la dérivée temporelle du signal de commande  $\dot{\mathbf{u}}$ , nécessitant alors l'ajout d'une composante intégrale afin d'obtenir le signal de commande  $\mathbf{u}$  à injecter en entrée du système. La principale limitation dans la mise en œuvre du *velocity-based algorithm* réside dans le fait que le signal  $\dot{\mathbf{y}}$  n'est en règle générale pas accessible en pratique. Afin de palier ce problème, il a été proposé de pseudo-dériver le signal de mesure  $\mathbf{y}$ , donnant lieu au *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation (Kaminer et al., 1995). Cependant, cette approche introduit des pôles additionnels dans la dynamique du contrôleur qui viennent interférer dans la dynamique du système en boucle fermée.

Le présent chapitre, s'appuyant sur les développements de Kaminer et al. (1995), propose une implémentation de contrôleurs séquencés visant à structurellement éviter l'émergence des TCC. Contrairement au *velocity-based algorithm*, l'implémentation proposée requiert exclu-

sivement en entrée le signal de mesure  $\mathbf{y}$ . De plus, la stratégie proposée évite l'inclusion de pôles supplémentaires venant interférer dans la dynamique du système bouclé. Cette stratégie a fait l'objet d'une publication scientifique dans *International Journal of Control* (Lhachemi et al., 2017e).

Les développements de ce chapitre sont organisés comme suit. La Section 5.1 formalise le problème de l'implémentation d'une famille de contrôleurs LTI visant à éviter l'émergence des TCC. La solution développée par Kaminer et al. (1995) ainsi que ses limitations sont présentées en détails dans la Section 5.2. La stratégie ici proposée est développée dans la Section 5.3. Celle-ci est mise en œuvre pour un contrôle par retour de sortie dans la Section 5.4 ainsi que dans le cas de contrôleurs dynamiques dans la Section 5.5.

## 5.1 Position du problème

**Système à contrôler.** De manière à positionner le problème ici étudié, on reprend le formalisme de la Sous-Section 4.1.3.1. Plus spécifiquement, on considère le système incertain  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  caractérisé par :

$$\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}) \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta}) \end{cases} \quad (5.1)$$

où  $\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  représente le vecteur d'état,  $\mathbf{u}(t) \in \mathbb{R}^m$  le vecteur d'entrées de contrôle,  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^q$  le vecteur d'entrées exogènes et  $\mathbf{y}(t) \in \mathbb{R}^p$  le vecteur de sortie (où  $n, m, p, q \in \mathbb{N}^*$ ). Les incertitudes paramétriques sont rassemblées dans le vecteur  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta \subset \mathbb{R}^{n_\Delta}$ , où  $\Delta$  est fermé et connexe par arc. Le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n$  représente la dynamique du système et la fonction  $h : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^q \times \Delta \rightarrow \mathbb{R}^p$  génère les sorties du système. On suppose par la suite que  $f$  et  $h$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$ . On suppose que l'on peut paramétriser les points d'équilibre de  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  par l'intermédiaire d'un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e = \nu(\mathbf{y}_{1,e}, \mathbf{w}_{m,e})$  et de la configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$ . On renvoie à la Sous-Section 4.1.3.1 pour de plus amples détails sur une telle paramétrisation.

Le système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  est linéarisé pour chacun des points d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et configurations incertaines  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$  (i.e., autour du point d'équilibre associé  $\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ), donnant le système LTI suivant :

$$\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta}\mathbf{w} \\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{y} = \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} + \mathbf{D}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \mathbf{D}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})\boldsymbol{\delta}\mathbf{w} \end{cases} \quad (5.2)$$

où

$$\mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{C}^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{D}_u^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}, \quad \mathbf{D}_w^{\mathcal{S}}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \right|_{\mu(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})}. \quad (5.4)$$

On introduit alors la famille de modèles LTI associée au système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  indexée par le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et le paramètre incertain  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$  comme suit :

$$\mathcal{S}_l \triangleq \{\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) : \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta, \boldsymbol{\delta} \in \Delta\}. \quad (5.5)$$

**Famille de contrôleurs LTI.** Dans le cadre du contrôle par séquençement des gains, le premier objectif est de synthétiser pour chacun des modèles LTI  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathcal{S}_l$  un contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ .

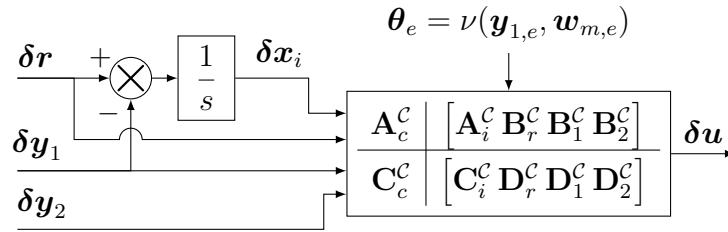


Figure 5.1 Contrôleur linéaire  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$

Soient  $\boldsymbol{\delta r}$ ,  $\boldsymbol{\delta y}_1$  et  $\boldsymbol{\delta y}_2$  les déviations de  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{y}_2$  relativement aux conditions d'équilibre  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ . On considère l'architecture de contrôle LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  illustrée par la Fig. 5.1 et caractérisée par :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \boldsymbol{\delta \dot{x}}_i = \boldsymbol{\delta r} - \boldsymbol{\delta y}_1 \\ \boldsymbol{\delta \dot{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta x}_i + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta r} + \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta y}_1 + \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta y}_2 \\ \boldsymbol{\delta u} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta x}_i + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta r} + \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta y}_1 + \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta y}_2 \end{cases} \quad (5.6)$$

où le vecteur d'état du contrôleur est constitué d'une composante intégrale  $\boldsymbol{\delta x}_i(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  et du vecteur  $\boldsymbol{\delta x}_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$ . Les coefficients des matrices  $\mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta})$  sont supposés être des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de la variable de séquençement  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ . On définit alors la famille de contrôleurs LTI indexée par le point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  comme suit :

$$\mathcal{C}_l \triangleq \{\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) : \boldsymbol{\theta}_e \in \Theta\}. \quad (5.7)$$

Dans ce cadre, l'objectif de la phase de synthèse est d'ajuster les gains du contrôleur à architecture fixe de telle sorte que pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et chaque configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ , le système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  illustré à la Fig. 5.2 est stable et présente un niveau de performance adéquat. Afin de se concentrer uniquement sur la stra-

tégie d'implémentation, on suppose dans ce chapitre que cette synthèse a été préalablement effectuée via une méthode quelconque, e.g., une approche classique de synthèse point à point ou une approche moderne de type LPV.

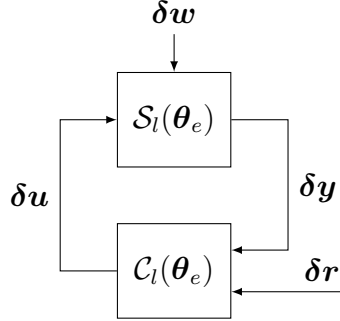


Figure 5.2 Système en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$

En préparation des développements à venir, on introduit la représentation d'état (5.8) du contrôleur  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  défini par (5.6) où le vecteur d'état est  $\mathbf{X}_l^\top = [\delta \mathbf{x}_i^\top \ \delta \mathbf{x}_c^\top]^\top$ , l'entrée du contrôleur  $\mathbf{U}_l^\top = [\delta \mathbf{r}^\top \ \delta \mathbf{y}_1^\top \ \delta \mathbf{y}_2^\top]^\top$  et la sortie du contrôleur  $\mathbf{Y}_l = \delta \mathbf{u}$ . Avec ces notations, la dynamique du contrôleur LTI est exprimée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_l = \mathcal{A}_l(\theta_e) \mathbf{X}_l + \mathcal{B}_l(\theta_e) \mathbf{U}_l \\ \mathbf{Y}_l = \mathcal{C}_l(\theta_e) \mathbf{X}_l + \mathcal{D}_l(\theta_e) \mathbf{U}_l \end{cases} \quad (5.8)$$

où les matrices sont données par :

$$\mathcal{A}_l(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_i^c(\theta_e) & \mathbf{A}_c^c(\theta_e) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B}_l(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{p_1} & -\mathbf{I}_{p_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{B}_r^c(\theta_e) & \mathbf{B}_1^c(\theta_e) & \mathbf{B}_2^c(\theta_e) \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = [\mathbf{C}_i^c(\theta_e) \ \mathbf{C}_c^c(\theta_e)], \quad \mathcal{D}_l(\theta_e) = [\mathbf{D}_r^c(\theta_e) \ \mathbf{D}_1^c(\theta_e) \ \mathbf{D}_2^c(\theta_e)], \quad (5.10)$$

avec  $\mathcal{A}_l(\theta_e) \in \mathbb{R}^{(n_c+p_1) \times (n_c+p_1)}$ ,  $\mathcal{B}_l(\theta_e) \in \mathbb{R}^{(n_c+p_1) \times (p+p_1)}$ ,  $\mathcal{C}_l(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times (n_c+p_1)}$  et  $\mathcal{D}_l(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times (p+p_1)}$ . La fonction de transfert du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = & \frac{1}{s} \left[ \mathbf{C}_i^c(\theta_e) + \mathbf{C}_c^c(\theta_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\theta_e))^{-1} \mathbf{A}_i^c(\theta_e) \right] (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{y}_1) \\ & + \left[ \mathbf{D}_r^c(\theta_e) + \mathbf{C}_c^c(\theta_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\theta_e))^{-1} \mathbf{B}_r^c(\theta_e) \right] \Delta \mathbf{r} \\ & + \left[ \mathbf{D}_1^c(\theta_e) + \mathbf{C}_c^c(\theta_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\theta_e))^{-1} \mathbf{B}_1^c(\theta_e) \right] \Delta \mathbf{y}_1 \\ & + \left[ \mathbf{D}_2^c(\theta_e) + \mathbf{C}_c^c(\theta_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\theta_e))^{-1} \mathbf{B}_2^c(\theta_e) \right] \Delta \mathbf{y}_2, \end{aligned} \quad (5.11)$$

où  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \mathbf{r}$ ,  $\Delta \mathbf{y}_1$  et  $\Delta \mathbf{y}_2$  représentent les transformées de Laplace de  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{y}_1$  et  $\delta \mathbf{y}_2$ .

**Formulation du problème.** Dans la suite de ce chapitre, on suppose que pour un système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\theta})$  donné, une famille de contrôleurs  $\mathcal{C}_l$  avec la structure (5.6) a été synthétisée sur l'ensemble du domaine d'opération  $\Theta$  de telle sorte que, pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ ,  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  est stable et présente un niveau de performance adéquat. Il s'agit donc à présent de trouver un contrôleur non linéaire séquencé sous la forme :

$$\mathcal{C} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_k = f_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \\ \mathbf{u} = h_k(\mathbf{x}_k, \mathbf{y}, \mathbf{r}, \boldsymbol{\theta}) \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.12)$$

pouvant préserver les propriétés entrée-sortie du système linéarisé en boucle fermée. En d'autres termes, l'objectif de l'implémentation de la famille de contrôleurs  $\mathcal{C}_l$  est de trouver un contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  tel que, une fois placé en boucle fermée avec le système non linéaire  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$ , la linéarisation du système bouclé au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  résulte en une dynamique LTI qui coïncide (du point de vue de la stabilité interne et du comportement entrée-sortie) avec celle utilisée lors de la synthèse correspondant à l'interconnexion de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Une telle propriété de l'implémentation du contrôleur séquencé est essentielle dans la mesure où elle garantit que l'implémentation est conforme aux dynamiques LTI employées lors de la phase de synthèse. En particulier, une telle implémentation vise à éviter l'émergence des TCC.

De manière à formuler le problème ainsi étudié, notons  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)) : (\boldsymbol{\delta}\mathbf{r}, \boldsymbol{\delta}\mathbf{w}) \rightarrow \boldsymbol{\delta}\mathbf{y}$  le système bouclé correspondant à l'interconnexion du système linéarisé  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ . La fonction de transfert correspondante est notée  $T(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$ . Le système non linéaire en boucle fermée correspondant à l'interconnexion du système non linéaire  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  et du contrôleur non linéaire  $\mathcal{C}$  est notée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}) : (\mathbf{r}, \mathbf{w}) \rightarrow \mathbf{y}$ . Soit  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C})(\boldsymbol{\theta}_e)$  la linéarisation de  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C})$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et  $T_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C})(\boldsymbol{\theta}_e)$  la fonction de transfert correspondante. Le problème d'implémentation du contrôleur (non linéaire) séquencé est formulé ci-après.

**Problème 5.1 (Implémentation s'affranchissant de l'émergence des TCC)** *Trouver un contrôleur (non linéaire) séquencé  $\mathcal{C}$  sous la forme (5.12) tel que pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et toute configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ , les propriétés suivantes soient vérifiées :*

1. *la fonction de transfert  $T_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C})(\boldsymbol{\theta}_e)$  coïncide avec  $T(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  ;*
2. *si  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  est intérieurement stable (i.e., ne présente pas de modes cachés), alors il en est de même pour  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C})(\boldsymbol{\theta}_e)$ .*

Dans le Problème 5.1, la condition (1) vise à trouver un contrôleur non linéaire séquencé  $\mathcal{C}$

capable de préserver, une fois linéarisé au point de fonctionnement  $\theta_e \in \Theta$ , la dynamique entrée-sortie du système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta), \mathcal{C}_l(\theta_e))$ . Étant donné que la stratégie élaborée pour une telle implémentation  $\mathcal{C}$  pourrait impliquer des modes cachés, la condition (2) vise à imposer qu'ils soient stables de manière à préserver la stabilité interne du système bouclé.

Il est à souligner que la méthode du DGS exposée dans la Sous-Section 3.3.2 vise à satisfaire les conditions du Problème 5.1 via la résolution des EDP (3.61) et (3.62). Cependant, comme cela a déjà été souligné, cette méthode nécessite une résolution au cas par cas sans garantie *a priori* de l'existence de solutions. De plus, la résolution ne peut en général qu'être effectuée pour une configuration nominale  $\delta_0 \in \Delta$  fixée des paramètres incertains, induisant des problèmes de robustesse dès lors que  $\delta \neq \delta_0$ . Pour ces raisons, le DGS n'est qu'une solution partielle du Problème 5.1. De plus, on cherche ici à mettre en place une stratégie d'implémentation simple et générique permettant d'implémenter de manière directe et systématique toute famille de contrôleurs LTI en évitant la résolution d'équations postérieure à la phase de synthèse.

## 5.2 Implémentation basée sur la dérivée temporelle du signal de sortie

Dans la littérature, le Problème 5.1 a été solutionné par Kaminer et al. (1995) via la proposition d'implémentation dénommée *velocity-based algorithm* qui tire profit de la dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{y}}$  du signal de sortie du système  $\mathbf{y}$ . Cette stratégie d'implémentation, ainsi que ses limitations et les solutions proposées dans la littérature pour les pallier sont présentées dans cette section.

### 5.2.1 Solution exacte

De manière à introduire la méthode proposée par Kaminer et al. (1995), on s'attarde dans un premier temps sur le premier exemple illustratif qui a été utilisé dans la Section 3.2.1 afin d'introduire la problématique des TCC. Sur cette base, la stratégie d'implémentation du *velocity-based algorithm* est ensuite introduite dans sa généralité.

#### 5.2.1.1 Exemple illustratif

On considère le système  $\mathcal{S}$  donné par (3.11) avec la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = k_i(\theta_e)\delta x_i + k_1(\theta_e)\delta x_1 + k_2(\theta_e)\delta x_2 \end{cases} \quad (5.13)$$



où les gains  $k_i(\theta_e)$ ,  $k_1(\theta_e)$  et  $k_2(\theta_e)$ , donnés par (3.16), ont été calculés de manière à imposer les trois pôles du système en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  en  $-1$  et  $-1/2 \pm j\sqrt{3}/2$ . On a vu que l'implémentation :

$$\mathcal{C}_{\text{seq}} = \begin{cases} \dot{x}_i = r - y \\ u = k_i(y)x_i + k_1(y)x_1 + k_2(y)y \end{cases} \quad (5.14)$$

ne permet pas d'obtenir une implémentation adéquate car sujette à l'émergence de TCC (cf. (3.19)). Il avait en particulier été observé sur la base de l'expression des TCC (3.20) que leur émergence est liée au fait que les conditions d'équilibre du système, à savoir  $x_{1,e}(\theta_e)$  et  $y_e(\theta_e) = x_{2,e}(\theta_e) = \theta_e$ , ainsi que la condition d'équilibre de la composante intégrale du contrôleur  $x_{i,e}(\theta_e)$ , sont non nulles. De manière à forcer les signaux intervenant dans l'architecture du contrôleur séquencé à prendre des valeurs nulles à l'équilibre, l'idée est de recourir non pas directement aux signaux mesurés  $x_1$  et  $y = x_2$ , mais à leur dérivée temporelle  $\dot{x}_1$  et  $\dot{y} = \dot{x}_2$ . Pour évaluer l'intérêt de recourir à ces grandeurs, réécrivons la dynamique du système  $\mathcal{S}$  (3.11) en prenant  $y_{1,d} = \dot{x}_1$  et  $y_{2,d} = \dot{x}_2$  comme sorties du système. En posant  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2]^\top$  et  $\mathbf{y}_d = [y_{1,d} \ y_{2,d}]^\top$ , on obtient alors la dynamique du système sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, u) \\ \mathbf{y}_d = h_d(\mathbf{x}, u) \end{cases} \quad (5.15)$$

où  $f(\mathbf{x}, u) = h_d(\mathbf{x}, u) = (\tan(x_1) + x_2, x_1 + u)$ . On obtient alors à l'équilibre,  $\mathbf{y}_{d,e}(\theta_e) = h_d(\mathbf{x}_e(\theta_e), u_e(\theta_e)) = f(\mathbf{x}_e(\theta_e), u_e(\theta_e)) = \mathbf{0}$ . Les signaux  $y_{1,d} = \dot{x}_1$  et  $y_{2,d} = \dot{x}_2$  prennent donc bien des valeurs nulles à l'équilibre, ce que l'on note sous la forme<sup>1</sup>  $\dot{x}_{1,e}(\theta_e) = \dot{x}_{2,e}(\theta_e) = 0$ .

Le résultat précédent incite donc à employer dans l'architecture du contrôleur séquencé les signaux  $\dot{x}_1$  et  $\dot{y} = \dot{x}_2$  en lieu et place des signaux  $x_1$  et  $y = x_2$ . Plus spécifiquement, considérons l'implémentation suivante :

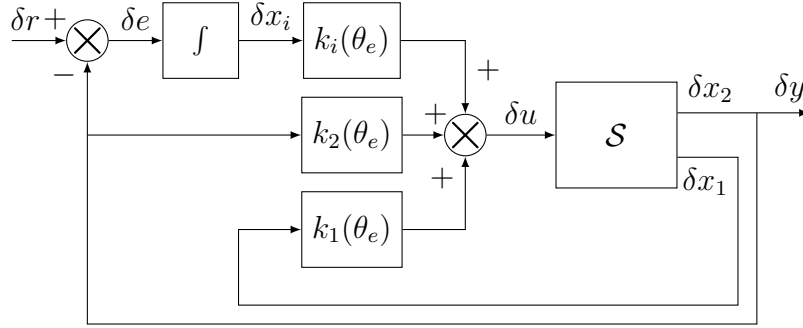
$$\mathcal{C}_{\text{vel}} \triangleq \begin{cases} v = k_i(y)[r - y] + k_1(y)\dot{x}_1 + k_2(y)\dot{y} \\ \dot{u} = v \end{cases} \quad (5.16)$$

Comparativement à l'implémentation naïve  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  (5.14) illustrée à la Fig. 5.3(b), l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  (5.16) illustrée à la Fig. 5.3(c) est obtenue en déplaçant la composante intégrale depuis l'entrée vers la sortie sur contrôleur.

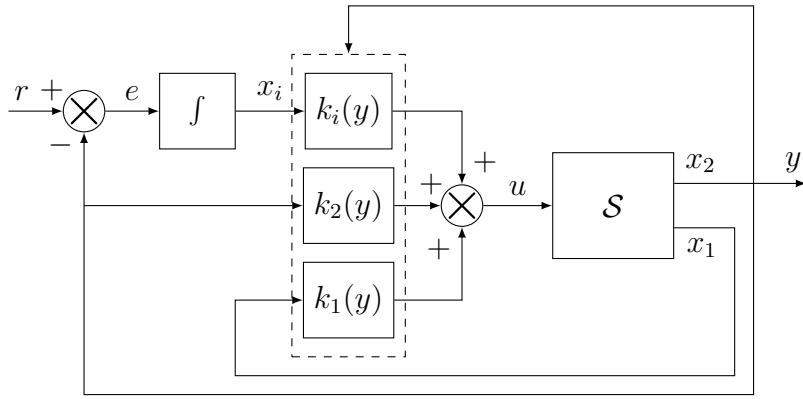
Remarquons que l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  ne présente pas, de manière explicite, une composante

---

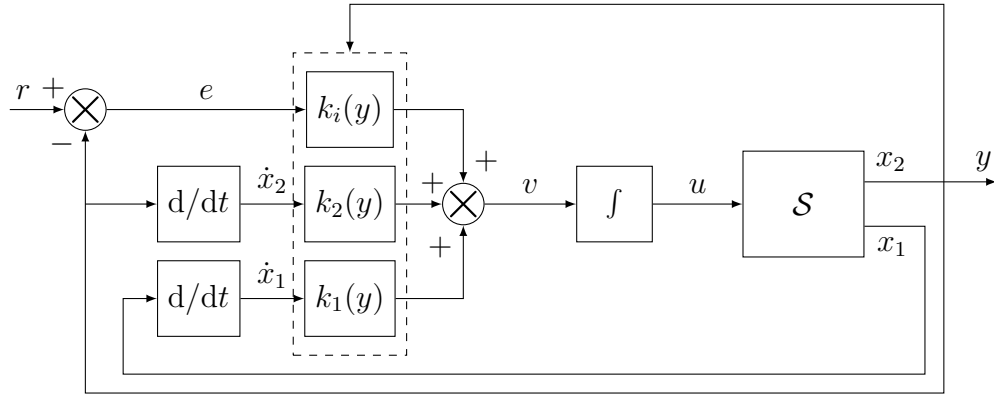
1. Pour  $k \in \{1, 2\}$ , on devrait en toute rigueur recourir à la notation  $(\dot{x}_k)_e(\theta_e)$  pour noter l'équilibre du signal  $\dot{x}_k$  associé au point d'opération  $\theta_e$ . On recourt néanmoins à la notation  $\dot{x}_{k,e}(\theta_e)$  à des fins de simplicité.



(a) Architecture du système linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  au point d'opération  $\theta_e$  utilisé lors de la synthèse.



(b) Architecture du système non linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{seq}})$  basée sur le séquençage des gains du contrôleur et donnant lieu à l'apparition de TCC.



(c) Architecture du système non linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}})$  basée sur l'implémentation *velocity-based algorithm* du contrôleur séquentiel.

Figure 5.3 Exemple 1 - Comparaison de l'implémentation naïve et de l'implémentation *velocity-based algorithm*.

intégrale portant sur le signal d'erreur  $e = r - y$ . La composante intégrale est néanmoins réalisée de manière structurelle. En effet, la mise à l'équilibre de (5.16) pour le point d'opération  $\theta_e \in \mathbb{R}$  (lorsque placé en boucle fermée avec le système  $\mathcal{S}$ ) donne  $k_i(\theta_e)[r_e(\theta_e) - y_e(\theta_e)] = v_e(\theta_e) = 0$ . Le gain séquencé  $k_i$  ne s'annulant pas, on en déduit que  $r_e(\theta_e) = y_e(\theta_e)$ . On retrouve ici bien le rôle de la composante intégrale usuellement employée. La linéarisation de la première composante de (5.16) donne alors :

$$\begin{aligned} \delta v &= k_i(\theta_e)[\delta r - \delta y] + k_1(\theta_e)\delta \dot{x}_1 + k_2(\theta_e)\delta \dot{y} \\ &\quad + \underbrace{\frac{\partial k_i}{\partial \theta} \Big|_{\theta_e} \underbrace{[r_e(\theta_e) - y_e(\theta_e)]}_{=0} + \frac{\partial k_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta_e} \underbrace{\dot{x}_{1,e}(\theta_e)}_{=0} + \frac{\partial k_2}{\partial \theta} \Big|_{\theta_e} \underbrace{\dot{y}_e(\theta_e)}_{=0}}_{\text{TCC}} \\ &= k_i(\theta_e)[\delta r - \delta y] + k_1(\theta_e)\delta \dot{x}_1 + k_2(\theta_e)\delta \dot{y}. \end{aligned} \quad (5.17)$$

On obtient donc la dynamique linéarisée :

$$\mathcal{C}_{\text{vel},l}(\theta_e) = \begin{cases} \delta v = k_i(\theta_e)[\delta r - \delta y] + k_1(\theta_e)\delta \dot{x}_1 + k_2(\theta_e)\delta \dot{y} \\ \delta \dot{u} = \delta v \end{cases} \quad (5.18)$$

Pour conclure, il reste à remarquer que  $\delta \dot{x}_1 = \overbrace{\delta \dot{x}_1}$ ,  $\delta \dot{y} = \overbrace{\delta \dot{y}}$  et  $\delta \dot{u} = \overbrace{\delta \dot{u}}$ . En effet, en reprenant (5.15) avec  $y_{1,d} = \dot{x}_1$  et  $y_{2,d} = \dot{x}_2$ , on a  $\delta \dot{\mathbf{x}} = \delta \mathbf{y}_d = \frac{\partial h_d}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial h_d}{\partial u} \delta u = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial u} \delta u = \overbrace{\delta \dot{\mathbf{x}}}$ . Un raisonnement similaire s'applique pour montrer que  $\delta \dot{u} = \overbrace{\delta \dot{u}}$ . On obtient alors par intégration de la première équation de (5.18) et en supposant les conditions initiales nulles que :

$$\mathcal{C}_{\text{vel},l}(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{x}_i = \delta r - \delta y \\ \delta u = k_i(\theta_e)\delta x_i + k_1(\theta_e)\delta x_1 + k_2(\theta_e)\delta y \end{cases} \quad (5.19)$$

On retrouve ainsi exactement la dynamique du contrôleur LTI d'origine (5.13). De la sorte, le *velocity-based algorithm* fournit une implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  adéquate de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ , permettant en particulier d'éviter l'émergence des TCC.

Le comportement du système bouclé pour les deux architectures de contrôle  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  et  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  est illustré à la Fig. 5.4 pour une entrée de référence de type échelon d'amplitude  $0.5 > \theta_{\text{lim}}$ . Les implémentations utilisées sont celles données par les Fig. 5.3(b) et 5.3(c). Comme attendu, le système en boucle fermée avec l'implémentation naïve  $\mathcal{C}_{\text{seq}}$  ne permet pas de stabiliser le système. *A contrario*, l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  permet de faire converger le signal de sortie  $y(t)$  vers la valeur de la référence appliquée en entrée. Ce résultat tend à

démontrer le bénéfice de recourir à des stratégies d'implémentation, certes plus complexes, mais réellement conformes à la famille de contrôleurs  $\mathcal{C}_l$  issue de la phase de synthèse point à point.

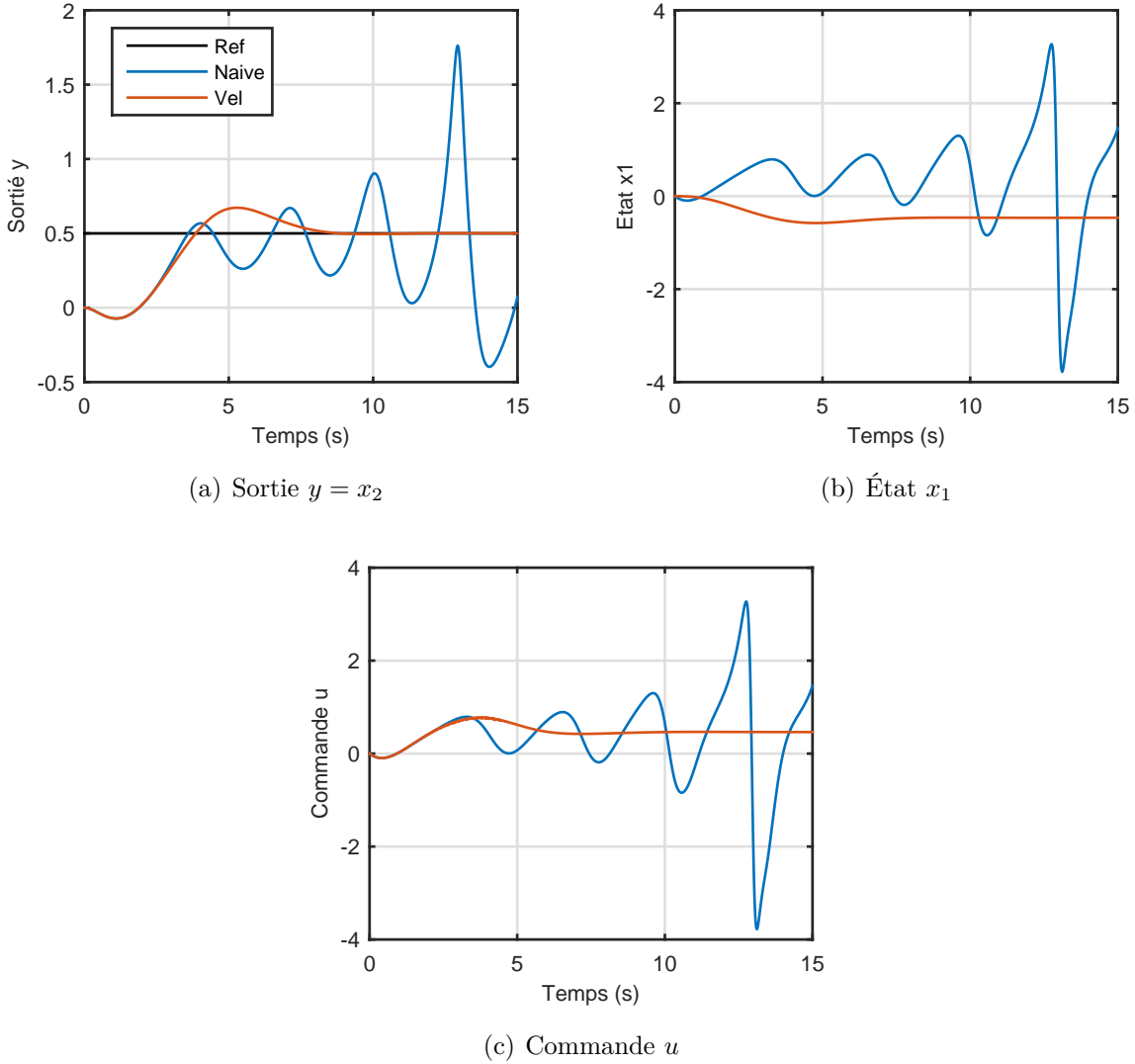
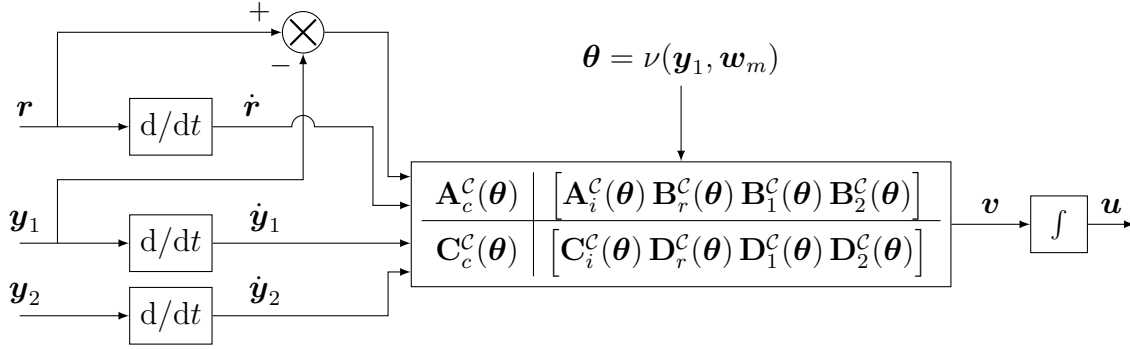


Figure 5.4 Comparaison de la réponse du système en boucle fermée pour l'implémentation naïve  $\mathcal{C}_{seq}$  et l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{vel}$  pour une entrée de référence de type échelon d'amplitude 0.5

### 5.2.1.2 Implémentation basée sur la dérivée temporelle du signal de sortie

En tirant profit de la dérivée temporelle du signal de mesure, l'exemple académique précédent a montré qu'il était possible de mettre en place des implémentations évitant structurellement

Figure 5.5 *Velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ 

l'émergence des TCC. L'objet de ce paragraphe est de généraliser cette idée pour toute architecture de contrôle prenant la forme (5.6). Les résultats ici relatés sont l'œuvre de Kaminer et al. (1995) qui a proposé l'implémentation illustrée à la Fig. 5.5 connue sous l'appellation *velocity-based algorithm*. La dynamique du contrôleur prend la forme suivante :

$$\mathcal{C}_{\text{vel}} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{y}}_2 \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{r}} + \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta})\dot{\mathbf{y}}_2 \\ \dot{\mathbf{u}} = \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.20)$$

où  $\mathbf{x}_c(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  et  $\mathbf{v}(t) \in \mathbb{R}^m$ . L'idée de base motivant cette stratégie est la même que celle observée pour l'exemple illustratif, à savoir que les signaux  $\dot{\mathbf{y}}$  et  $\dot{\mathbf{r}}$  s'annulent à l'équilibre. En effet, considérons le système à contrôler  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  caractérisé par (5.1) et évaluons  $\dot{\mathbf{y}}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{y}} &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})} \dot{\mathbf{x}} + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})} \dot{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})} \dot{\mathbf{w}} \\ &= \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta}) + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})} \dot{\mathbf{u}} + \left. \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \right|_{(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}, \boldsymbol{\delta})} \dot{\mathbf{w}}. \end{aligned} \quad (5.21)$$

La configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$  étant supposée constante, on a  $\dot{\boldsymbol{\delta}} = \mathbf{0}$ , raison pour laquelle l'expression précédente ne fait pas intervenir de dérivée partielle relativement à  $\boldsymbol{\delta}$ . Cela amène à considérer le modèle augmenté suivant dont l'entrée de commande est  $\mathbf{u}_a = \dot{\mathbf{u}}$  et l'entrée

exogène est  $\mathbf{w}_a = \dot{\mathbf{w}}$  :

$$\mathcal{S}_a(\delta) \triangleq \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\xi}}_u = \mathbf{u}_a, & \boldsymbol{\xi}_u(0) = \mathbf{u}(0) \\ \dot{\boldsymbol{\xi}}_w = \mathbf{w}_a, & \boldsymbol{\xi}_w(0) = \mathbf{w}(0) \\ \dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_w, \delta) \\ \mathbf{y} = h(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_w, \delta) \\ \mathbf{y}_d = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_w, \delta)} f(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_w, \delta) + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_w, \delta)} \mathbf{u}_a + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{(\mathbf{x}, \boldsymbol{\xi}_u, \boldsymbol{\xi}_w, \delta)} \mathbf{w}_a \end{cases} \quad (5.22)$$

où la sortie  $\mathbf{y}_d$  correspond avec la dérivée temporelle du signal de sortie  $\mathbf{y}$ , i.e.,  $\mathbf{y}_d = \dot{\mathbf{y}}$ . Puisque les lignes trois et quatre de (5.22) coïncident avec (5.1), l'équilibre de  $\mathcal{S}_a(\delta)$  associé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e = \nu(\mathbf{y}_{1,e}, \mathbf{w}_{m,e})$  coïncide avec l'équilibre de  $\mathcal{S}(\delta)$  au même point de fonctionnement. L'équilibre de (5.22) est alors caractérisé par  $\boldsymbol{\xi}_{u,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$ ,  $\boldsymbol{\xi}_{w,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$ ,  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  et  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$ , où  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$ ,  $\mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$ ,  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  et  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)$  caractérisent l'équilibre de (5.1) au même point d'opération. De plus,  $\mathbf{u}_{a,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{w}_{a,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$ , i.e.,  $\dot{\mathbf{u}}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$  et  $\dot{\mathbf{w}}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$ . La sortie  $\mathbf{y}_d$  du système augmenté vérifie alors à l'équilibre :

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_{d,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \delta)} \underbrace{f(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \delta)}_{=\mathbf{0}} \\ &\quad + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \delta)} \underbrace{\mathbf{u}_{a,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)}_{=\mathbf{0}} + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{(\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \mathbf{w}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta), \delta)} \underbrace{\mathbf{w}_{a,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta)}_{=\mathbf{0}} \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned} \quad (5.23)$$

Ainsi, la dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{y}}$  de la sortie  $\mathbf{y}$  du système prend la valeur  $\mathbf{0}$  à l'équilibre, ce que l'on notera par  $\dot{\mathbf{y}}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$ . Similairement, en augmentant  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  donné par (5.20) en prenant  $\mathbf{r}_a = \dot{\mathbf{r}}$  comme entrée de référence, on obtient que  $\mathbf{r}_{a,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$ , ce que l'on notera  $\dot{\mathbf{r}}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$ .

Sur cette base, l'équilibre du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  est caractérisé par  $\mathbf{v}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) = \mathbf{0}$  et :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) \\ \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta) \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.24)$$

On retrouve une nouvelle fois la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  définie par (3.41) permettant de caractériser l'équilibre du contrôleur séquencé. De manière à dériver les propriétés de l'implémentation

$\mathcal{C}_{\text{vel}}$ , les deux hypothèses suivantes sont formulées (Kaminer et al., 1995).

**Hypothèse 5.1 (Hypothèse du *velocity-based algorithm*)** Dans le contexte du contrôle du système  $\mathcal{S}(\delta)$  (5.1), dont la dynamique linéarisée  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta)$  est donnée par (5.2), avec le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  défini par (5.20), on suppose que :

- (H1) les coefficients des matrices  $\mathbf{A}_c^c(\theta), \dots, \mathbf{D}_2^c(\theta)$  du contrôleur sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de la variable de séquençement  $\theta \in \Theta$  ;
- (H2) pour tout point d'opération  $\theta_e \in \Theta$ , la matrice  $\mathbf{E}(\theta_e)$  définie par (3.41) est de colonne rang plein ;
- (H3) la dimension de l'entrée de contrôle du système  $\mathbf{u}$  coïncide avec celle du signal de référence  $\mathbf{r}$ , i.e,  $m = p_1$ .

Sous réserve de l'Hypothèse 5.1, la matrice  $\mathbf{E}(\theta_e)$  est carrée et inversible. Dès lors, de (5.24), on déduit que l'équilibre du contrôleur est caractérisé par :  $\mathbf{x}_{c,e}(\theta_e, \delta) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{r}_e(\theta_e, \delta) = \mathbf{y}_{1,e}(\theta_e)$ . En particulier, puisque le signal de référence à l'équilibre pour le point d'opération  $\theta_e$  est indépendant de la configuration incertaine  $\delta \in \Delta$ , on le notera pour la suite simplement  $\mathbf{r}_e(\theta_e)$ , vérifiant ainsi  $\mathbf{r}_e(\theta_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\theta_e)$ . Cette égalité garantit qu'à l'équilibre, le signal à contrôler  $\mathbf{y}_1$  coïncide bel et bien avec le signal de référence  $\mathbf{r}$ . Ainsi, bien que l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  donnée par (5.24) ne fasse pas intervenir de manière explicite une composante intégrale portant sur le signal d'erreur  $\mathbf{e} = \mathbf{r} - \mathbf{y}_1$ , la composante intégrale est néanmoins réalisée de manière structurelle par l'implémentation.

En reprenant à présent (5.20), et en tirant profit de la nullité des conditions d'équilibre des grandeurs intervenant dans l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ , il peut être montré (Kaminer et al., 1995) que l'on obtient la dynamique linéarisée suivante :

$$\mathcal{C}_{\text{vel},l}(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\theta_e) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1] + \mathbf{B}_r^c(\theta_e) \delta \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{B}_1^c(\theta_e) \delta \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{B}_2^c(\theta_e) \delta \dot{\mathbf{y}}_2 \\ \delta \mathbf{v} = \mathbf{C}_c^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{C}_i^c(\theta_e) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1] + \mathbf{D}_r^c(\theta_e) \delta \dot{\mathbf{r}} + \mathbf{D}_1^c(\theta_e) \delta \dot{\mathbf{y}}_1 + \mathbf{D}_2^c(\theta_e) \delta \dot{\mathbf{y}}_2 \\ \delta \dot{\mathbf{u}} = \delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.25)$$

Notons que  $\delta \dot{\mathbf{y}}_1 = \widehat{\delta \mathbf{y}}_1$  et  $\delta \dot{\mathbf{y}}_2 = \widehat{\delta \mathbf{y}}_2$ . Pour s'en convaincre, reprenons la dynamique augmen-

tée  $\mathcal{S}_a(\delta)$  donnée par (5.22) où, par définition,  $\mathbf{y}_d = \dot{\mathbf{y}}$ . Par linéarisation on obtient<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned}
 \delta \dot{\mathbf{y}} = \delta \mathbf{y}_d &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \left\{ \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \mathbf{u} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \mathbf{w} \right\} \\
 &\quad + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \mathbf{u}_a + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \mathbf{w}_a \\
 &= \frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \widehat{\delta \mathbf{x}} + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \widehat{\delta \xi_u} + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \widehat{\delta \xi_w} \\
 &= \overbrace{\frac{\partial h}{\partial \mathbf{x}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \mathbf{x} + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{u}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \xi_u + \frac{\partial h}{\partial \mathbf{w}} \Big|_{\zeta_e(\theta_e, \delta)} \delta \xi_w}^{\widehat{\delta \mathbf{y}}} \\
 &= \widehat{\delta \mathbf{y}},
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

où  $\zeta_e(\theta_e, \delta) = (\mathbf{x}_e(\theta_e, \delta), \xi_{u,e}(\theta_e, \delta), \xi_{w,e}(\theta_e, \delta), \delta) = (\mathbf{x}_e(\theta_e, \delta), \mathbf{u}_e(\theta_e, \delta), \mathbf{w}_e(\theta_e, \delta), \delta)$  et où la seconde égalité a été obtenue en tenant compte du fait que  $f(\zeta_e(\theta_e, \delta)) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{u}_{a,e}(\theta_e, \delta) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{w}_{a,e}(\theta_e, \delta) = \mathbf{0}$ . Similairement, on montre que  $\delta \dot{\mathbf{r}} = \widehat{\delta \mathbf{r}}$ . Dès lors, en intégrant relativement à la variable temporelle les équations de la dynamique  $\mathcal{C}_{\text{vel},l}(\theta_e)$  données par (5.25), on obtient, en notant  $\delta \tilde{\mathbf{x}}_c(t) = \int_0^t \delta \mathbf{x}_c(\tau) d\tau$  et en supposant les conditions initiales nulles,

$$\mathcal{C}_{\text{vel},l}(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\tilde{\mathbf{x}}}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta_e) \delta \tilde{\mathbf{x}}_c + \mathbf{A}_i^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_r^c(\theta_e) \delta \mathbf{r} + \mathbf{B}_1^c(\theta_e) \delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{B}_2^c(\theta_e) \delta \mathbf{y}_2 \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{C}_c^c(\theta_e) \delta \tilde{\mathbf{x}}_c + \mathbf{C}_i^c(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{D}_r^c(\theta_e) \delta \mathbf{r} + \mathbf{D}_1^c(\theta_e) \delta \mathbf{y}_1 + \mathbf{D}_2^c(\theta_e) \delta \mathbf{y}_2 \end{cases} \tag{5.27}$$

On obtient de la sorte la dynamique initiale du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donnée par (5.6) que l'on souhaitait implémenter. Dès lors, l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  donnée par (5.20) est une solution du Problème 5.1.

### 5.2.2 Solution approchée par stratégie de pseudo-dérivation

L'inconvénient de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  réside dans la nécessité de disposer de la dérivée temporelle  $\dot{\mathbf{y}}$  du signal de mesure  $\mathbf{y}$  afin d'implémenter (5.20). Or, en pratique, le signal  $\dot{\mathbf{y}}$  n'est en général pas mesurable. Par exemple, dans le cas du missile de la Sous-Section 4.1.4.1, la mise en œuvre de l'implémentation *velocity-based algorithm* afin de contrôler l'accélération normale  $\eta$  requerrait la mesure du signal  $\dot{\eta}$ . Alors que la mesure de  $\eta$  peut être obtenue par

2. On a ici besoin de l'hypothèse supplémentaire que la fonction  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^2$ .



un accéléromètre, le signal  $\dot{\eta}$  n'est pas directement accessible par la mesure. Pour pallier ce type de problème, on peut recourir à une stratégie de pseudo-dérivation afin d'approximer  $\dot{\mathbf{y}}$  (Kaminer et al., 1995).

### 5.2.2.1 Stratégie de pseudo-dérivation

La stratégie de pseudo-dérivation employée est donnée par la fonction de transfert  $s/(\varepsilon s + 1)$  où  $\varepsilon \in \mathbb{R}_+^*$  est le paramètre de pseudo-dérivation. En choisissant  $\varepsilon$  petit, l'idée est alors d'approximer la fonction de transfert  $s$  d'un dérivateur pur qui n'est pas physiquement réalisable<sup>3</sup> en introduisant un pôle stable rapide localisé en  $-1/\varepsilon$ . Ce raisonnement se justifie d'un point de vue mathématique de la façon suivante. Pour  $\varepsilon > 0$  donné, supposons que l'on injecte un signal  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+)$  en entrée du système LTI de fonctions de transfert  $s/(\varepsilon s + 1)$ , produisant le signal de sortie  $y_\varepsilon : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ . Par définition, on a alors la relation  $\varepsilon \dot{y}_\varepsilon + y_\varepsilon = \dot{u}$ . Une intégration directe montre que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$y_\varepsilon(t) = y_0 e^{-t/\varepsilon} + \frac{e^{-t/\varepsilon}}{\varepsilon} \int_0^t \dot{u}(\tau) e^{\tau/\varepsilon} d\tau, \quad (5.28)$$

où  $y_0 \in \mathbb{R}$  est la condition initiale d'intégration. En évaluant l'intégrale par une intégration par parties, on en déduit que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$y_\varepsilon(t) = \dot{u}(t) + [y_0 - \dot{u}(0)] e^{-t/\varepsilon} - \int_0^t \ddot{u}(\tau) e^{-(t-\tau)/\varepsilon} d\tau. \quad (5.29)$$

Puisque  $\varepsilon > 0$ , le théorème de convergence dominé de Lebesgue assure, pour tout  $t \geq 0$  fixé, la convergence de l'intégrale vers 0 lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ . Ainsi, pour tout  $t \geq 0$ ,  $y_\varepsilon(t) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \dot{u}(t)$ .

Sur cette base, en tirant profit de l'identité :

$$\frac{s}{\varepsilon s + 1} = \frac{1}{\varepsilon} \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon s + 1} \right), \quad (5.30)$$

l'implémentation du *velocity-based algorithm*  $C_{\text{vel}}$  est modifiée, telle que illustrée à la Fig. 5.6,

---

3. Cela découle du fait que la fonction de transfert est impropre, impliquant la nécessité d'une énergie infinie afin de la réaliser en pratique.

comme suit :

$$\mathcal{C}_{\text{vel,a}} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{r,f} = -\varepsilon^{-1} \mathbf{x}_{r,f} + \varepsilon^{-1} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{x}}_{y_1,f} = -\varepsilon^{-1} \mathbf{x}_{y_1,f} + \varepsilon^{-1} \mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_{y_2,f} = -\varepsilon^{-1} \mathbf{x}_{y_2,f} + \varepsilon^{-1} \mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_c + \varepsilon \mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] \\ \quad + \mathbf{B}_r(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_c(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_c + \varepsilon \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] \\ \quad + \mathbf{D}_r(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{D}_1(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{D}_2(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \dot{\mathbf{u}} = \varepsilon^{-1} \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.31)$$

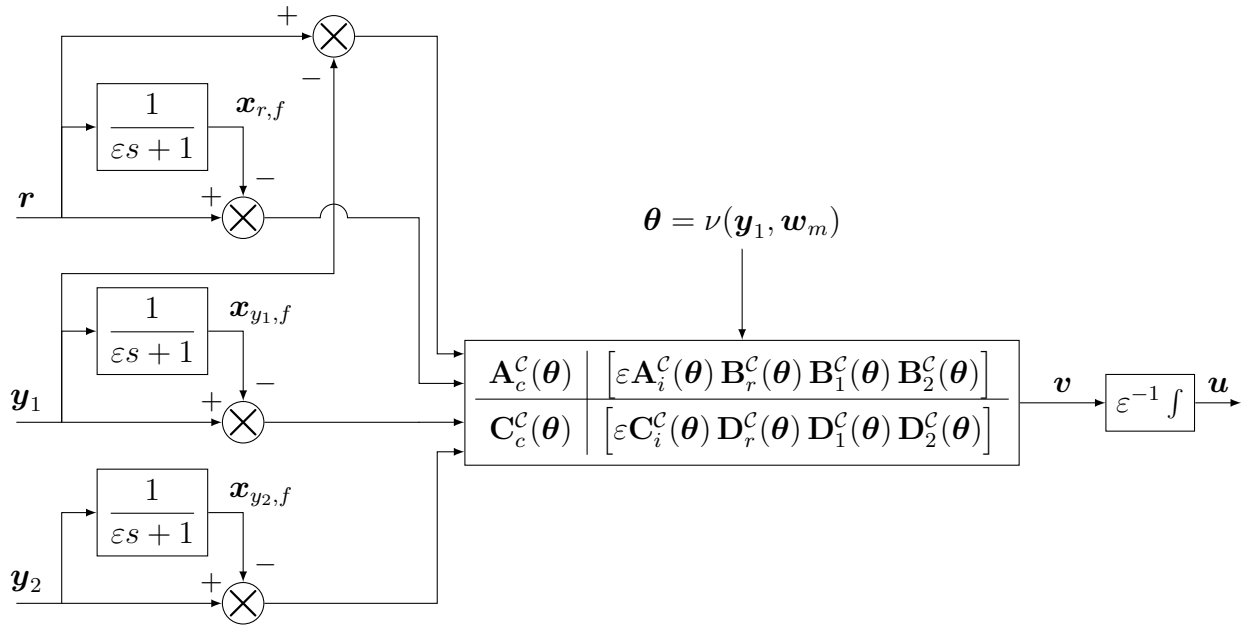


Figure 5.6 Approximation du *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation des entrées  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$

La mise à l'équilibre de (5.31) au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ , lorsque  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  est placé en boucle fermée avec  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$ , donne  $\mathbf{x}_{r,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{r}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ,  $\mathbf{x}_{y_1,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_1(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{x}_{y_2,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{y}_2(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ,  $\mathbf{v}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$  et <sup>4</sup>  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} = \mathbf{0}$ . Sur la base des Hypothèses 5.1 du *velocity-based algorithm*, on obtient que  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$  et le signal de référence à l'équilibre vérifie  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$ . L'expression de ce dernier étant indépendante de  $\boldsymbol{\delta}$ , on le

4. La matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est définie par (3.41).

notera simplement  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$  par la suite. Ainsi, comme dans le cas du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ , les signaux intervenant dans sa dynamique ont une contribution nulle à l'équilibre. Dès lors, en procédant comme pour l'établissement de la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{vel},l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  à la Sous-Section 5.2.1, on obtient la dynamique linéarisée suivante :

$$\mathcal{C}_{\text{vel},a,l}(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_{r,f} = -\varepsilon^{-1} \delta \mathbf{x}_{r,f} + \varepsilon^{-1} \delta \mathbf{r} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_{y_1,f} = -\varepsilon^{-1} \delta \mathbf{x}_{y_1,f} + \varepsilon^{-1} \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_{y_2,f} = -\varepsilon^{-1} \delta \mathbf{x}_{y_2,f} + \varepsilon^{-1} \delta \mathbf{y}_2 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta}) \delta \mathbf{x}_c + \varepsilon \mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1] \\ \quad + \mathbf{B}_r(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{y}_1 - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{y}_2 - \delta \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \delta \mathbf{v} = \mathbf{C}_c(\boldsymbol{\theta}) \delta \mathbf{x}_c + \varepsilon \mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1] \\ \quad + \mathbf{D}_r(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{D}_1(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{y}_1 - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{D}_2(\boldsymbol{\theta}) [\delta \mathbf{y}_2 - \delta \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \delta \dot{\mathbf{u}} = \varepsilon^{-1} \delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.32)$$

où l'ensemble des TCC sont nuls.

La stratégie de pseudo-dérivation permet donc d'éviter l'émergence des TCC. Elle introduit cependant des composantes de filtrage supplémentaires. De manière à évaluer l'impact de cette stratégie de pseudo-dérivation sur la dynamique du contrôleur, on évalue la fonction de transfert de ce dernier. En notant respectivement  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \mathbf{r}$ ,  $\Delta \mathbf{y}_1$  et  $\Delta \mathbf{y}_2$  les transformées de Laplace de  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{y}_1$  et  $\delta \mathbf{y}_2$ , on a :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = & \frac{1}{s} \left[ \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{y}_1) \\ & + \frac{1}{\varepsilon s + 1} \left[ \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{r} \\ & + \frac{1}{\varepsilon s + 1} \left[ \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_1 \\ & + \frac{1}{\varepsilon s + 1} \left[ \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_2 \end{aligned} \quad (5.33)$$

En comparant la fonction de transfert du contrôleur obtenue sur la base du *velocity-based algorithm* (5.33) et celle du contrôleur linéaire  $\mathbf{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  initial donnée par (5.11), on constate que la stratégie de pseudo-dérivation introduit des dynamiques résiduelles dont les pôles sont localisés en  $-1/\varepsilon$ . Ainsi, bien que la stratégie de pseudo-dérivation présente l'avantage d'éviter à la fois la nécessité de mesurer explicitement  $\dot{\mathbf{y}}$  et l'émergence de TCC, elle présente le désavantage d'introduire une dynamique parasite non désirée et non incluse dans la phase de synthèse de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ . Dès lors, l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  approximant le *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  ne permet pas de résoudre le Problème 5.1 de manière exacte.

De manière à éviter une interférence trop importante de cette dynamique résiduelle sur la dynamique du système en boucle fermée, il a été montré dans (Kaminer et al., 1995), en s'appuyant sur la théorie des perturbations singulières (Kokotović et al., 1999), que pour  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , 1) les pôles introduits par la stratégie de pseudo-dérivation de  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_{\text{vel,a}})(\boldsymbol{\theta}_e)$  approchent l'infini, tandis que les pôles restant tendent vers ceux de  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  et 2)  $T_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_{\text{vel,a}})(\boldsymbol{\theta}_e)$  converge en norme  $H_\infty$  vers  $T(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$ .

Cependant, d'un point de vue pratique, prendre  $\varepsilon$  arbitrairement proche de  $0^+$  n'est pas viable. En effet, diminuer fortement  $\varepsilon$  implique d'augmenter la fréquence d'échantillonnage à laquelle le contrôleur doit être discrétisé. Qui plus est, une telle stratégie, dû à la composante de pseudo-dérivation, pose des problèmes liés à l'amplification des bruits de mesures. D'un côté  $\varepsilon$  doit donc être choisit suffisamment petit pour approximer de manière satisfaisante le comportement du *velocity-based algorithm*, mais doit d'un autre côté être pris suffisamment grand de manière à éviter des problèmes pratiques d'implémentation.

### 5.2.2.2 Application à l'exemple illustratif

On reprend l'exemple illustratif de la Sous-Section 5.2.1.1 pour lui appliquer la stratégie de pseudo-dérivation dans l'implémentation du *velocity-based algorithm*. En particulier, l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  donnée par (5.16) est modifiée de manière à éviter le recours explicite à  $\dot{x}_1$  et  $\dot{y} = \dot{x}_2$ . Plus spécifiquement, on considère l'implémentation illustrée à la Fig. 5.7 et donnée par :

$$\mathcal{C}_{\text{vel,a}} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_{x_1,f} = -\varepsilon^{-1}x_{x_1,f} + \varepsilon^{-1}x_1 \\ \dot{x}_{y,f} = -\varepsilon^{-1}x_{y,f} + \varepsilon^{-1}y \\ v = \varepsilon k_i(y)[r - y] + k_1(y)[x_1 - x_{x_1,f}] + k_2(y)[y - x_{y,f}] \\ \dot{u} = \varepsilon^{-1}v \end{cases} \quad (5.34)$$

La fonction de transfert du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_{\text{vel,a},l}(\boldsymbol{\theta}_e)$ , obtenu par linéarisation de  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$  au point de fonctionnement  $\boldsymbol{\theta}_e = \boldsymbol{y}_e \in \mathbb{R}$ , est alors donnée par :

$$\Delta u = \frac{k_i(\boldsymbol{\theta}_e)}{s} (\Delta r - \Delta y) + \frac{k_1(\boldsymbol{\theta}_e)}{\varepsilon s + 1} \Delta x_1 + \frac{k_2(\boldsymbol{\theta}_e)}{\varepsilon s + 1} \Delta y. \quad (5.35)$$

On en déduit, en utilisant les gains du contrôleur donnés par (3.16), que la fonction de transfert du système en boucle fermée  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel,a}})(\boldsymbol{\theta}_e)$  liant l'entrée de référence  $\delta r$  à la

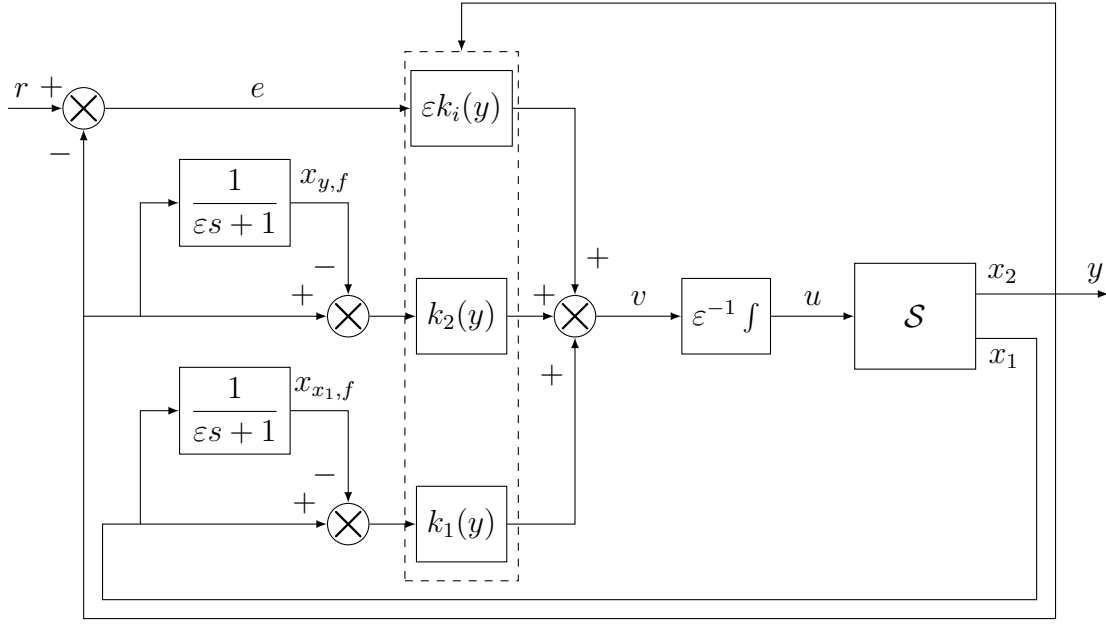


Figure 5.7 Exemple 1 - Architecture du système non linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel,a}})$  basée sur l'implémentation *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation des entrées

sortie  $\delta y$ , est donnée par :

$$T_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel,a}})(\theta_e) = \frac{(\varepsilon s + 1)(-s/(1 + \theta_e^2) + 1)}{\varepsilon s^4 + (1 - \varepsilon(1 + \theta_e^2))s^3 + (2 - \varepsilon(1/(1 + \theta_e^2) + 1))s^2 + (2 + \varepsilon)s + 1}. \quad (5.36)$$

Cette fonction de transfert est à comparer à celle obtenue lors du design donnée par (3.17). En prenant  $\varepsilon = 0$  dans (5.36), on retrouve exactement la fonction de transfert (3.17) initialement employée. L'impact de la valeur de  $\varepsilon > 0$  sur la position des pôles dans le plan complexe est illustré sur le lieu des racines de la Fig 5.8 pour  $\theta_e = 0.5$ . On note que lorsque  $\varepsilon \rightarrow 0^+$ , la valeur des trois pôles désirés en boucle fermée est asymptotiquement respectée et que l'on a la présence d'un pôle réel supplémentaire qui tend vers  $-\infty$ . Cependant, lorsque la valeur de  $\varepsilon$  croît, les pôles s'éloignent de leur position désirée et le pôle réel du filtre croît, interférant ainsi dans la dynamique du système en boucle fermée. Lorsque  $\varepsilon$  passe approximativement la valeur de 0.31, le système bouclé, au point d'opération  $\theta_e = 0.5$ , devient instable avec les pôles complexes conjugués qui migrent dans le demi-plan droit.

Bien que faire tendre  $\varepsilon$  vers  $0^+$  permet de retrouver pour un point de fonctionnement  $\theta_e \in \Theta$  donné les caractéristiques de l'implémentation *velocity-based algorithm*, ce résultat ne tient en général pas de manière uniforme sur le domaine d'opération  $\Theta$ . En effet, sur la base du critère de Routh-Hurwitz, une condition nécessaire quant à la stabilité de la fonction de

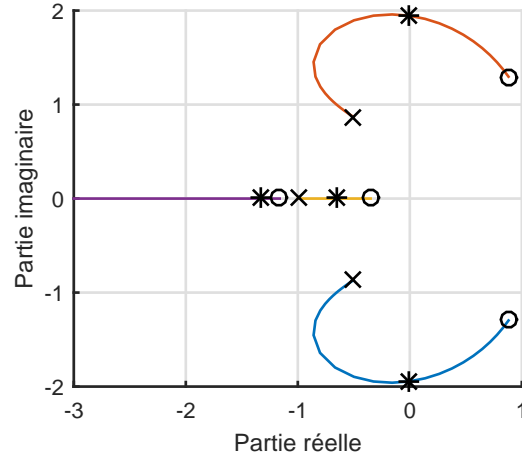


Figure 5.8 Exemple 1 - Lieu des racines pour  $\theta_e = 0.5$  illustrant l'impact du paramètre de pseudo-dérivation pour l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$  sur la position des pôles en boucle fermée lorsque  $\varepsilon \in [0.001, 1]$  ; les symboles "croix", "étoile" et "rond" correspondent respectivement à  $\varepsilon = 0.001$ ,  $\varepsilon = 0.31$  et  $\varepsilon = 1$

transfert (5.36) est  $0 < \varepsilon < 1/(1 + \theta_e^2)$ . Dès lors, on ne peut trouver une valeur unique  $\varepsilon_0 \in \mathbb{R}_+^*$  permettant de garantir la stabilité du système bouclé pour tout point d'opération  $\theta_e = y_e \in \mathbb{R}$ . La mise en œuvre de la stratégie de pseudo-dérivation ne peut donc être effectuée que sur une plage de fonctionnement bornée du domaine d'opération  $\Theta = \mathbb{R}$  d'origine.

Afin d'évaluer l'impact du choix de la valeur de  $\varepsilon$  sur le comportement du système bouclé, des résultats de simulation sont présentés pour l'implémentation de la Fig. 5.7. Les résultats sont comparés à ceux obtenus pour l'implémentation d'origine du *velocity-based algorithm* telle que illustrée à la Fig. 5.3(c) qui fait ici office d'implémentation de référence. Les résultats obtenus sont donnés à la Fig. 5.9, venant confirmer les tendances précédemment énoncées.

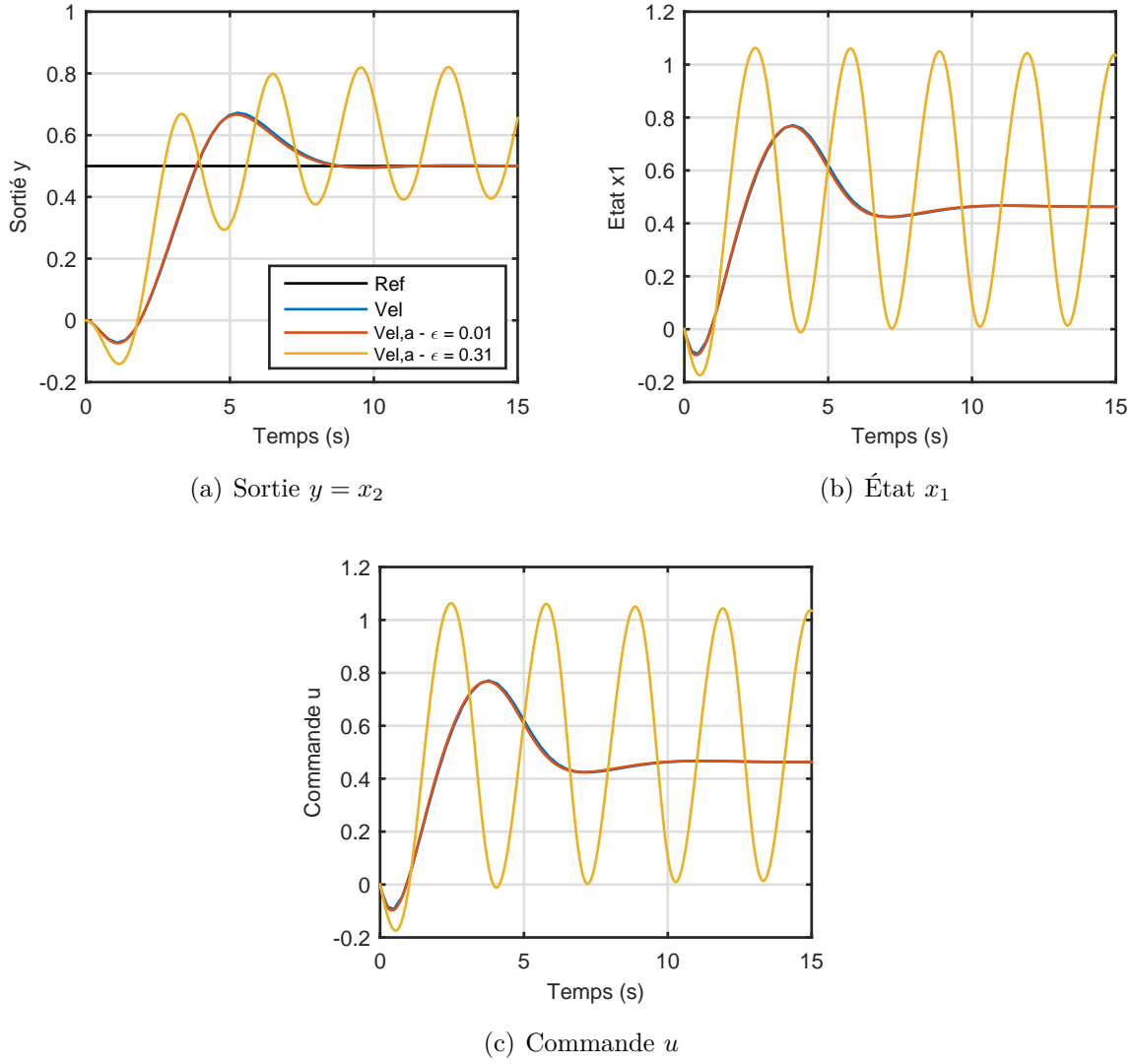


Figure 5.9 Comparaison de la réponse du système en boucle fermée pour l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{vel}$  et pour l'approche par pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{vel,a}$  pour  $\varepsilon = 0.01$  et  $\varepsilon = 0.31$

### 5.3 Implémentation évitant le recours à la dérivée temporelle du signal de sortie

Sur la base des éléments présentés à la Section 5.2, on propose dans cette section une alternative à l'implémentation *velocity-based algorithm* de manière à résoudre le Problème 5.1. La stratégie proposée ici a fait l'objet d'une publication scientifique dans *International Journal of Control* (Lhachemi et al., 2017e).

### 5.3.1 D'une stratégie de pseudo-dérivation vers l'utilisation de modes cachés

On se propose dans un premier temps de réinterpréter la stratégie de pseudo-dérivation précédemment employée sous l'angle plus général des stratégies de filtrage des signaux du contrôleur. Par la suite, on montre dans le cadre de l'exemple illustratif précédemment traité comment de telles stratégies de filtrage peuvent être mises en œuvre afin de résoudre le Problème 5.1.

#### 5.3.1.1 Réinterprétation de la stratégie de pseudo-dérivation en une stratégie de filtrage

Préalablement à l'introduction détaillée de la stratégie d'implémentation, il est intéressant de revisiter l'implémentation *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$ . Pour cela, repartons de l'implémentation *velocity-based algorithm* d'origine  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ . Comme cela a été vu à la Sous-Section 5.2.1, l'émergence des TCC est évitée du fait que la dérivée temporelle du signal de mesure est nul à l'équilibre. Bien que la stratégie de pseudo-dérivation parvienne également à éviter l'apparition des TCC, la raison fondamentale diffère. Pour montrer cela, notons  $\mathcal{F}$  le système LTI associé à la fonction de transfert  $F(s) = 1/(\varepsilon s + 1)$ , ainsi que  $\mathcal{I}$  l'opérateur identité. Dans ce cas, l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$  donnée par (5.31) peut se réécrire sous la forme :

$$\mathcal{C}_{\text{vel,a}} = \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \varepsilon\mathbf{A}_i(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] + \mathbf{B}_r(\boldsymbol{\theta})[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{r} + \mathbf{B}_1(\boldsymbol{\theta})[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{y}_1 + \mathbf{B}_2(\boldsymbol{\theta})[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \varepsilon\mathbf{C}_i(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{y}_1] + \mathbf{D}_r(\boldsymbol{\theta})[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{r} + \mathbf{D}_1(\boldsymbol{\theta})[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{y}_1 + \mathbf{D}_2(\boldsymbol{\theta})[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{u}} = \varepsilon^{-1}\mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.37)$$

De la sorte, l'approche par pseudo-dérivation est réinterprétée sous la forme du filtrage des signaux d'entrée du contrôleur. En particulier, pour  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{r}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$ ,  $[\mathcal{I} - \mathcal{F}]\mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathcal{F}\mathbf{z}$  représente l'erreur entre le signal d'origine et sa version filtrée. Le point crucial quant à l'annulation des TCC réside donc dans le fait que, sous réserve de satisfaction des Hypothèses 5.1, le gain statique associé à l'opérateur  $\mathcal{I} - \mathcal{F}$  doit être nul. Ceci revient à imposer que le gain statique du filtre  $\mathcal{F}$  soit unitaire, ce qui est le cas de l'approche par pseudo-dérivation puisque  $F(0) = 1$ .

Ainsi, le problème de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$  réside dans le fait que la stratégie de filtrage employée permet certes d'éviter l'émergence des TCC mais, comme cela a été vu dans la Sous-Section 5.2.2, introduit une dynamique résiduelle liée aux composantes de filtrage venant parasiter la dynamique du système en boucle fermée. Dès lors, en adoptant une stratégie d'implémentation basée sur le recours à des filtres unitaires au niveau des entrées du contrô-



leur, le Problème 5.1 de l'implémentation de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  visant à éviter l'émergence des TCC est transformé en un problème de sélection des composantes de filtrage dans le but de préserver le comportement entrée-sortie et les propriétés de stabilité interne du système en boucle fermée.

### 5.3.1.2 Exemple illustratif

Afin d'introduire de manière intuitive l'implémentation proposée dans cette section, on reprend l'étude de l'exemple académique étudié de la Sous-Section 5.2.2.2. La dynamique du contrôleur implémenté via le *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation donne lieu au point d'opération  $\theta_e$  à la fonction de transfert :

$$\Delta u = \frac{\Delta v}{\varepsilon s} = \frac{k_i(\theta_e)}{s} (\Delta r - \Delta y) + \frac{k_1(\theta_e)}{\varepsilon s + 1} \Delta x_1 + \frac{k_2(\theta_e)}{\varepsilon s + 1} \Delta y. \quad (5.38)$$

On raisonne dans un premier temps directement sur la dynamique linéarisée du contrôleur sur la base de la fonction de transfert précédente. Dans le but de s'affranchir de la contribution parasite du pôle localisé en  $-1/\varepsilon$ , on suggère de modifier la composante intégrale de l'implémentation d'origine  $\Delta u/\Delta v = 1/(\varepsilon s)$  par la composante de filtrage  $\Delta u/\Delta v = (\varepsilon s + 1)/(\varepsilon s)$ . On obtient alors :

$$\Delta u = \frac{\varepsilon s + 1}{\varepsilon s} \Delta v = k_i(\theta_e) \frac{\varepsilon s + 1}{s} (\Delta r - \Delta y) + k_1(\theta_e) \Delta x_1 + k_2(\theta_e) \Delta y. \quad (5.39)$$

De la sorte,  $-1/\varepsilon$  devient un pôle caché stable du contrôleur. Cependant, cette stratégie introduit un zéro en  $-1/\varepsilon$  au niveau de la composante intégrale. Afin d'éviter cela, au lieu d'injecter le signal d'erreur  $\Delta r - \Delta y$  dans le contrôleur, on injecte leur composantes filtrées par l'intermédiaire du filtre  $1/(\varepsilon s + 1)$ , i.e., que l'on injecte le signal  $\Delta x_{r,f} - \Delta x_{y,f} = (\Delta r - \Delta y)/(\varepsilon s + 1)$ . De la sorte, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta u &= k_i(\theta_e) \frac{\varepsilon s + 1}{s} (\Delta x_{r,f} - \Delta x_{y,f}) + k_1(\theta_e) \Delta x_1 + k_2(\theta_e) \Delta y \\ &= k_i(\theta_e) (\Delta r - \Delta y) + k_1(\theta_e) \Delta x_1 + k_2(\theta_e) \Delta y. \end{aligned} \quad (5.40)$$

On retrouve bien la fonction de transfert associée au contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$ , donnée par (3.14), originellement employée pour ajuster les gains du contrôleur.

On suggère alors le recours à l'implémentation suivante telle que illustrée à la Fig. 5.10 :

$$\mathcal{C}_{\text{vel}+} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_{r,f} = -\tau^{-1}x_{r,f} + \tau^{-1}r \\ \dot{x}_{x_1,f} = -\tau^{-1}x_{x_1,f} + \tau^{-1}x_1 \\ \dot{x}_{y,f} = -\tau^{-1}x_{y,f} + \tau^{-1}y \\ v = \tau k_i(y)[x_{r,f} - x_{y,f}] + k_1(y)[x_1 - x_{x_1,f}] + k_2(y)[y - x_{y,f}] \\ \dot{x}_{v,f} = \tau^{-1}v \\ u = x_{v,f} + v \end{cases} \quad (5.41)$$

où  $\tau > 0$  est un paramètre de filtrage.

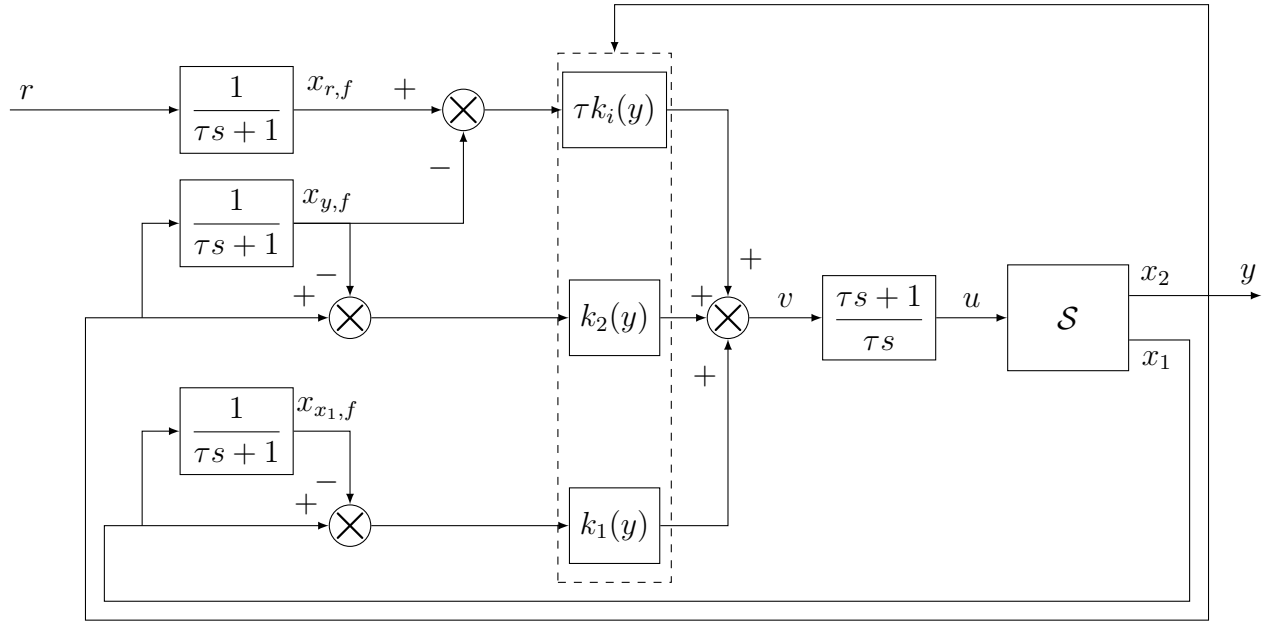


Figure 5.10 Exemple 1 - Architecture du système non linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})$  basée sur l'implémentation d'une version modifiée du *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation du contrôleur séquencé.

De la sorte, l'ensemble des entrées du système sont pré-filtrées avec un premier ordre dont le pôle est localisé en  $-1/\tau$ . Cette stratégie de pré-filtrage doit permettre d'éviter l'émergence des TCC mais va introduire un pôle en  $-1/\tau$  qui aura une contribution parasite sur la dynamique du contrôleur. Afin de s'en affranchir, une stratégie de post-filtrage est mise en œuvre pour générer l'entrée de commande  $u$  du système. En particulier, le post-filtrage introduit un zéro en  $-1/\tau$  qui vise à compenser, du point de vue de la fonction de transfert du contrôleur calculée au point d'opération  $\theta_e$ , le pôle en  $-1/\tau$  introduit lors du pré-filtrage. On

espère ainsi que le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  permette, lorsque linéarisé au point d'opération  $\theta_e$  et après passage à la transformée de Laplace, de retrouver la fonction de transfert (3.14) du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  d'origine.

La validation de manière rigoureuse de cette stratégie d'implémentation quant à la résolution du Problème 5.1 sera discutée dans le cadre général dans les prochaines sous-sections. Pour l'instant, on se contente d'effectuer une validation numérique. Pour cela, on cherche dans un premier temps à vérifier que pour un point d'opération  $\theta_e = y_e \in \mathbb{R}$  fixée, la linéarisation numérique effectuée en ce point à l'aide de MATLAB de la dynamique du système bouclée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})$  permet de retrouver la fonction de transfert (3.17) obtenue lors du design de la famille de contrôleurs  $\mathcal{C}_l$ . Pour cela, le schéma de la Fig. 5.10 est réalisé sous SIMULINK. En utilisant les fonctions `trim` puis `linmod` de MATLAB, on procède à la recherche d'un point d'équilibre du système bouclé puis on procède à la linéarisation associée. En appliquant cette procédure pour, e.g.,  $\theta_e = y_e = 0.5$  et en fixant le paramètre de filtrage à  $\tau = 0.1$ , les pôles du système en boucle fermée sont donnés, avec multiplicité, par  $-0.500 \pm 0.866i$ ,  $-1.000$ ,  $-10.000$ ,  $-10.000$  et  $-10.000$ . Les trois premiers pôles correspondent au placement de pôles initialement effectué, i.e.,  $-0.5 \pm \sqrt{3}/2i$  et  $-1$ , alors que les trois pôles localisés en  $-10$  correspondent aux pôles introduits par la stratégie de pré-filtrage en  $-1/\tau = -10$ . De plus, la fonction de transfert du système obtenue numériquement est donnée, avant et après simplification via la commande MATLAB `minreal`, par :

$$T_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})(0.5) = \frac{(-0.8s + 1)(s + 10)^3}{(s^2 + s + 1)(s + 1)(s + 10)^3} = \frac{-0.8s + 1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1} \quad (5.42)$$

On retrouve bien la fonction de transfert  $T(\mathcal{S}_l(0.5), \mathcal{C}_l(0.5))$  donnée par (3.17) initialement obtenue lors du design. En particulier, le pôle en  $-1/\tau = -10$  introduit par la stratégie de pré-filtrage fait bien partie des modes cachés stables du système en boucle fermée. Un résultat analogue étant observé pour toutes les valeurs testées de  $\theta_e \in \Theta = \mathbb{R}$  et de  $\tau > 0$ , l'évaluation numérique des propriétés de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  tendent à valider la stratégie de pré/post-filtrage précédemment introduite.

Finalement, on évalue en simulation la réponse du système  $\mathcal{S}$  lorsque placé en boucle fermée avec  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  en la comparant aux résultats obtenus avec les implémentations précédentes  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  et  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$ . Les résultats de simulation obtenus sont illustrés à la Fig. 5.11.

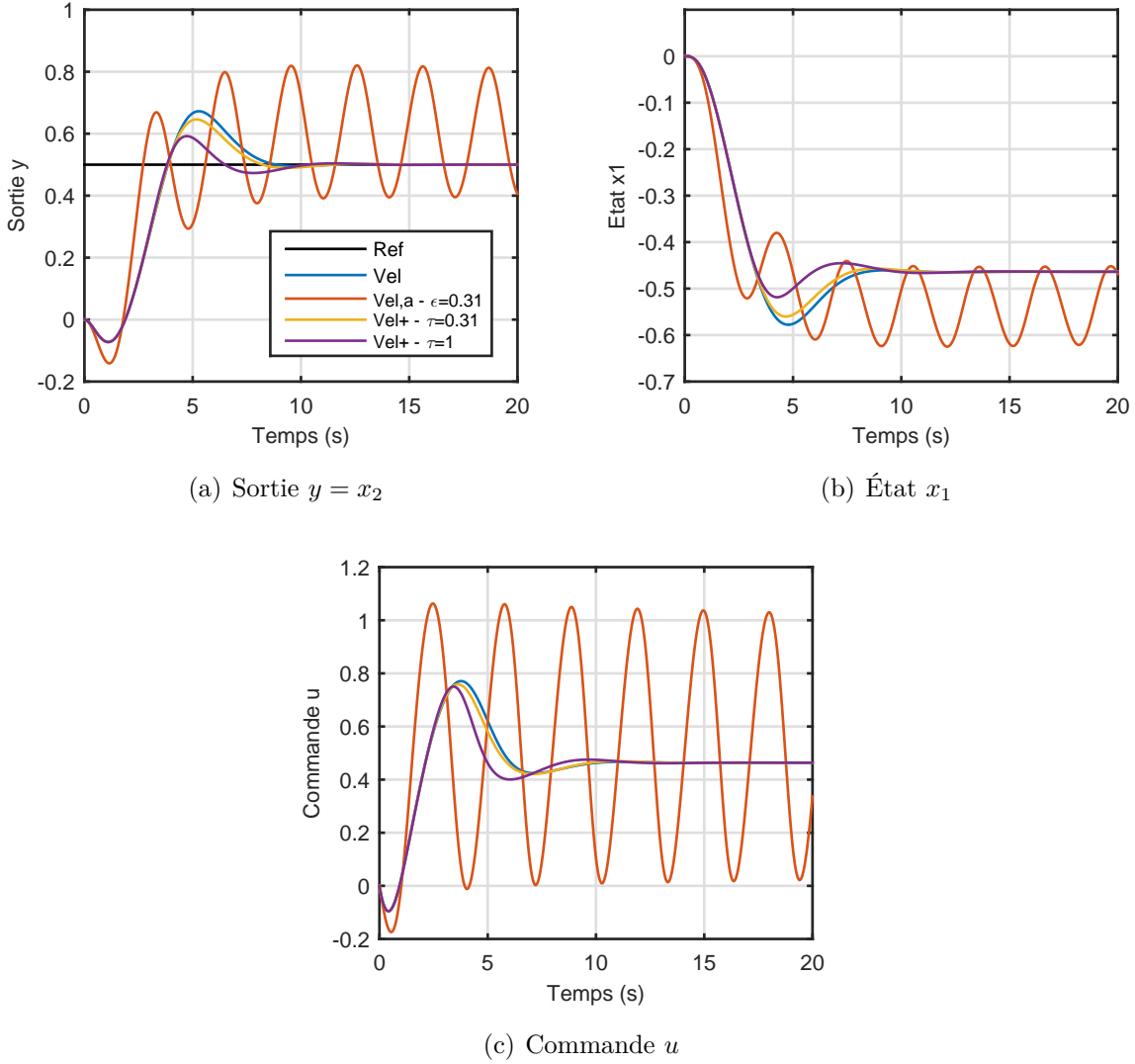


Figure 5.11 Comparaison de la réponse du système en boucle fermée pour l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  pour  $\tau = 0.31$  et  $\tau = 1$  avec l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  et son approximation par pseudo-dérivation pour  $\epsilon = 0.31$

L'implémentation avec pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  pour  $\epsilon = 0.31$  aboutit en un système bouclé à la limite de l'instabilité (Fig. 5.11(a)). *A contrario*, lorsque l'on considère l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  pour un paramètre de filtrage fixé à  $\tau = 0.31$ , on observe que le système en boucle fermée a un comportement adéquat, très proche de celui observé avec l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ , autant au niveau de la sortie  $y = x_2$  (Fig. 5.11(a)) que de l'état  $x_1$  (Fig. 5.11(b)) et de la commande  $u$  (Fig. 5.11(c)). Même dans le cas de valeurs plus grandes du paramètre de filtrage  $\tau$ , le système en boucle fermée présente toujours un comportement adéquat. Cela est illustré à la Fig. 5.11 pour  $\tau = 1$ . Ce bon comportement, en dépit d'un

paramètre de filtrage plus important, est la conséquence directe du fait que l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ , contrairement à l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$ , préserve le placement de pôles initialement effectué lors du design des gains du contrôleur séquentiel (ainsi que la fonction de transfert du contrôleur) indépendamment de la valeur sélectionnée pour le paramètre de filtrage.

### 5.3.2 Proposition d'une implémentation améliorée

On généralise à présent l'intuition précédente de manière à proposer une implémentation alternative au *velocity-based algorithm*. On considère la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ , définie par (5.6) et synthétisée de manière à stabiliser le système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  en tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ . On propose l'implémentation du contrôleur séquentiel caractérisé par (5.43) et illustré à la Fig. 5.12, où  $\tau > 0$  est un paramètre de design.

$$\mathcal{C}_{\text{vel}+} \triangleq \left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}_{r,f} = -\tau^{-1}\mathbf{x}_{r,f} + \tau^{-1}\mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{x}}_{y_1,f} = -\tau^{-1}\mathbf{x}_{y_1,f} + \tau^{-1}\mathbf{y}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}_{y_2,f} = -\tau^{-1}\mathbf{x}_{y_2,f} + \tau^{-1}\mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \tau\mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \\ \quad + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta})\mathbf{x}_c + \tau\mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \\ \quad + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \dot{\mathbf{x}}_{v,f} = \tau^{-1}\mathbf{v} \\ \mathbf{u} = \mathbf{x}_{v,f} + \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{array} \right. \quad (5.43)$$

Pour des raisons de lisibilité, la dépendance des matrices du contrôleur relativement au point d'opération courant  $\boldsymbol{\theta}$  a été omise au niveau de la Fig. 5.12. Plusieurs remarques se dégagent :

- Chaque entrée  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{r}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2\}$  du contrôleur est pré-filtrée par un filtre passe-bas  $1/(\tau s + 1)$ , donnant lieu au signal  $\mathbf{x}_{z,f}$ . Ainsi, le signal d'erreur  $\mathbf{z} - \mathbf{x}_{z,f}$  utilisé pour la stratégie de contrôle est essentiellement constitué des composantes moyennes et hautes fréquences du signal d'entrée  $\mathbf{z}$ . Intuitivement, pour un signal  $\mathbf{z}$  évoluant dans le voisinage de sa valeur d'équilibre  $\mathbf{z}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ , on s'attend à ce que  $\mathbf{x}_{z,f} \approx \mathbf{z}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ , et donc que  $\mathbf{z} - \mathbf{x}_{z,f} \approx \mathbf{z} - \mathbf{z}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ . On retrouve la situation d'un contrôleur LTI classique (non séquentiel) à implémenter autour d'un point d'équilibre donné d'un système non linéaire.
- Le signal basse fréquence  $\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}$  est utilisé à des fins de suivi de référence. Il est montré par la suite qu'il permet de garantir que la condition d'équilibre  $\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e)$  est bien

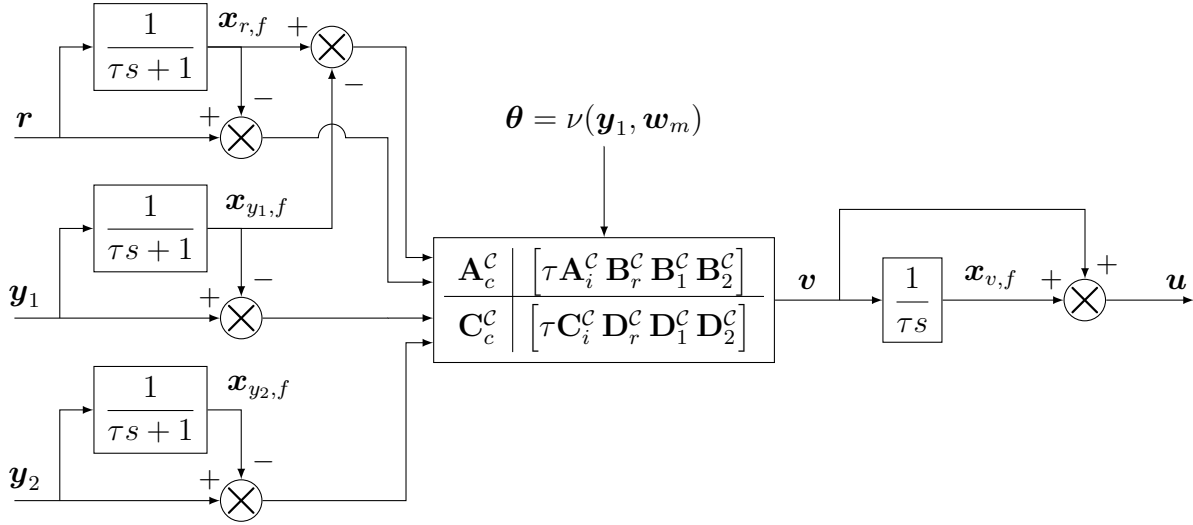


Figure 5.12 Architecture de l'implémentation améliorée d'un contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$

satisfaite.

- La commande est générée par une stratégie de post-filtrage. À l'équilibre, le signal  $\mathbf{v}$  est nul, i.e.,  $\mathbf{v}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$ . Ainsi, la valeur du signal de sortie  $\mathbf{u}$  en régime permanent  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  est obtenue par la stratégie de post-filtrage par l'intermédiaire de la composante intégrale.
- Le paramètre de filtrage  $\tau$  est impliqué à la fois dans la dynamique de l'état du contrôleur  $\mathbf{x}_c$  et dans l'équation de  $\mathbf{v}$ . Il y intervient en tant que facteur multiplicatif des matrices  $\mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta})$  et  $\mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta})$ . Il est montré dans la prochaine sous-section que ce facteur multiplicatif est nécessaire afin de préserver les propriétés entrée-sortie du système bouclé.
- Comme dans le cas de l'implémentation *velocity-based implementation*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ , l'implémentation proposée  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  ne requiert pas d'implémenter des conditions d'équilibre du système non linéaire  $\mathcal{S}$  à contrôler (e.g.,  $\mathbf{u}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et  $\mathbf{y}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ). On évite de la sorte les problèmes de robustesse tels que présentés à la fin de la Sous-Section 4.1.3.2.

### 5.3.3 Propriétés de l'implémentation

Afin d'établir les propriétés de l'implémentation améliorée du *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ , on formule les hypothèses suivantes.

**Hypothèse 5.2 (Hypothèses de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ )** Dans le contexte du contrôle du système  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  caractérisé par (5.1) avec l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  définie par (5.43), on suppose que :

- (H1) les coefficients des matrices  $\mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}), \dots, \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta})$  du contrôleur sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^1$  de la variable de séquencement  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  ;

(H2) pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ , la matrice

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \\ \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n_c+m) \times (n_c+p_1)} \quad (5.44)$$

est de colonne rang plein ;

(H3) la dimension de l'entrée de contrôle du système  $\mathbf{u}$  coïncide avec celle du signal de référence  $\mathbf{r}$ , i.e,  $m = p_1$  ;

(H4) pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ , la représentation d'état du contrôleur  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  caractérisée par  $(\mathcal{A}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{B}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{D}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  telle qu'introduite par (5.8) est stabilisable et détectable.

L'hypothèse (H1), commune aux deux implémentations, est une hypothèse de régularité visant à assurer l'existence de dynamiques linéarisées. L'hypothèse (H3) implique pour  $\mathcal{C}_l(\theta)$  que le nombre de composantes intégrales coïncide avec la dimension du signal de référence  $\mathbf{r}$ . Combinée avec l'hypothèse (H2), cela implique que la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est carrée et inversible. Les hypothèses (H2) et (H3) coïncident avec les Hypothèses 5.1 de l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ . L'hypothèse (H4), bien que non formulée de manière explicite pour  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$ , est une hypothèse généralement implicitement formulée signifiant que les éventuels modes cachés de la dynamique du contrôleur sont stables. On cherche ainsi à éviter l'introduction de modes cachés qui soient instables.

### 5.3.3.1 Propriétés portant sur le comportement entrée-sortie

Le théorème suivant porte sur le comportement entrée-sortie du système bouclé.

**Théorème 5.1** *Supposons que (H1) et (H2) de l'Hypothèse 5.2 sont vérifiées pour le contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  donné par (5.43). Alors, pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et toute configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ , les fonctions de transfert en boucle fermée  $T_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_{\text{vel}+})(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $T(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  coïncident.*

En d'autres termes, le Théorème 5.1 assure que la fonction de transfert obtenue en linéarisation au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  le système bouclé composé du système non linéaire  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta})$  et du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  coïncide avec la fonction de transfert du système bouclé composé du système linéarisé  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$ . En ce sens, la stratégie d'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  proposée permet de préserver les propriétés entrée-sortie du système bouclé tel qu'obtenu lors du design de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ .

**Démonstration.** Fixons pour le reste de la preuve un point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  et une configuration incertaine  $\delta \in \Delta$  quelconques. L'équilibre du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ , lorsque placé en boucle fermée avec le système non linéaire  $\mathcal{S}(\delta)$ , est caractérisé par les équations suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{r,f,e}(\theta_e, \delta) = r_e(\theta_e, \delta) \\ x_{y_1,f,e}(\theta_e) = y_{1,e}(\theta_e) \\ x_{y_2,f,e}(\theta_e, \delta) = y_{2,e}(\theta_e, \delta) \\ \mathbf{0} = \mathbf{A}_c^C(\theta_e) x_{c,e}(\theta_e, \delta) + \tau \mathbf{A}_i^C(\theta_e) [r_e(\theta_e, \delta) - y_{1,e}(\theta_e)] \\ \mathbf{0} = \mathbf{C}_c^C(\theta_e) x_{c,e}(\theta_e, \delta) + \tau \mathbf{C}_i^C(\theta_e) [r_e(\theta_e, \delta) - y_{1,e}(\theta_e)] \\ \mathbf{0} = v_e(\theta_e, \delta) \\ u_e(\theta_e, \delta) = x_{v,f,e}(\theta_e, \delta) \end{array} \right. \quad (5.45)$$

En particulier, on obtient que :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^C(\theta_e) & \mathbf{A}_i^C(\theta_e) \\ \mathbf{C}_c^C(\theta_e) & \mathbf{C}_i^C(\theta_e) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{c,e}(\theta_e, \delta) \\ \tau [r_e(\theta_e, \delta) - y_{1,e}(\theta_e)] \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.46)$$

Sur la base de l'hypothèse (H2), il s'en suit que  $r_e(\theta_e, \delta) = y_{1,e}(\theta_e)$ ,  $x_{c,e}(\theta_e, \delta) = \mathbf{0}$ . Dès lors, le signal de référence à l'équilibre est indépendant de la configuration incertaine  $\delta$  et sera donc noté par la suite  $r_e(\theta_e) = y_{1,e}(\theta_e)$ . On obtient ainsi, tout du moins à l'équilibre, le suivi de référence souhaité.

Afin de prouver que les fonctions de transfert  $T_l(\mathcal{S}(\delta), \mathcal{C}_{\text{vel}+})(\theta_e)$  et  $T(\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  sont égales, il est suffisant de montrer que la fonction de transfert résultant de la linéarisation du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  au point d'opération  $\theta_e$  coïncide avec celle obtenue sur la base de  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donnée par (5.6). À cette fin, la première étape est de calculer la dynamique linéarisée du contrôleur séquencé  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  donnée par (5.43). Pour le point d'opération  $\theta_e$  et la configuration incertaine  $\delta$ , les déviations des signaux du contrôleur séquencé  $x_{r,f}$ ,  $x_{y_1,f}$ ,  $x_{y_2,f}$ ,  $x_c$ ,  $v$  et  $x_{v,f}$  de leur valeur d'équilibre respective précédemment définies sont notées  $\delta x_{r,f}$ ,  $\delta x_{y_1,f}$ ,  $\delta x_{y_2,f}$ ,  $\delta x_c$ ,  $\delta v$  et  $\delta x_{v,f}$ . La linéarisation des composantes de pré/post-filtrage



donne lieu aux dynamiques suivantes :

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_{r,f} = -\tau^{-1} \delta \mathbf{x}_{r,f} + \tau^{-1} \delta \mathbf{r} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_{y_1,f} = -\tau^{-1} \delta \mathbf{x}_{y_1,f} + \tau^{-1} \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_{y_2,f} = -\tau^{-1} \delta \mathbf{x}_{y_2,f} + \tau^{-1} \delta \mathbf{y}_2 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_{v,f} = \tau^{-1} \delta \mathbf{v} \\ \delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{x}_{v,f} + \delta \mathbf{v} \end{cases} \quad (5.47)$$

Sur la base de (H1), la linéarisation de la dynamique de  $\mathbf{x}_c$  est donnée par :

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathbf{x}}_c &= \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_c + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{A}_c^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \mathbf{x}_c \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{A}_c^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \mathbf{x}_c \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\ &+ \tau \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{x}_{r,f} - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{A}_i^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\ &+ \tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{A}_i^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\ &+ \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{x}_{r,f}] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{B}_r^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{B}_r^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\ &- \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_{y_1,f} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{B}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{B}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\ &- \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_{y_2,f} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{B}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_2} \left[ \mathbf{B}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_2 \\ &+ \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{B}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \end{aligned} \quad (5.48)$$

alors que la linéarisation de l'équation produisant  $\mathbf{v}$  est donnée par :

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{v} = & \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_c + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{C}_c^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \mathbf{x}_c \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{C}_c^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \mathbf{x}_c \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\
& + \tau \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{x}_{r,f} - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{C}_i^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\
& + \tau \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{C}_i^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\
& + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{x}_{r,f}] + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{D}_r^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{D}_r^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\
& - \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_{y_1,f} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{D}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{D}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m \\
& - \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_{y_2,f} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{D}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_1 \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_2} \left[ \mathbf{D}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{y}_2 \\
& + \frac{\partial}{\partial \mathbf{w}_m} \left[ \mathbf{D}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e \delta \mathbf{w}_m
\end{aligned} \tag{5.49}$$

où les dérivées partielles sont évaluées au point d'équilibre associé au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ . Afin de simplifier les équations (5.48) et (5.49), on remarque que pour  $\mathbf{z} \in \{\mathbf{y}, \mathbf{w}_m\}$  on a :

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left[ \mathbf{A}_c^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \mathbf{x}_c \right] \Big|_e = \sum_{k=1}^{n_c} \mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})(k) \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left[ \mathbf{A}_{c,C_k}^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \right] \Big|_e = \mathbf{0} \tag{5.50}$$

dû au fait que  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$ . Dans l'équation (5.50),  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})(k)$  représente la  $k$ -ième composante du vecteur  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ , tandis que  $\mathbf{A}_{c,C_k}^c$  dénote la  $k$ -ième colonne de la matrice  $\mathbf{A}_c^c$ . En procédant de manière identique, tirant profit du fait que  $\mathbf{x}_{r,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{x}_{y_1,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{x}_{r,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e) - \mathbf{x}_{y_1,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{x}_{y_2,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$ , l'ensemble des dérivées intervenant dans les équations (5.48) et (5.49) sont nulles à l'exception des quatre dérivées partielles suivantes :  $(\partial/\partial \mathbf{y}_1) \left[ \mathbf{B}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e$ ,  $(\partial/\partial \mathbf{y}_1) \left[ \mathbf{D}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e$ ,  $(\partial/\partial \mathbf{y}_2) \left[ \mathbf{B}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e$  et  $(\partial/\partial \mathbf{y}_2) \left[ \mathbf{D}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e$ . Par exemple, la première dérivée partielle peut être

évaluée comme suit :

$$\begin{aligned}
& \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{B}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \right|_e \\
&= \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \sum_{k=1}^{p_1} [\mathbf{y}_1(k) - \mathbf{x}_{y_1,f}(k)] \mathbf{B}_{1,C_k}^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \right] \right|_e \\
&= \sum_{k=1}^{p_1} \left\{ \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ [\mathbf{y}_1(k) - \mathbf{x}_{y_1,f}(k)] \mathbf{B}_{1,C_k}^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \right|_e \right. \\
&\quad \left. + \underbrace{[\mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)(k) - \mathbf{x}_{y_1,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e)(k)]}_{=0} \left. \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}_1} \left[ \mathbf{B}_{1,C_k}^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) \right] \right|_e \right\} \\
&= \sum_{k=1}^{p_1} [\mathbf{0} | \dots | \mathbf{0} | \underbrace{\mathbf{B}_{1,C_k}^c(\boldsymbol{\theta}_e)}_{k\text{-ième colonne}} | \mathbf{0} | \dots | \mathbf{0}] \\
&= \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e)
\end{aligned} \tag{5.51}$$

Un calcul similaire montre que les trois dérivées partielles restantes deviennent après simplification :

$$(\partial/\partial \mathbf{y}_1) \left[ \mathbf{D}_1^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y_1,f}] \right] \Big|_e = \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e), \tag{5.52a}$$

$$(\partial/\partial \mathbf{y}_2) \left[ \mathbf{B}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e = \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e), \tag{5.52b}$$

$$(\partial/\partial \mathbf{y}_2) \left[ \mathbf{D}_2^c(\nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m)) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y_2,f}] \right] \Big|_e = \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e). \tag{5.52c}$$

Ainsi, les équations (5.48) et (5.49) se simplifient sous la forme :

$$\begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_c + \tau \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{x}_{r,f} - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{x}_{r,f}] \\ \quad + \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{y}_1 - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{y}_2 - \delta \mathbf{x}_{y_2,f}] \\ \delta \mathbf{v} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) \delta \mathbf{x}_c + \tau \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{x}_{r,f} - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{x}_{r,f}] \\ \quad + \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{y}_1 - \delta \mathbf{x}_{y_1,f}] + \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) [\delta \mathbf{y}_2 - \delta \mathbf{x}_{y_2,f}] \end{cases} \tag{5.53}$$

L'objectif de la stratégie de pré-filtrage est bien atteint dans la mesure où elle a permis d'éviter l'émergence de TCC. Il s'agit à présent de vérifier si le comportement entrée-sortie du contrôleur linéarisé est bien fidèle à la dynamique LTI d'origine  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  donnée par (3.40). Pour cela, on calcule la fonction de transfert de la dynamique linéarisée du contrôleur au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ . Sur la base des trois premières lignes de (5.47), les fonctions de transfert des composantes de pré-filtrage sont données par :

$$\Delta \mathbf{x}_{r,f} = \frac{1}{\tau_S + 1} \Delta \mathbf{r}, \quad \Delta \mathbf{x}_{y_1,f} = \frac{1}{\tau_S + 1} \Delta \mathbf{y}_1, \quad \Delta \mathbf{x}_{y_2,f} = \frac{1}{\tau_S + 1} \Delta \mathbf{y}_2, \tag{5.54}$$

où  $\Delta \mathbf{u}$ ,  $\Delta \mathbf{v}$ ,  $\Delta \mathbf{r}$ ,  $\Delta \mathbf{y}_1$ ,  $\Delta \mathbf{y}_2$ ,  $\Delta \mathbf{x}_{r,f}$ ,  $\Delta \mathbf{x}_{y_1,f}$  et  $\Delta \mathbf{x}_{y_2,f}$  représentent respectivement les transformées de Laplace de  $\delta \mathbf{u}$ ,  $\delta \mathbf{v}$ ,  $\delta \mathbf{r}$ ,  $\delta \mathbf{y}_1$ ,  $\delta \mathbf{y}_2$ ,  $\delta \mathbf{x}_{r,f}$ ,  $\delta \mathbf{x}_{y_1,f}$  et  $\delta \mathbf{x}_{y_2,f}$ . On obtient donc :

$$\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{x}_{r,f} = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \Delta \mathbf{r}, \quad \Delta \mathbf{y}_1 - \Delta \mathbf{x}_{y_1,f} = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \Delta \mathbf{y}_1, \quad (5.55)$$

$$\Delta \mathbf{y}_2 - \Delta \mathbf{x}_{y_2,f} = \frac{\tau s}{\tau s + 1} \Delta \mathbf{y}_2, \quad \Delta \mathbf{x}_{r,f} - \Delta \mathbf{x}_{y_1,f} = \frac{1}{\tau s + 1} (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{y}_1). \quad (5.56)$$

En prenant la transformée de Laplace de (5.53) et en utilisant les relations précédentes portant sur le pré-filtrage, on obtient :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{v} = & \frac{\tau}{\tau s + 1} \left[ \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{y}_1) \\ & + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left[ \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{r} \\ & + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left[ \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_1 \\ & + \frac{\tau s}{\tau s + 1} \left[ \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_2. \end{aligned} \quad (5.57)$$

En incluant sur la base des deux dernières lignes de (5.47) le post-filtrage qui donne lieu à la fonction de transfert  $\Delta \mathbf{u} = \frac{\tau s + 1}{\tau s} \Delta \mathbf{v}$ , on obtient finalement la relation suivante :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = & \frac{1}{s} \left[ \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] (\Delta \mathbf{r} - \Delta \mathbf{y}_1) \\ & + \left[ \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{r} \\ & + \left[ \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_1 \\ & + \left[ \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_2. \end{aligned} \quad (5.58)$$

Le post-filtrage permet donc bien de cacher, du point de vue de la fonction de transfert entrée-sortie de la dynamique linéarisée du contrôleur, la contribution du pôle localisé en  $-1/\tau$  introduit par le pré-filtrage. La preuve est ainsi complétée puisque la fonction de transfert (5.58) précédemment obtenue est identique à celle du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  d'origine donnée par (5.11).  $\square$

Le Théorème 5.1 garantit ainsi que  $T_l(\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_{\text{vel}+})(\boldsymbol{\theta}_e) = T(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$ , i.e., que l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  permet de préserver la fonction de transfert entrée-sortie du système bouclé linéarisé pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et toute configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$ . En réalité, le résultat précédemment démontré est encore plus fort dans la mesure où l'on a montré que la fonction de transfert entrée-sortie de  $\mathcal{C}_{\text{vel}+,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$  donnée par (5.58) coïncide avec la fonction de transfert (5.11) du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  d'origine.

L'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  permet ainsi de préserver directement le comportement entrée-sortie de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ .

### 5.3.3.2 Propriétés portant sur la stabilité interne

Le Théorème 5.1 atteste la pertinence de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  d'un point de vue entrée-sortie. Néanmoins, l'utilisation de modes cachés requiert l'analyse de sa stabilité interne. À cette fin, on considère la représentation d'état  $(\mathcal{A}_l(\theta_e), \mathcal{B}_l(\theta_e), \mathcal{C}_l(\theta_e), \mathcal{D}_l(\theta_e))$  du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  d'origine donnée par (5.8) ainsi que celle de la dynamique linéarisée  $\mathcal{C}_{\text{vel}+,l}(\theta_e)$  du contrôleur  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  au point d'opération  $\theta_e$  qui est, sur la base de (5.47) et (5.53), donnée par :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}_a = \mathcal{A}_a(\theta_e)\mathbf{X}_a + \mathcal{B}_a(\theta_e)\mathbf{U}_a \\ \mathbf{Y}_a = \mathcal{C}_a(\theta_e)\mathbf{X}_a + \mathcal{D}_a(\theta_e)\mathbf{U}_a \end{cases} \quad (5.59)$$

où le vecteur d'état du contrôleur est  $\mathbf{X}_a^\top = [\delta \mathbf{x}_{r,f}^\top \ \delta \mathbf{x}_{y_1,f}^\top \ \delta \mathbf{x}_{y_2,f}^\top \ \delta \mathbf{x}_c^\top \ \delta \mathbf{x}_{v,f}^\top]^\top$ , le vecteur d'entrée est  $\mathbf{U}_a^\top = [\delta \mathbf{r}^\top \ \delta \mathbf{y}_1^\top \ \delta \mathbf{y}_2^\top]^\top$  et le vecteur de sortie est  $\mathbf{Y}_a = \delta \mathbf{u}$ . Les matrices de la représentation d'état précédente sont données par :

$$\mathcal{A}_a(\theta_e) = \begin{bmatrix} -\tau^{-1}\mathbf{I}_{p_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\tau^{-1}\mathbf{I}_{p_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\tau^{-1}\mathbf{I}_{p_2} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \tau\mathbf{A}_i^c(\theta_e) - \mathbf{B}_r^c(\theta_e) & -\tau\mathbf{A}_i^c(\theta_e) - \mathbf{B}_1^c(\theta_e) & -\mathbf{B}_2^c(\theta_e) & \mathbf{A}_c^c(\theta_e) & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_i^c(\theta_e) - \tau^{-1}\mathbf{D}_r^c(\theta_e) & -\mathbf{C}_i^c(\theta_e) - \tau^{-1}\mathbf{D}_1^c(\theta_e) & -\tau^{-1}\mathbf{D}_2^c(\theta_e) & \tau^{-1}\mathbf{C}_c^c(\theta_e) & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.60a)$$

$$\mathcal{B}_a(\theta_e) = \begin{bmatrix} \tau^{-1}\mathbf{I}_{p_1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \tau^{-1}\mathbf{I}_{p_1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \tau^{-1}\mathbf{I}_{p_2} \\ \mathbf{B}_r^c(\theta_e) & \mathbf{B}_1^c(\theta_e) & \mathbf{B}_2^c(\theta_e) \\ \tau^{-1}\mathbf{D}_r^c(\theta_e) & \tau^{-1}\mathbf{D}_1^c(\theta_e) & \tau^{-1}\mathbf{D}_2^c(\theta_e) \end{bmatrix}, \quad (5.60b)$$

$$\mathcal{C}_a(\theta_e) = [\tau\mathbf{C}_i^c(\theta_e) - \mathbf{D}_r^c(\theta_e) \quad -\tau\mathbf{C}_i^c(\theta_e) - \mathbf{D}_1^c(\theta_e) \quad -\mathbf{D}_2^c(\theta_e) \quad \mathbf{C}_c^c(\theta_e) \quad \mathbf{I}_m], \quad (5.60c)$$

$$\mathcal{D}_a(\theta_e) = [\mathbf{D}_r^c(\theta_e) \quad \mathbf{D}_1^c(\theta_e) \quad \mathbf{D}_2^c(\theta_e)], \quad (5.60d)$$

où  $\mathcal{A}_a(\theta_e) \in \mathbb{R}^{(m+n_c+p+p_1) \times (m+n_c+p+p_1)}$ ,  $\mathcal{B}_a(\theta_e) \in \mathbb{R}^{(m+n_c+p+p_1) \times (p+p_1)}$ ,  $\mathcal{C}_a(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times (m+n_c+p+p_1)}$  et  $\mathcal{D}_a(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times (p+p_1)}$ . Le signal  $\mathbf{v}$  de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  donnée par (5.43) n'est ni une variable d'état, ni une sortie de la dynamique du contrôleur, mais uniquement un signal intermédiaire. Ainsi,  $\delta \mathbf{v}$  n'apparaît pas de manière explicite dans la représentation d'état donnée par (5.59); l'équation associée a été utilisée afin d'obtenir l'équation de la dynamique de

$\delta \mathbf{x}_{v,f}$  ainsi que l'équation de sortie de  $\delta \mathbf{u}$ .

Notons qu'à partir de la structure triangulaire inférieure par bloc de la matrice  $\mathcal{A}_a(\boldsymbol{\theta}_e)$ , les pôles de la représentation d'état (5.59) sont aisément obtenus comme suit :

- les  $n_c$  valeurs propres de  $\mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)$  comptées avec leur multiplicité ;
- $\lambda = 0$  pôle de multiplicité  $m$  ;
- $\lambda = -1/\tau$  pôle de multiplicité  $p + p_1$ .

Il a été vu à la sous-section précédente que les pôles introduits en  $-1/\tau$  par la stratégie de pré-filtrage sont des modes cachés de la dynamique du contrôleur. On se propose ici d'analyser de manière plus précise la situation afin de caractériser la stabilité interne du système bouclé avec l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  en un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  donné. À des fins de simplicité des notations, on omettra dans la suite de cette sous-section de noter la dépendance des matrices précédentes vis-à-vis du point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$ . Les résultats présentés seront donc valables pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ . En rappelant que la représentation d'état  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_l, \mathcal{C}_l, \mathcal{D}_l)$  du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  d'origine est donnée par (5.8), tandis que la représentation d'état  $(\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_a, \mathcal{C}_a, \mathcal{D}_a)$  de la dynamique linéarisée de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  au point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e$  est caractérisée par (5.59), on a les résultats suivants.

**Lemme 5.2** *Supposons vérifiée (H2) de l'Hypothèse 5.2. Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{-1/\tau\}$ ,  $\lambda$  est un pôle non observable de  $(\mathcal{A}_a, \mathcal{C}_a)$  si et seulement s'il est un pôle non observable de  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{C}_l)$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top \mathbf{x}_3^\top \mathbf{x}_4^\top \mathbf{x}_5^\top]^\top \in \mathbb{R}^{m+n_c+p+p_1}$  un vecteur non nul partitionné conformément à la structure par bloc de la matrice  $\mathcal{A}_a$  tel que  $\mathcal{A}_a \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$  et  $\mathcal{C}_a \mathbf{X} = \mathbf{0}$ . On a alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{1}{\tau} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_3 \end{bmatrix} \\ (\tau \mathbf{A}_i^c - \mathbf{B}_r^c) \mathbf{x}_1 + (-\tau \mathbf{A}_i^c - \mathbf{B}_1^c) \mathbf{x}_2 - \mathbf{B}_2^c \mathbf{x}_3 + \mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_4 = \lambda \mathbf{x}_4 \\ (\mathbf{C}_i^c - \tau^{-1} \mathbf{D}_r^c) \mathbf{x}_1 + (-\mathbf{C}_i^c - \tau^{-1} \mathbf{D}_1^c) \mathbf{x}_2 - \tau^{-1} \mathbf{D}_2^c \mathbf{x}_3 + \tau^{-1} \mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_4 = \lambda \mathbf{x}_5 \\ (\tau \mathbf{C}_i^c - \mathbf{D}_r^c) \mathbf{x}_1 + (-\tau \mathbf{C}_i^c - \mathbf{D}_1^c) \mathbf{x}_2 - \mathbf{D}_2^c \mathbf{x}_3 + \mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (5.61)$$

Puisque  $\lambda \neq -1/\tau$ , la première ligne du système (5.61) implique que  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{x}_3$  sont des vecteurs nuls. Il s'en suit que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_4 = \lambda \mathbf{x}_4 \\ \tau^{-1} \mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_4 = \lambda \mathbf{x}_5 \\ \mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_4 + \mathbf{x}_5 = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (5.62)$$

Sur la base des deux dernières équations de (5.62), on obtient  $(1/\tau + \lambda)\mathbf{x}_5 = \mathbf{0}$ , impliquant que  $\mathbf{x}_5 = \mathbf{0}$ . On en déduit que

$$\begin{cases} \mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_4 = \lambda \mathbf{x}_4 \\ \mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_4 = \mathbf{0} \end{cases} \quad (5.63)$$

Ayant supposé que  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$ , cela implique nécessairement que  $\mathbf{x}_4 \neq \mathbf{0}$  puisque l'on a déjà montré que  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_5$  sont nuls. On en déduit que  $\lambda$  est un pôle non observable de  $(\mathbf{A}_c^c, \mathbf{C}_c^c)$ . Réciproquement, si  $\lambda$  est un pôle non observable de  $(\mathbf{A}_c^c, \mathbf{C}_c^c)$ , il est suffisant de considérer  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_3 = \mathbf{0}, \mathbf{x}_5 = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{x}_4 \neq \mathbf{0}$  vérifiant  $\mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_4 = \lambda \mathbf{x}_4$  et  $\mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_4 = \mathbf{0}$  pour montrer que  $\lambda$  est un pôle non observable de  $(\mathcal{A}_a, \mathcal{C}_a)$ .

Il reste à montrer que  $\lambda$  est un pôle non observable de  $(\mathbf{A}_c^c, \mathbf{C}_c^c)$  si et seulement s'il est un pôle non observable de  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{C}_l)$ . Considérons dans un premier temps le cas  $\lambda \neq 0$ . S'il existe un vecteur non nul  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_c}$  tel que  $\mathbf{A}_c^c \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}$  et  $\mathbf{C}_c^c \mathbf{x} = \mathbf{0}$ , alors  $\mathbf{X} = [\mathbf{0}^\top \mathbf{x}^\top]^\top \in \mathbb{R}^{n_c+p_1}$  est un vecteur non nul vérifiant  $\mathcal{A}_l \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$  et  $\mathcal{C}_l \mathbf{X} = \mathbf{0}$ . Réciproquement, supposons qu'il existe un vecteur non nul  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top]^\top \in \mathbb{R}^{n_c+p_1}$  avec  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$  et  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_c}$  tel que  $\mathcal{A}_l \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X}$  et  $\mathcal{C}_l \mathbf{X} = \mathbf{0}$ . La première égalité implique que  $\lambda \mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ . Puisque  $\lambda \neq 0$ , on a  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ , impliquant que  $\mathbf{x}_2 \neq \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{A}_c^c \mathbf{x}_2 = \lambda \mathbf{x}_2$  et  $\mathbf{C}_c^c \mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ .

Dans le cas  $\lambda = 0$ ,  $\mathcal{A}_l \mathbf{X} = \lambda \mathbf{X} = \mathbf{0}$  et  $\mathcal{C}_l \mathbf{X} = \mathbf{0}$  impliquent :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}_i^c & \mathbf{A}_c^c \\ \mathbf{C}_i^c & \mathbf{C}_c^c \end{bmatrix} \mathbf{X} = \mathbf{0}. \quad (5.64)$$

Sur la base de l'hypothèse (H2), on déduit que  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , et donc que  $\lambda = 0$  ne peut être un pôle non observable de  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{C}_l)$ . De manière analogue,  $\lambda = 0$  ne peut être un pôle non observable de  $(\mathbf{A}_c^c, \mathbf{C}_c^c)$  puisque, sur la base de (H2),  $\mathbf{A}_c^c \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{C}_c^c \mathbf{x} = \mathbf{0}$  impliquent que  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .  $\square$

L'hypothèse (H2) n'est requise dans la démonstration du Lemme 5.2 que pour traiter le cas  $\lambda = 0$ . En particulier, elle permet de prévenir la présence d'intégrateurs non observables dans la dynamique du contrôleur. Le cas  $\lambda = 1/\tau$ , laissé de côté par le Lemme 5.2, est traité par le résultat suivant.

**Lemme 5.3** *Le sous-espace non observable du pôle  $\lambda = -1/\tau$  de  $(\mathcal{A}_a, \mathcal{C}_a)$  est de dimension supérieur ou égal à  $p + p_1$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top \mathbf{x}_3^\top \mathbf{x}_4^\top \mathbf{x}_5^\top]^\top \in \mathbb{R}^{m+n_c+p+p_1}$  un vecteur partitionné conformément à la structure par bloc de la matrice  $\mathcal{A}_a$  tel que  $\mathcal{A}_a \mathbf{X} = -1/\tau \mathbf{X}$  et  $\mathcal{C}_a \mathbf{X} = \mathbf{0}$ . En reprenant (5.61) avec  $\lambda = -1/\tau$ , la première ligne du système d'équations devient tri-

vial alors que les deux dernières deviennent équivalentes. Dès lors,  $-1/\tau$  est un pôle non observable de  $(\mathbf{A}_a, \mathbf{C}_a)$  si et seulement s'il existe  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m+n_c+p+p_1} \setminus \{0\}$  tel que  $\mathbf{H}\mathbf{X} = \mathbf{0}$  où

$$\mathbf{H} \triangleq \begin{bmatrix} \tau \mathbf{A}_i^C - \mathbf{B}_r^C & -\tau \mathbf{A}_i^C - \mathbf{B}_1^C & -\mathbf{B}_2^C & \mathbf{A}_c^C + \tau^{-1} \mathbf{I}_{n_c} & \mathbf{0} \\ \tau \mathbf{C}_i^C - \mathbf{D}_r^C & -\tau \mathbf{C}_i^C - \mathbf{D}_1^C & -\mathbf{D}_2^C & \mathbf{C}_c^C & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(m+n_c) \times (m+n_c+p+p_1)} \quad (5.65)$$

Le théorème du rang garantissant que  $\dim(\text{Ker}(\mathbf{H})) + \dim(\text{Im}(\mathbf{H})) = m + n_c + p + p_1$  et puisque  $\dim(\text{Im}(\mathbf{H})) \leq \dim(\mathbb{R}^{m+n_c}) = m + n_c$ , on en déduit que  $\dim(\text{Ker}(\mathbf{H})) \geq p + p_1$ .  $\square$

Ainsi, les pôles introduits par la stratégie de pré-filtrage font partie des modes non observables du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_{\text{vel}+,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$ . En particulier, si le contrôleur d'origine  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  ne présente pas de pôle en  $-1/\tau$ , i.e.,  $-1/\tau$  n'est pas une valeur propre de la matrice  $\mathbf{A}_c^C$ , alors l'ensemble des pôles localisés en  $-1/\tau$  sont exclusivement introduits par la stratégie de pré-filtrage et sont non observables (et font donc de surcroît partie des modes cachés).

Ayant investigué les propriétés d'observabilité des pôles de la représentation d'état de  $\mathcal{C}_{\text{vel}+,l}(\boldsymbol{\theta}_e)$ , on s'intéresse à présent à leurs propriétés de commandabilité.

**Lemme 5.4** *Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\lambda$  est un pôle non commandable de  $(\mathbf{A}_a, \mathbf{B}_a)$  si et seulement s'il est un pôle non commandable de  $(\mathbf{A}_l, \mathbf{B}_l)$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top \mathbf{x}_3^\top \mathbf{x}_4^\top \mathbf{x}_5^\top]^\top \in \mathbb{R}^{m+n_c+p+p_1}$  un vecteur non nul partitionné conformément à la structure par bloc de la matrice  $\mathbf{A}_a$  tel que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A}_a = \lambda \mathbf{X}^\top$  et  $\mathbf{X}^\top \mathbf{B}_a = \mathbf{0}$ . Le développement des équations matricielles donne lieu au système d'équations équivalent :

$$-\tau^{-1} \mathbf{x}_1^\top + \mathbf{x}_4^\top (\tau \mathbf{A}_i^C - \mathbf{B}_r^C) + \mathbf{x}_5^\top (\mathbf{C}_i^C - \tau^{-1} \mathbf{D}_r^C) = \lambda \mathbf{x}_1^\top \quad (5.66a)$$

$$-\tau^{-1} \mathbf{x}_2^\top - \mathbf{x}_4^\top (\tau \mathbf{A}_i^C + \mathbf{B}_1^C) - \mathbf{x}_5^\top (\mathbf{C}_i^C + \tau^{-1} \mathbf{D}_1^C) = \lambda \mathbf{x}_2^\top \quad (5.66b)$$

$$-\tau^{-1} \mathbf{x}_3^\top - \mathbf{x}_4^\top \mathbf{B}_2^C - \tau^{-1} \mathbf{x}_5^\top \mathbf{D}_2^C = \lambda \mathbf{x}_3^\top \quad (5.66c)$$

$$\mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_c^C + \tau^{-1} \mathbf{x}_5^\top \mathbf{C}_c^C = \lambda \mathbf{x}_4^\top \quad (5.66d)$$

$$\mathbf{0} = \lambda \mathbf{x}_5^\top \quad (5.66e)$$

$$\tau^{-1} \mathbf{x}_1^\top + \mathbf{x}_4^\top \mathbf{B}_r^C + \tau^{-1} \mathbf{x}_5^\top \mathbf{D}_r^C = \mathbf{0} \quad (5.66f)$$

$$\tau^{-1} \mathbf{x}_2^\top + \mathbf{x}_4^\top \mathbf{B}_1^C + \tau^{-1} \mathbf{x}_5^\top \mathbf{D}_1^C = \mathbf{0} \quad (5.66g)$$

$$\tau^{-1} \mathbf{x}_3^\top + \mathbf{x}_4^\top \mathbf{B}_2^C + \tau^{-1} \mathbf{x}_5^\top \mathbf{D}_2^C = \mathbf{0} \quad (5.66h)$$

Puisque  $\lambda \neq 0$ , (5.66e) implique que  $\mathbf{x}_5 = \mathbf{0}$ . De manière analogue, on déduit de (5.66c) et (5.66h) que  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ . En injectant (5.66f) dans (5.66a), on obtient que  $\tau \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^C = \lambda \mathbf{x}_1^\top$ . En injectant de même avec (5.66g) dans (5.66b), on a  $-\tau \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^C = \lambda \mathbf{x}_2^\top$ . Des deux dernières



égalités obtenues, en tenant compte du fait que  $\lambda \neq 0$ , on déduit que  $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1$ . De (5.66d), on obtient  $\mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_c^c = \lambda \mathbf{x}_4^\top$ . Ces relations permettent d'obtenir le système équivalent<sup>5</sup> suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left[ \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^c, \mathbf{x}_4^\top \right] \mathcal{A}_l = \lambda \left[ \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^c, \mathbf{x}_4^\top \right] \\ \left[ \frac{1}{\lambda} \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^c, \mathbf{x}_4^\top \right] \mathcal{B}_l = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_1^\top = \frac{\tau}{\lambda} \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^c \\ \mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_3 = \mathbf{0} \\ \mathbf{x}_5 = \mathbf{0} \end{array} \right. \quad (5.67)$$

La première égalité de (5.67), sur la base de la définition de la matrice  $\mathcal{A}_l$  (5.8), est équivalente à l'égalité précédemment établie  $\mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_c^c = \lambda \mathbf{x}_4^\top$ . La seconde égalité de (5.67) est quant à elle équivalente aux équations (5.66f-5.66h) sur la base des relations précédemment établies  $\mathbf{x}_3 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_5 = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{x}_2 = -\mathbf{x}_1$  et  $\tau \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^c = \lambda \mathbf{x}_1^\top$ .

Afin de conclure à partir de (5.67) que  $\lambda$  est un pôle non commandable de  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_l)$ , il est suffisant de remarquer que  $\mathbf{X} \neq \mathbf{0}$  si et seulement si  $\mathbf{x}_4 \neq \mathbf{0}$ , i.e., si et seulement si  $[1/\lambda \mathbf{x}_4^\top \mathbf{A}_i^c, \mathbf{x}_4^\top] \neq \mathbf{0}$ . Réciproquement, soit  $\mathbf{Z} = [\mathbf{z}_1^\top \mathbf{z}_2^\top]^\top$  un vecteur non nul avec  $\mathbf{z}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$  et  $\mathbf{z}_2 \in \mathbb{R}^{n_c}$  tel que  $\mathbf{Z}^\top \mathcal{A}_l = \lambda \mathbf{Z}^\top$  et  $\mathbf{Z}^\top \mathcal{B}_l = \mathbf{0}$ . À partir de la définition de la matrice  $\mathcal{A}_l$  (5.8), la première égalité implique que  $\mathbf{z}_2^\top \mathbf{A}_i^c = \lambda \mathbf{z}_1^\top$ . Donc, puisque  $\lambda \neq 0$  et  $\mathbf{Z}$  est non nul, on obtient que  $\mathbf{z}_2 \neq \mathbf{0}$ . Ainsi, avec  $\mathbf{x}_4 = \mathbf{z}_2$ , il suffit de prendre  $\mathbf{x}_1$ ,  $\mathbf{x}_2$ ,  $\mathbf{x}_3$  et  $\mathbf{x}_5$  définis par (5.67) de manière à conclure que  $\lambda$  est un pôle non commandable de  $(\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_a)$ .  $\square$

**Lemme 5.5** *Supposons vérifiées (H2) et (H3) de l'Hypothèse 5.2. Une valeur nulle de  $\lambda$  ne peut être un pôle non commandable ni de  $(\mathcal{A}_a, \mathcal{B}_a)$ , ni de  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_l)$ .*

**Démonstration.** Soit  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top \mathbf{x}_3^\top \mathbf{x}_4^\top \mathbf{x}_5^\top]^\top \in \mathbb{R}^{m+n_c+p+p_1}$  un vecteur non nul partitionné conformément à la structure par bloc de la matrice  $\mathcal{A}_a$  tel que  $\mathbf{X}^\top \mathcal{A}_a = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{X}^\top \mathcal{B}_a = \mathbf{0}$ . Le développement de ces deux équations matricielles donne lieu au système

---

5. On détaille ici seulement le sens « implique », le sens « retour » se vérifiant aisément.

suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\tau^{-1}\mathbf{x}_1^\top + \mathbf{x}_4^\top(\tau\mathbf{A}_i^c - \mathbf{B}_r^c) + \mathbf{x}_5^\top(\mathbf{C}_i^c - \tau^{-1}\mathbf{D}_r^c) = 0 \\ -\tau^{-1}\mathbf{x}_2^\top - \mathbf{x}_4^\top(\tau\mathbf{A}_i^c + \mathbf{B}_1^c) - \mathbf{x}_5^\top(\mathbf{C}_i^c + \tau^{-1}\mathbf{D}_1^c) = 0 \\ -\tau^{-1}\mathbf{x}_3^\top - \mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_2^c - \tau^{-1}\mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_2^c = 0 \\ \mathbf{x}_4^\top\mathbf{A}_c^c + \tau^{-1}\mathbf{x}_5^\top\mathbf{C}_c^c = 0 \\ 0 = 0 \\ \tau^{-1}\mathbf{x}_1^\top + \mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_r^c + \tau^{-1}\mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_r^c = 0 \\ \tau^{-1}\mathbf{x}_2^\top + \mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_1^c + \tau^{-1}\mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_1^c = 0 \\ \tau^{-1}\mathbf{x}_3^\top + \mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_2^c + \tau^{-1}\mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_2^c = 0 \end{array} \right. \quad (5.68)$$

qui, par calcul direct, est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{0} = [\tau\mathbf{x}_4^\top, \mathbf{x}_5^\top] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c & \mathbf{A}_i^c \\ \mathbf{C}_c^c & \mathbf{C}_i^c \end{bmatrix} \\ \mathbf{x}_1^\top = -\tau\mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_r^c - \mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_r^c \\ \mathbf{x}_2^\top = -\tau\mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_1^c - \mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_1^c \\ \mathbf{x}_3^\top = -\tau\mathbf{x}_4^\top\mathbf{B}_2^c - \mathbf{x}_5^\top\mathbf{D}_2^c \end{array} \right. \quad (5.69)$$

Sur la base des hypothèses (H2) et (H3), la matrice (5.44) est inversible. On en déduit que (5.69) est équivalent à  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ .

À présent, soit  $\mathbf{X} = [\mathbf{x}_1^\top \mathbf{x}_2^\top]^\top$ , avec  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^{p_1}$  et  $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^{n_c}$ , tel que  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A}_l = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{X}^\top \mathbf{B}_l = \mathbf{0}$ . Alors,  $\mathbf{X}^\top \mathbf{A}_l = \mathbf{0}$  implique que :

$$[\mathbf{x}_2^\top \quad \mathbf{0}^\top] \begin{bmatrix} \mathbf{A}_c^c & \mathbf{A}_i^c \\ \mathbf{C}_c^c & \mathbf{C}_i^c \end{bmatrix} = \mathbf{0}. \quad (5.70)$$

Puisque la matrice (5.44) est inversible,  $\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ . De plus, de  $\mathbf{X}^\top \mathbf{B}_l = \mathbf{0}$ , on déduit de la définition de la matrice  $\mathbf{B}_l$  (5.8) que  $\mathbf{x}_1^\top + \mathbf{x}_2^\top \mathbf{B}_r^c = \mathbf{0}$  d'où  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ . On obtient  $\mathbf{X} = \mathbf{0}$ , ce qui vient conclure la preuve.  $\square$

L'ensemble des résultats obtenus dans cette sous-section permettent d'obtenir le théorème suivant.

**Théorème 5.6** *Supposons vérifiées (H2), (H3) et (H4) de l'Hypothèse 5.2. Alors la représentation d'état  $(\mathbf{A}_a, \mathbf{B}_a, \mathbf{C}_a, \mathbf{D}_a)$  est stabilisable et détectable. De plus, si l'on suppose que  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  est internement stable, alors  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})(\boldsymbol{\theta}_e)$  l'est également.*

**Démonstration.** De par les Lemmes 5.2, 5.4 et 5.5, on conclut que  $(\mathbf{A}_a, \mathbf{B}_a, \mathbf{C}_a, \mathbf{D}_a)$  est sta-

bilisable et détectable puisque (H4) suppose que  $(\mathcal{A}_l, \mathcal{B}_l, \mathcal{C}_l, \mathcal{D}_l)$  est stabilisable et détectable. De plus, si l'on suppose que  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  est internement stable, on peut directement conclure que  $\mathcal{CL}_l(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})(\boldsymbol{\theta}_e)$  est internement stable puisque la propriété de stabilité interne ne dépend pas d'une réalisation stabilisable et détectable spécifique du système et du contrôleur (Zhou et al., 1996).  $\square$

Finalement, les Théorèmes 5.1 et 5.6 montrent que le paramètre de filtrage  $\tau > 0$  n'a pas d'impact ni sur la fonction de transfert entrée-sortie, ni sur les propriétés de stabilité interne du système en boucle fermée. Dès lors,  $\tau$  ne peut être ajusté que sur la base de l'évaluation du comportement du système non linéaire en boucle fermée  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})$ . Ce résultat est à mettre en perspective avec ce qui a été vu dans la Sous-Section 5.2.2 portant sur l'impact de la stratégie de pseudo-dérivation dans la mise en œuvre de l'implémentation *velocity-based algorithm*. De plus, ce résultat démontre que le Problème 5.1 initialement posé admet, sous les Hypothèses 5.2, au moins une solution, qui est donnée sous la forme de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  caractérisée par (5.43). Sur cette base, en supposant qu'une famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  a été conçue de telle sorte que pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ ,  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  est internement stable, la stabilité du système bouclé non linéaire  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}, \mathcal{C}_{\text{vel}+})$  est assurée pour des variations suffisamment lentes du signal de référence  $\mathbf{r}$  et du signal exogène  $\mathbf{w}$  (Rugh and Shamma, 2000; Lawrence et al., 1990).

### 5.3.3.3 Motivation du choix des stratégies de pré/post-filtrage

On s'intéresse à décrire l'ensemble des stratégies de pré/post-filtrage pouvant être employées dans l'implémentation améliorée du *velocity-based algorithm* de telle sorte que les Théorèmes 5.1 et 5.6 demeurent valides.

Sur la base de la Fig. 5.13, on cherche des opérateurs « de filtrage »  $\mathcal{F}_r, \mathcal{F}_{y_1}, \mathcal{F}_{y_2}$  et  $\mathcal{F}_v$  dont les fonctions de transfert sont des fractions rationnelles à coefficients réels  $F_r(s), F_{y_1}(s), F_{y_2}(s)$  et  $F_v(s)$  et qui sont tels que le contrôleur séquence  $\tilde{\mathcal{C}}$  caractérisé par (5.71) soit une solution du Problème 5.1. Le paramètre  $\tau \in \mathbb{R}^*$  est conservé en tant que facteur multiplicatif agissant sur les matrices  $\mathbf{A}_i^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta})$  et  $\mathbf{C}_i^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta})$ .

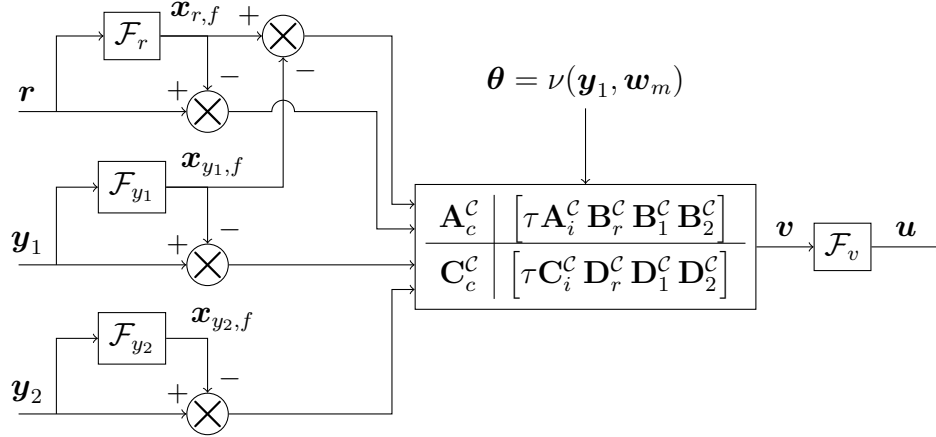


Figure 5.13 Amélioration de l'implémentation *velocity-based algorithm* : discussion de la stratégie de pré/post-filtrage

$$\tilde{\mathcal{C}} \triangleq \begin{cases} \mathbf{x}_{r,f} = \mathcal{F}_r \mathbf{r} \\ \mathbf{x}_{y1,f} = \mathcal{F}_{y1} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{x}_{y2,f} = \mathcal{F}_{y2} \mathbf{y}_2 \\ \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_c + \tau \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y1,f}] \\ \quad + \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y1,f}] + \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y2,f}] \\ \mathbf{v} = \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{x}_c + \tau \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y1,f}] \\ \quad + \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{r} - \mathbf{x}_{r,f}] + \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_1 - \mathbf{x}_{y1,f}] + \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y}_2 - \mathbf{x}_{y2,f}] \\ \mathbf{u} = \mathcal{F}_v \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.71)$$

En analysant la preuve du Théorème 5.1, le point clé de la démonstration permettant d'éviter l'émergence des TCC réside dans les conditions d'équilibre (5.45). En effet, si ces conditions d'équilibre ne sont pas satisfaites, (5.48) et (5.49) ne peuvent être simplifiées, aboutissant à l'émergence des TCC. Ainsi, de manière à éviter l'émergence des TCC lors de linéarisation de la dynamique du contrôleur séquencé  $\tilde{\mathcal{C}}$ , les conditions d'équilibre suivantes doivent être satisfaites :  $\mathbf{x}_{r,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$ ,  $\mathbf{x}_{y1,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{x}_{y2,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{y}_{2,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  et  $\mathbf{v}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = 0$ . Dans ce cas, sur la base de (H2) de l'Hypothèse 5.2, l'Eq. (5.46) implique que les deux égalités fondamentales  $\mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{y}_{1,e}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{x}_{c,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{0}$  sont vérifiées. Puisque  $\mathbf{x}_{r,f} = \mathcal{F}_r \mathbf{r}$ , la condition  $\mathbf{x}_{r,f,e}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{r}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  est équivalent à  $F_r(0) = 1$ . De manière analogue, on doit avoir  $F_{y1}(0) = F_{y2}(0) = 1$ . Finalement, de manière à imposer  $\mathbf{v}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = 0$ , puisque  $\mathbf{u} = \mathcal{F}_v \mathbf{v}$ ,  $F_v(s)$  doit contenir une composante intégrale, i.e.,  $F_v(s) = F_v^*(s)/s$  avec

$F_v^*(s)$  une fraction rationnelle telle que  $F_v^*(0) \neq 0$ . Sous ces hypothèses, du fait qu'elles permettent d'éviter l'émergence des TCC, un calcul direct similaire à celui effectué lors de la preuve du Théorème 5.1 montre que :

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} = & \tau F_v(s) \left[ \mathbf{C}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] (F_r(s) \Delta \mathbf{r} - F_{y_1}(s) \Delta \mathbf{y}_1) \\ & + F_v(s)(1 - F_r(s)) \left[ \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{r} \\ & + F_v(s)(1 - F_{y_1}(s)) \left[ \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_1 \\ & + F_v(s)(1 - F_{y_2}(s)) \left[ \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] \Delta \mathbf{y}_2. \end{aligned} \quad (5.72)$$

L'objectif est à présent de sélectionner les fonctions de transfert des composantes de pré/post-filtrage de telle sorte à ce que (5.72) coïncide avec la dynamique LTI du contrôleur  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  donnée par (5.11). Puisque l'on recherche une solution générale, i.e., valable pour n'importe quel jeu de matrices  $\mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e), \dots, \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e)$  dont les dimensions sont compatibles entre elles, on peut sélectionner des valeurs spécifiques de ces différentes matrices de manière à dériver les propriétés des filtres recherchés.

En prenant tout d'abord  $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$ , puisque l'égalité entre (5.11) et (5.72) doit être satisfaite pour tout  $\Delta \mathbf{y}_2$ , on obtient que

$$[F_v(s)(1 - F_{y_2}(s)) - 1] \left[ \mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e)(s\mathbf{I}_n - \mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e))^{-1} \mathbf{B}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e) \right] = \mathbf{0}. \quad (5.73)$$

En particulier, si on prend  $\mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$  et une matrice  $\mathbf{D}_2^c(\boldsymbol{\theta}_e)$  non nulle, on en déduit que

$$F_v(s)(1 - F_{y_2}(s)) = 1. \quad (5.74)$$

En considérant une nouvelle fois l'égalité entre (5.11) et (5.72) en prenant  $\Delta \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\Delta \mathbf{r} = \Delta \mathbf{y}_1$  et  $\mathbf{C}_c^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ , on obtient que

$$[F_v(s)(1 - F_r(s)) - 1] \mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) + [F_v(s)(1 - F_{y_1}(s)) - 1] \mathbf{D}_1^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}. \quad (5.75)$$

En prenant  $\mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{I}_{p_1}$  et  $\mathbf{D}_{y_1}^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ , la dernière égalité matricielle se réduit à :

$$F_v(s)(1 - F_r(s)) = 1. \quad (5.76)$$

En prenant cette fois  $\mathbf{D}_r^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$  et  $\mathbf{D}_{y_1}^c(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{I}_{p_1}$ , on obtient la relation :

$$F_v(s)(1 - F_{y_1}(s)) = 1. \quad (5.77)$$

Ainsi, sur la base de (5.74-5.77), on en déduit que :

$$F_r(s) = F_{y_1}(s) = F_{y_2}(s) = 1 - \frac{1}{F_v(s)}. \quad (5.78)$$

Finalement, en considérant une dernière fois l'égalité entre (5.11) et (5.72) en prenant  $\Delta \mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ ,  $\Delta \mathbf{y}_1 = -\Delta \mathbf{r}$  et  $\mathbf{C}_c^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}$ , on obtient, sur la base de (5.78),

$$\left[ \tau F_v(s) F_r(s) - \frac{1}{s} \right] \mathbf{C}_i^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e) = \mathbf{0}. \quad (5.79)$$

Donc, puisque l'égalité matricielle précédente est valable pour toute matrice  $\mathbf{C}_i^{\mathcal{C}}(\boldsymbol{\theta}_e)$  dont les dimensions sont adéquates, il vient que :

$$\tau F_v(s) F_r(s) = \frac{1}{s}. \quad (5.80)$$

En combinant (5.78) et (5.80), on obtient que les composantes de filtrage sont caractérisées par  $F_r(s) = F_{y_1}(s) = F_{y_2}(s) = 1/(\tau s + 1)$  et  $F_v(s) = 1 + 1/(\tau s)$ . On vérifie que les résultats obtenus sont bien compatibles avec les conditions précédemment établies, i.e.,  $F_r(0) = F_{y_1}(0) = F_{y_2}(0) = 1$  et  $F_v(s)$  comportant une composante intégrale. On a ainsi montré que les filtres adoptés dans l'implémentation améliorée du *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  (5.43) sont les seuls choix possibles pour que le Théorème 5.1 s'applique. De plus, puisque les pôles localisés en  $-1/\tau$  introduits par la stratégie de filtrage sont des modes cachés du contrôleur, on doit imposer  $\tau > 0$  de manière à pouvoir satisfaire le Théorème 5.6 quant à la stabilité interne du système bouclé.

## 5.4 Applications pour le retour de sortie statique

Dans cette section, on propose d'appliquer la stratégie d'implémentation détaillée à la Section 5.3 dans le cas du contrôle par retour de la dynamique en tangage du missile ainsi que pour la suppression du phénomène de *flutter* du BACT.

### 5.4.1 Contrôle de la dynamique en tangage d'un missile

Le modèle du missile utilisé est celui présenté à la Sous-Section 4.1.4.1. On utilise les gains obtenus par la méthode du placement de structure propre à la Sous-Section 4.2.1.4 pour le contrôleur séquencé donné par (4.57) avec un placement de pôles désiré tel que décrit dans le Tab. 4.5. On considère exclusivement les gains ayant été obtenus sans tenir compte de l'impact des TCC. On cherche dans ces conditions à comparer les trois implémentations

listées ci-dessous :

1. L'implémentation naïve donnée par :

$$\mathcal{C}_n \triangleq \begin{cases} \dot{x}_i = \eta_c - \eta \\ \delta_c = K_i(\boldsymbol{\theta})x_i + K_\eta(\boldsymbol{\theta})\eta + K_q(\boldsymbol{\theta})q \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) \end{cases} \quad (5.81)$$

Il a été vu que cette implémentation, de par l'interférence des TCC, donne lieu à un placement de pôles en boucle fermée tel que résumé dans le Tab. 4.6 distinct de celui originellement souhaité (Tab. 4.5), avec en particulier des pôles très mal amortis à hautes vitesses et pour de larges angles d'attaque.

2. Puisque les signaux  $\dot{\eta}$  et  $\dot{q}$  ne sont pas mesurés en pratique, il ne peuvent être utilisés pour la stratégie de contrôle. On utilise l'implémentation *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation de l'accélération normale  $\eta$  et de la vitesse en tangage  $q$  :

$$\mathcal{C}_{\text{vel,a}} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_{\eta,f} = -\varepsilon^{-1}x_{\eta,f} + \varepsilon^{-1}\eta \\ \dot{x}_{q,f} = -\varepsilon^{-1}x_{q,f} + \varepsilon^{-1}q \\ v = \varepsilon K_i(\boldsymbol{\theta})[\eta_c - \eta] + K_\eta(\boldsymbol{\theta})[\eta - x_{\eta,f}] + K_q(\boldsymbol{\theta})[q - x_{q,f}] \\ \dot{u} = \varepsilon^{-1}v \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) \end{cases} \quad (5.82)$$

Comme souligné lors des précédents développements, la stratégie de pseudo-dérivation de paramètre  $\varepsilon > 0$  introduit une dynamique supplémentaire dans le système bouclé venant parasiter le design originellement effectué.

3. L'implémentation basée sur une stratégie de pré/post filtrage de paramètre  $\tau > 0$  :

$$\mathcal{C}_{\text{vel+}} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_{\eta_c,f} = -\tau^{-1}x_{\eta_c,f} + \tau^{-1}\eta_c \\ \dot{x}_{\eta,f} = -\tau^{-1}x_{\eta,f} + \tau^{-1}\eta \\ \dot{x}_{q,f} = -\tau^{-1}x_{q,f} + \tau^{-1}q \\ v = \tau K_i(\boldsymbol{\theta})[x_{\eta_c,f} - x_{\eta,f}] + K_\eta(\boldsymbol{\theta})[\eta - x_{\eta,f}] + K_q(\boldsymbol{\theta})[q - x_{q,f}] \\ \dot{x}_{v,f} = \tau^{-1}v \\ u = x_{v,f} + v \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) \end{cases} \quad (5.83)$$

En supposant que le gain  $K_i$  ne s'annule pas sur le domaine d'opération (ce qui est le cas

pour les gains considérés), les Hypothèses 5.2 sont rencontrées et donc les Théorèmes 5.1 et 5.6 garantissent la pertinence de la stratégie d'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ .

Le comportement temporel du missile placé en boucle fermée avec, respectivement, les trois architectures de contrôle  $\mathcal{C}_{\text{naive}}$ ,  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  et  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ , est obtenu en simulation pour une évolution du nombre de Mach régie par (4.65). Les résultats sont illustrés à la Fig. 5.14 pour  $\varepsilon = \tau = 0.002$  et à la Fig. 5.15. pour  $\varepsilon = \tau = 0.02$ . Lorsque le paramètre de pseudo-dérivation est suffisamment faible, e.g.,  $\varepsilon = 0.002$ , l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  fournit un niveau de performance adéquat au système bouclé. En particulier, elle ne présente pas de dépassement excessif pour le suivi de référence, au contraire de ce qui est observé pour l'implémentation naïve  $\mathcal{C}_n$  (Fig. 5.14(a)). L'implémentation basée sur le filtrage  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  offre également pour  $\tau = 0.002$  une bonne réponse temporelle, quasi-identique à celle observée pour  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  pour l'ensemble des grandeurs physiques impliquées. Cependant, lorsque l'on augmente la valeur du paramètre de pseudo-dérivation  $\varepsilon$ , l'interférence de la dynamique de pseudo-dérivation est plus importante comme cela est illustré à la Fig. 5.14 pour  $\varepsilon = 0.02$ , induisant un comportement oscillatoire très prononcé pour l'ensemble des grandeurs physiques. *A contrario*, la réponse de l'implémentation basée sur le filtrage  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  pour  $\tau = 0.02$  maintient un niveau de performance adéquat en suivi de référence, avec un comportement temporel des différentes grandeurs physiques demeurant très proche de ce qui a été observé pour  $\tau = 0.02$  (comparaison des Fig. 5.14 et 5.15). Ces résultats sont conformes aux analyses effectuées dans la Section 5.3. En effet, alors que l'implémentation du *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation requiert de faibles valeurs du paramètre de pseudo-dérivation  $\varepsilon > 0$  afin de minimiser la perturbation portant sur le placement de pôles désiré, l'implémentation améliorée préserve le placement de pôles désiré, indépendamment de la valeur choisie pour le paramètre de filtrage  $\tau > 0$ .

L'impact du choix du paramètre de filtrage sur le système en boucle fermée en présence de bruits de mesure est illustré à la Fig. 5.16 pour  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  et  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ . Puisque les deux stratégies comportent en entrée un filtre passe-haut  $s/(\varepsilon s + 1)$ , de faibles valeurs de  $\varepsilon$  engendrent des problèmes d'amplification du bruit. Cependant, de larges valeurs du paramètre de pseudo-dérivation  $\varepsilon$  aboutissent également à une performance dégradée du système bouclé avec  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  (cf. Figs. 5.16(a)-5.16(b)). *A contrario*, l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  autorise à sélectionner des valeurs plus élevées du paramètre de filtrage  $\tau$ , permettant une amélioration de la performance du système bouclé en présence de bruits de mesure, comme illustré aux Fig. 5.16(c)-5.16(d).



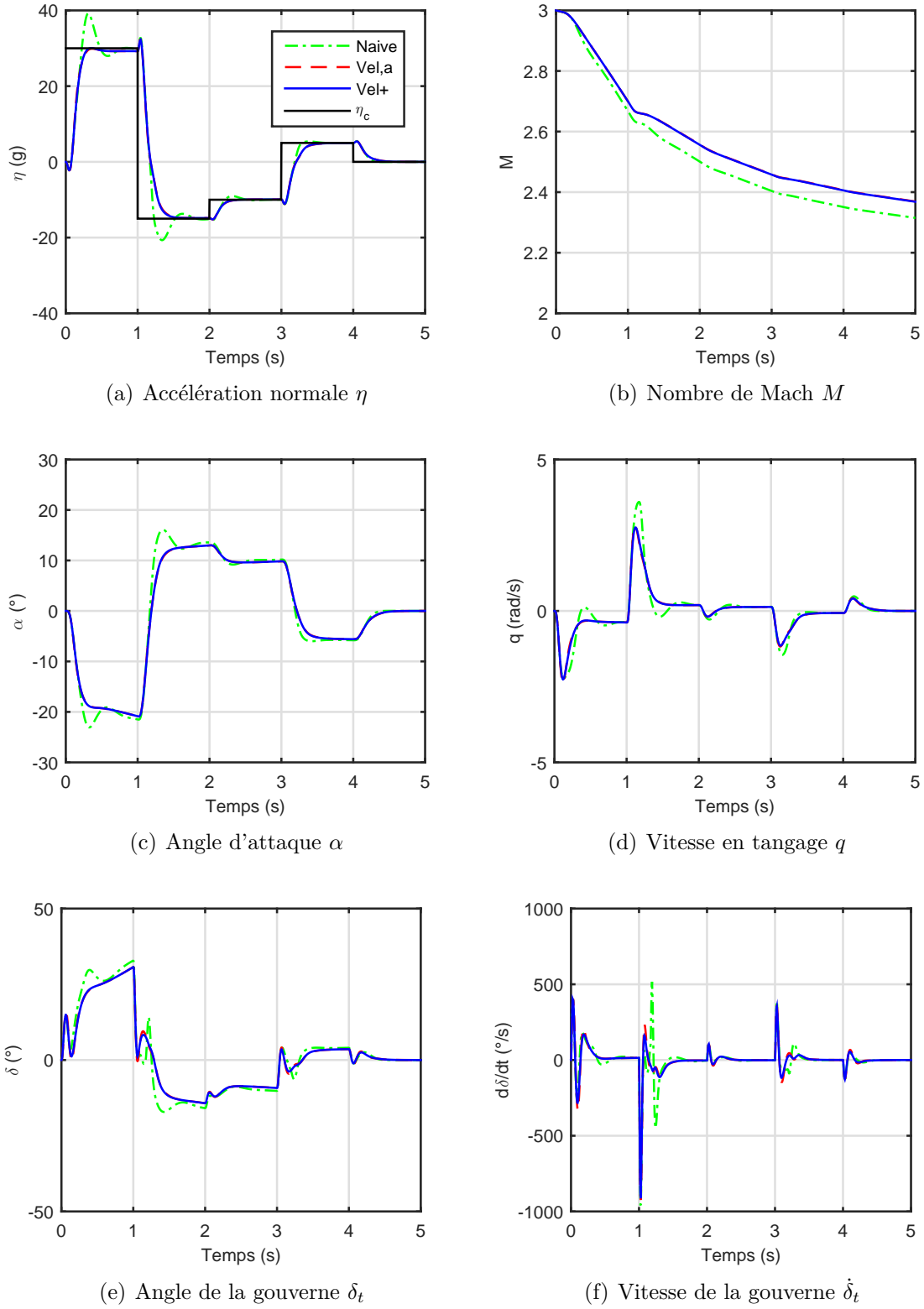


Figure 5.14 Comparaison de la réponse du missile en boucle fermée pour les trois stratégies d'implémentation 1) naïve  $\mathcal{C}_n$  ; 2) *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{vel,a}$  pour  $\varepsilon = 0.002$  ; 3) stratégie de filtrage  $\mathcal{C}_{vel+}$  pour  $\tau = 0.002$

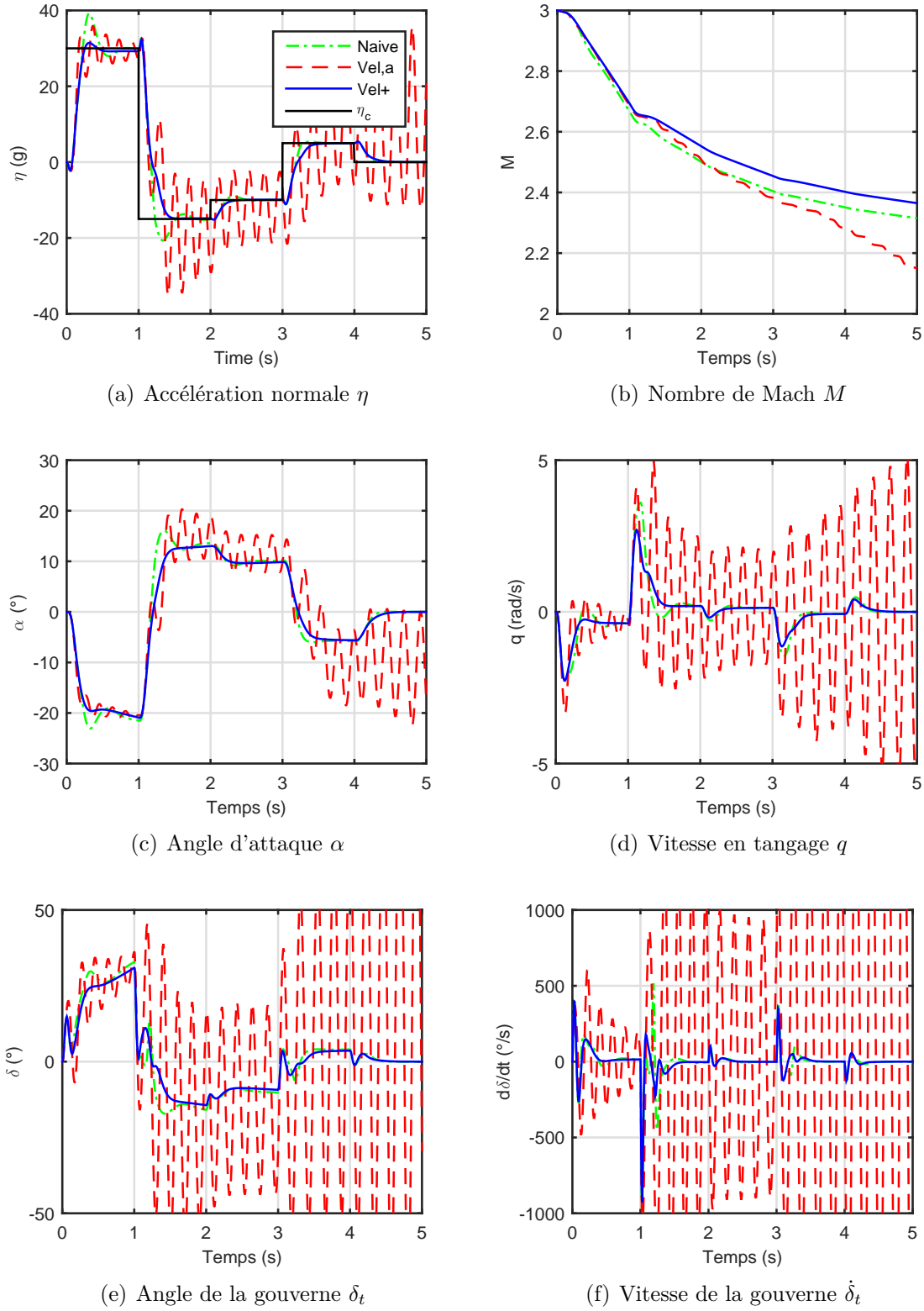


Figure 5.15 Comparaison de la réponse du missile en boucle fermée pour les trois stratégies d'implémentation 1) naïve  $\mathcal{C}_n$ ; 2) *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{vel,a}$  pour  $\varepsilon = 0.02$ ; 3) stratégie de filtrage  $\mathcal{C}_{vel+}$  pour  $\tau = 0.02$

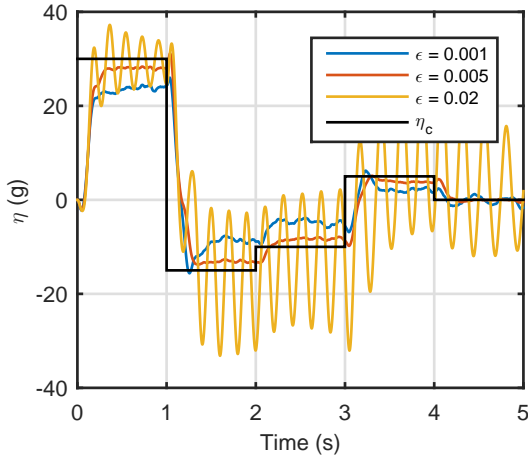
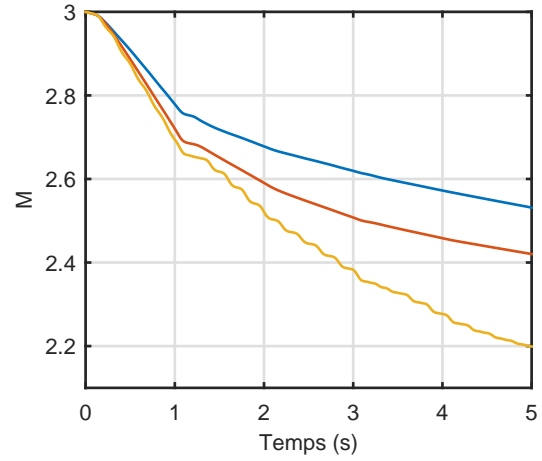
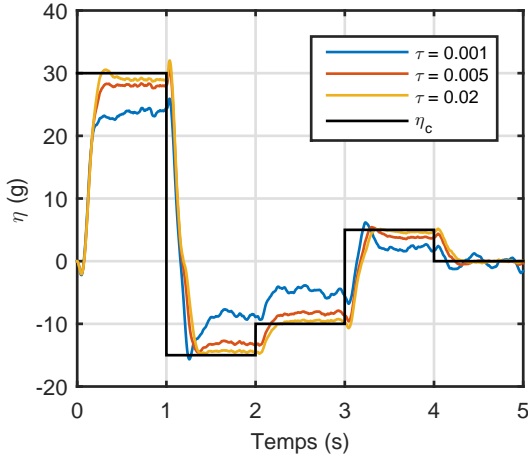
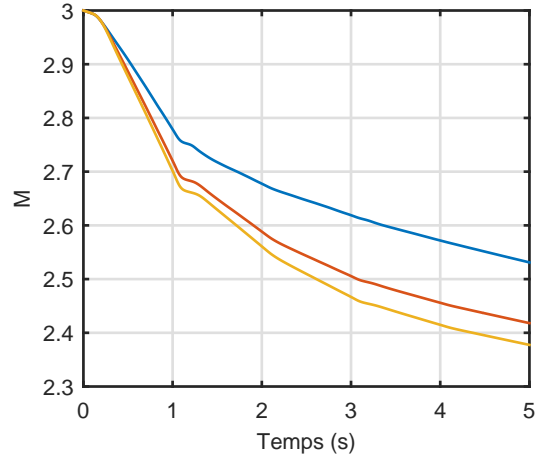
(a)  $\mathcal{C}_{vel,a}$  - Accélération normale(b)  $\mathcal{C}_{vel,a}$  - Nombre de Mach(c)  $\mathcal{C}_{vel+}$  - Accélération normale(d)  $\mathcal{C}_{vel+}$  - Nombre de Mach

Figure 5.16 Réponse du missile en boucle fermée pour  $\mathcal{C}_{vel,a}$  (première ligne) et  $\mathcal{C}_{vel+}$  (deuxième ligne) en présence de bruits de mesure

Pour conclure, on analyse le comportement des composantes de pré/post-filtrage pour  $\mathcal{C}_{vel+}$  avec  $\tau = 0.02$ . Les évolutions temporelles des états des filtres sont données à la Fig. 5.17. Conformément à l'analyse précédemment effectuée, on observe que les grandeurs  $x_{r,f} - x_{\eta,f}$ ,  $\eta - x_{\eta,f}$ ,  $q - x_{q,f}$  et  $v$  s'annulent à l'équilibre, permettant ainsi d'éviter l'émergence des TCC. De manière qualitative, la stratégie de pré-filtrage consiste à injecter une version filtrée du signal de manière à en capturer des variations locales autour du point de fonctionnement  $\theta$  courant, comme on peut l'observer sur les Fig. 5.17(a)-5.17(c). La pré-commande  $v$  étant nulle à l'équilibre, la commande à imposer en entrée du système est générée par la composante intégrale du post-filtrage, comme l'illustre la Fig. 5.17(d).

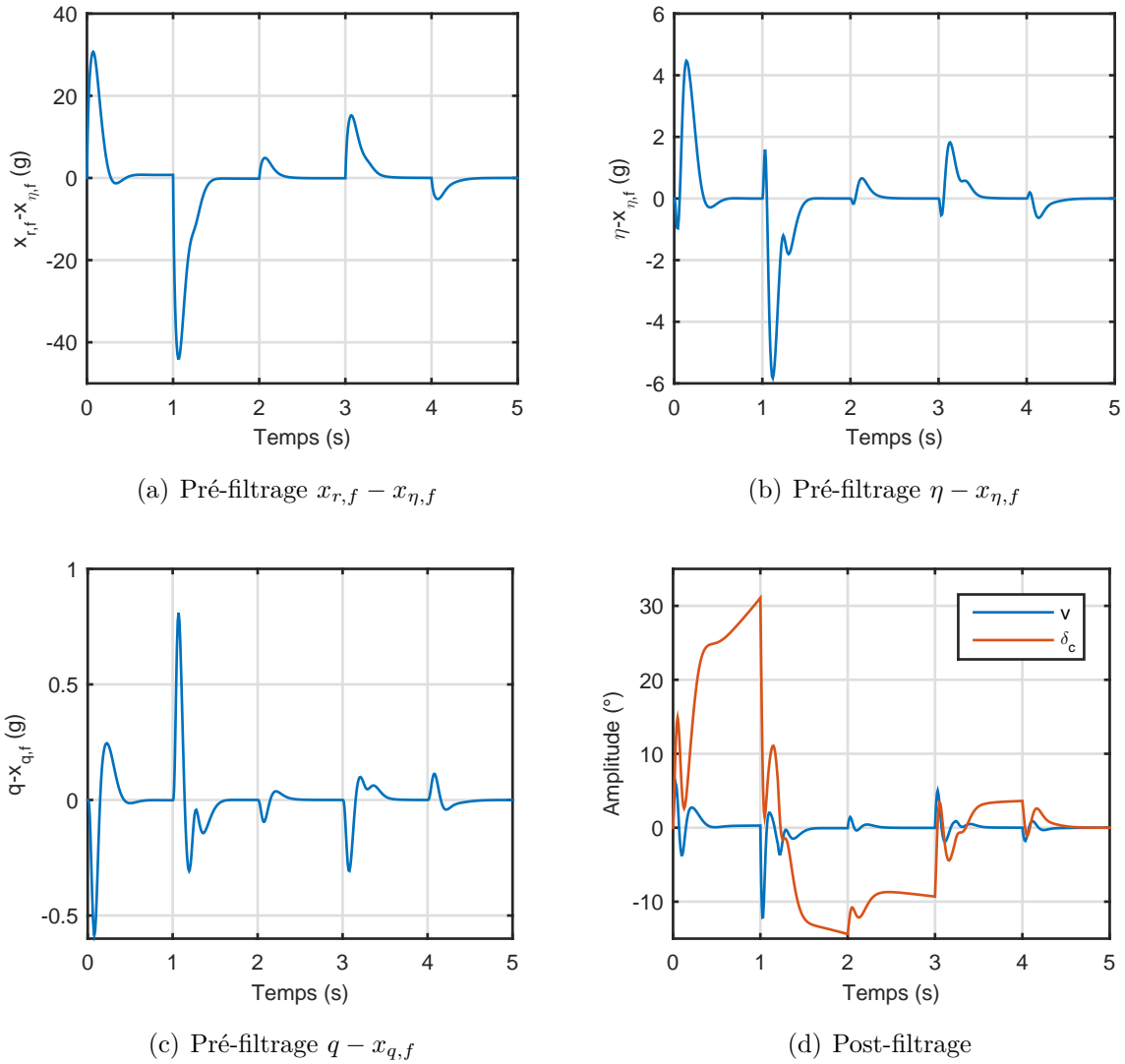


Figure 5.17 Évolution des états de pré/post-filtrage de  $\mathcal{C}_{vel+}$  avec  $\tau = 0.02$  pour le contrôle du missile

#### 5.4.2 Suppression active du *flutter* pour le BACT

Pour la seconde application, on reprend le problème du contrôle du BACT en suppression du *flutter* et en suivi de référence de type échelon tel qu'introduit à la Sous-Section 4.1.4.2. En particulier, on considère les gains qui ont été obtenus à la Sous-Section 4.2.3.2 par la méthode de placement de structure propre relativement à l'architecture de contrôleur séquencé (4.77) en négligeant la contribution des TCC. Le placement de pôles avait été effectué relativement au placement de pôles désiré résumé par le Tab. 4.12. On cherche alors pour ces gains à comparer les trois implémentations listées ci-dessous :

1. L'implémentation naïve donnée par :

$$\mathcal{C}_n \triangleq \begin{cases} \dot{x}_i = \alpha_r - \alpha \\ \beta_c = K_i(\boldsymbol{\theta})x_i + K_\alpha(\boldsymbol{\theta})\alpha + K_h(\boldsymbol{\theta})h + K_{\dot{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})\dot{\alpha} + K_{\dot{h}}(\boldsymbol{\theta})\dot{h} \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, U) \end{cases} \quad (5.84)$$

qui, comme cela a déjà été vu, donne lieu à l'émergence de TCC non pris en compte dans la phase de synthèse.

2. Ne disposant pas des signaux  $\ddot{\alpha}$  et  $\ddot{h}$ , on recourt à l'implémentation *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation de  $\dot{\alpha}$  et de la vitesse en tangage  $\dot{h}$  avec le paramètre  $\varepsilon > 0$  :

$$\mathcal{C}_{\text{vel,a}} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_{\dot{\alpha},f} = -\varepsilon^{-1}x_{\dot{\alpha},f} + \varepsilon^{-1}\dot{\alpha} \\ \dot{x}_{\dot{h},f} = -\varepsilon^{-1}x_{\dot{h},f} + \varepsilon^{-1}\dot{h} \\ v = \varepsilon K_i(\boldsymbol{\theta})[\alpha_r - \alpha] + \varepsilon K_\alpha(\boldsymbol{\theta})\dot{\alpha} + \varepsilon K_h(\boldsymbol{\theta})\dot{h} \\ \quad + K_{\dot{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})[\dot{\alpha} - x_{\dot{\alpha},f}] + K_{\dot{h}}(\boldsymbol{\theta})[\dot{h} - x_{\dot{h},f}] \\ \dot{\beta}_c = \varepsilon^{-1}v \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, U) \end{cases} \quad (5.85)$$

Notons que l'implémentation utilisée ici est un mixte entre l'implémentation *velocity-based algorithm* classique et son approximation par pseudo-dérivation. En effet, ayant supposé initialement que  $\dot{\alpha}$  et  $\dot{h}$  sont mesurés, il est inutile de les approximer. Ainsi, la stratégie de pseudo-dérivation ne porte que sur les deux grandeurs non mesurées  $\ddot{\alpha}$  et  $\ddot{h}$ . De manière analogue à ce qui est fait pour le gain  $K_i$ , il faut dans l'implémentation multiplier les gains  $K_\alpha$  et  $K_h$  par le facteur  $\varepsilon$  de manière à compenser le facteur  $\varepsilon^{-1}$  impliqué dans la composante intégrale générant le signal de sortie.

3. L'implémentation basée sur une stratégie de pré/post filtrage de paramètre  $\tau > 0$  :

$$\mathcal{C}_{\text{vel}+} \triangleq \begin{cases} \dot{x}_{\alpha_r, f} = -\tau^{-1}x_{\alpha_r, f} + \tau^{-1}\alpha_r \\ \dot{x}_{\alpha, f} = -\tau^{-1}x_{\alpha, f} + \tau^{-1}\alpha \\ \dot{x}_{h, f} = -\tau^{-1}x_{h, f} + \tau^{-1}h \\ \dot{x}_{\dot{\alpha}, f} = -\tau^{-1}x_{\dot{\alpha}, f} + \tau^{-1}\dot{\alpha} \\ \dot{x}_{\dot{h}, f} = -\tau^{-1}x_{\dot{h}, f} + \tau^{-1}\dot{h} \\ v = \tau K_i(\boldsymbol{\theta})[x_{\alpha_r, f} - x_{\alpha, f}] + K_\alpha(\boldsymbol{\theta})[\alpha - x_{\alpha, f}] + K_h(\boldsymbol{\theta})[h - x_{h, f}] \\ \quad + K_{\dot{\alpha}}(\boldsymbol{\theta})[\dot{\alpha} - x_{\dot{\alpha}, f}] + K_{\dot{h}}(\boldsymbol{\theta})[\dot{h} - x_{\dot{h}, f}] \\ \dot{x}_{v, f} = \tau^{-1}v \\ \beta_c = x_{v, f} + v \\ \boldsymbol{\theta} = (\alpha, M) \end{cases} \quad (5.86)$$

Le gain  $K_i$  ne s'annulant pas sur le domaine d'opération (ce qui est bien le cas pour les gains considérés), les Hypothèses 5.2 sont rencontrées et donc les Théorèmes 5.1 et 5.6 garantissent la pertinence de la stratégie d'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ .

Les résultats de simulation obtenus pour les trois architectures de contrôle proposées sont donnés à la Fig. 5.18 pour  $\varepsilon = \tau = 0.005$  et  $\varepsilon = \tau = 0.05$ . La vitesse d'écoulement de l'air est fixée à  $U = 16$  m/s et on considère des conditions initiales donnant lieu à l'émergence de cycles limites d'oscillation pour le système en boucle ouverte. À l'instant  $t = 5$  s, le système est placé en boucle fermée pour une entrée de référence  $\alpha_r = 0^\circ$  afin d'évaluer la capacité du contrôleur à supprimer le phénomène de *flutter*. Finalement, à  $t = 15$  s, l'entrée de référence passe à  $\alpha_r = 10^\circ$  afin d'évaluer la performance en poursuite.

L'implémentation naïve  $\mathcal{C}_n$  ne permet que de réduire l'amplitude des oscillations sans totalement supprimer le phénomène de *flutter*. Il rend de plus le système bouclé instable pour des entrées de référence au-delà de  $8^\circ$ . L'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel},a}$  ne permet pas, quant à elle, pour les deux valeurs testées du paramètre de pseudo-dérivation  $\varepsilon$ , de supprimer le phénomène de *flutter*. Pour  $\varepsilon = 0.005$ , on observe une réduction de l'amplitude des oscillations mais avec une fréquence de ces dernières accrue (Fig. 5.18(a) et 5.18(c)). Pour  $\varepsilon = 0.05$ , on observe la déstabilisation du système dès lors qu'il est placé en boucle fermée à  $t = 5$  s (Fig. 5.18(b) et 5.18(d)). *A contrario*, l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  permet d'obtenir une bonne suppression du *flutter* et un bon suivi de référence pour les deux paramètres de filtrage  $\tau$  testés.

Pour conclure, l'évolution des composantes de pré/post-filtrage de  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  pour  $\varepsilon = 0.05$  et dans les mêmes conditions que précédemment est illustrée à la Fig. 5.19. De manière à obtenir une

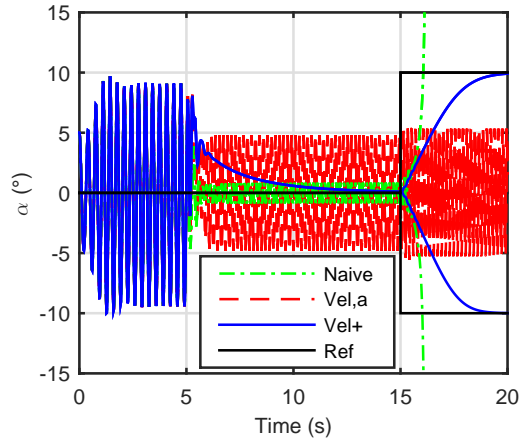
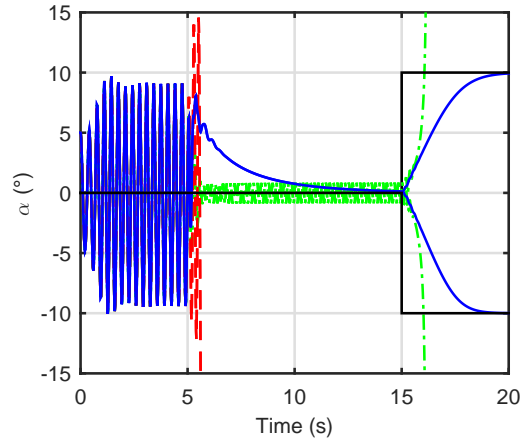
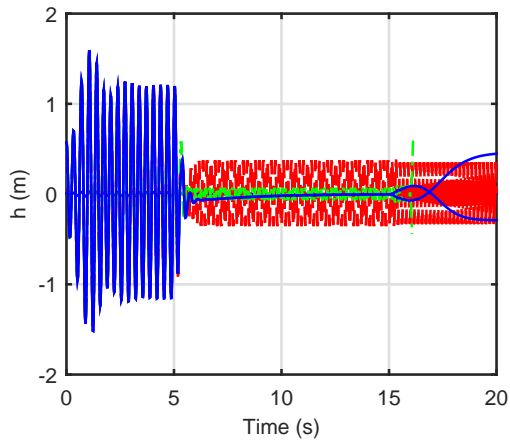
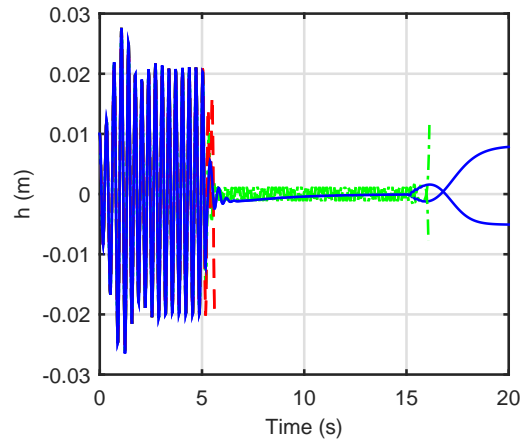
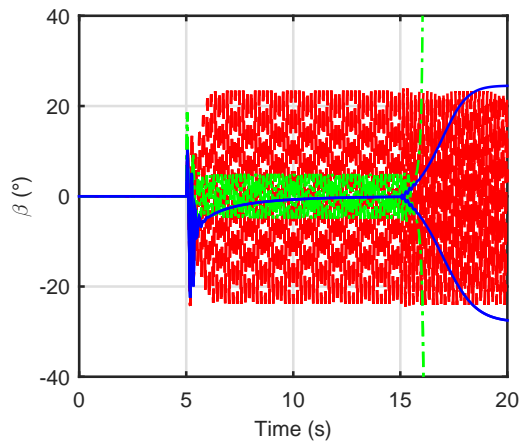
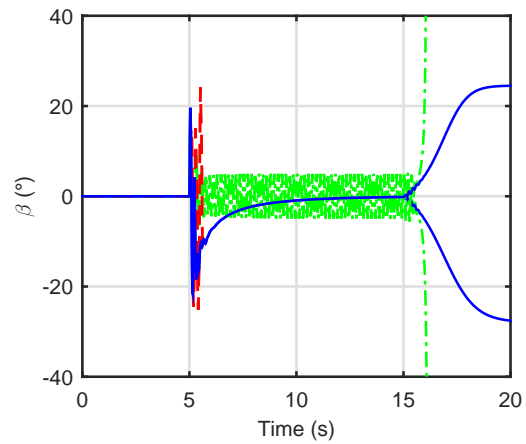
(a) Angle de torsion  $\alpha$ ;  $\varepsilon = \tau = 0.005$ (b) Angle de torsion  $\alpha$ ;  $\varepsilon = \tau = 0.05$ (c) Déplacement en flexion  $h$ ;  $\varepsilon = \tau = 0.005$ (d) Déplacement en flexion  $h$ ;  $\varepsilon = \tau = 0.05$ (e) Position de la gouverne  $\beta$ ;  $\varepsilon = \tau = 0.005$ (f) Position de la gouverne  $\beta$ ;  $\varepsilon = \tau = 0.05$ 

Figure 5.18 Comparaison de la réponse du BACT en boucle fermée pour les trois stratégies d'implémentation 1) implémentation naïve  $\mathcal{C}_n$ ; 2) implémentation *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{vel,a}$ ; 3) Implémentation avec stratégie de filtrage  $\mathcal{C}_{vel+}$

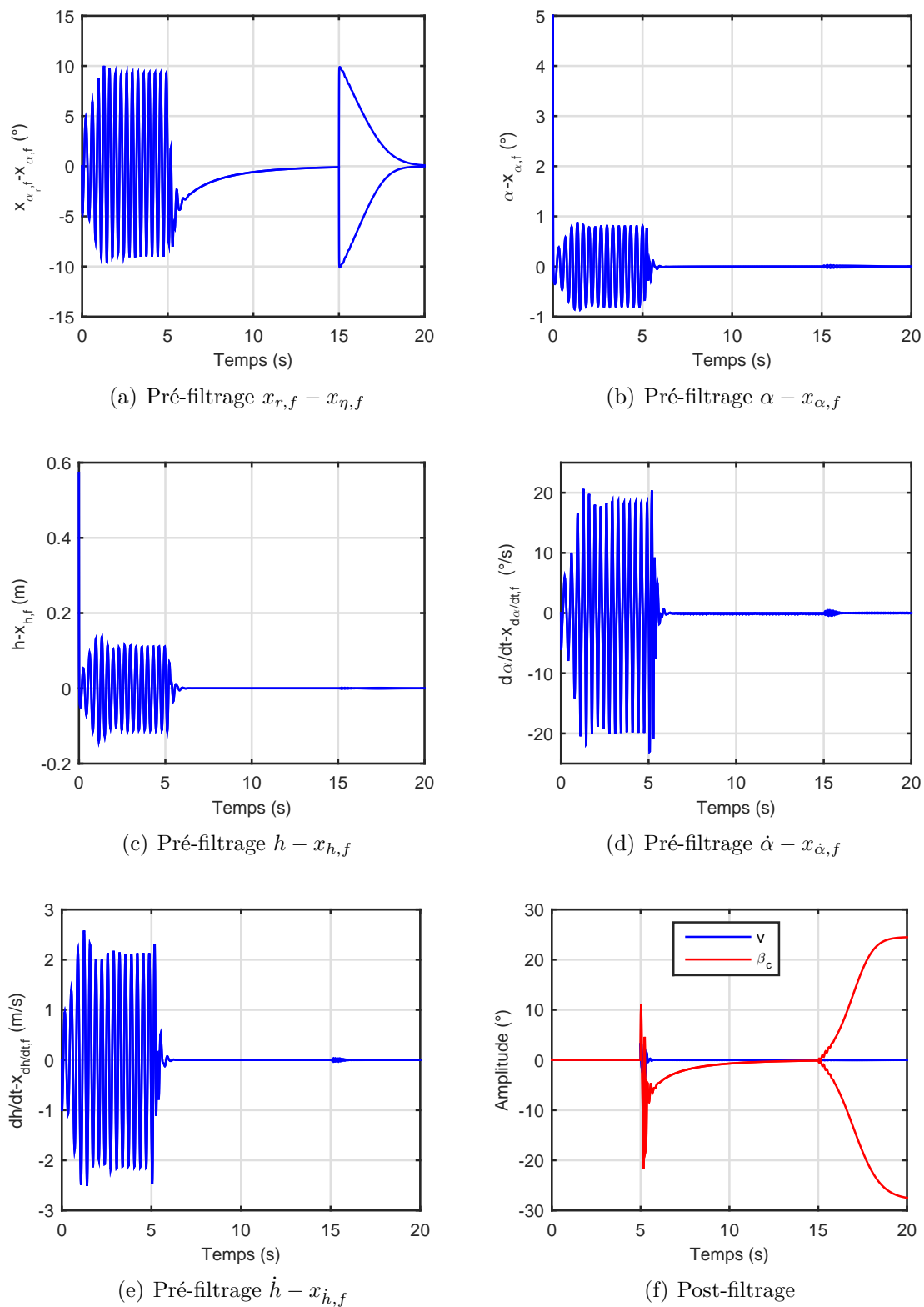


Figure 5.19 Évolution des composantes de pré/post-filtrage de  $\mathcal{C}_{vel+}$  avec  $\tau = 0.05$  pour le contrôle du BACT



mise en action efficace du contrôleur, la stratégie de pré-filtrage est mise en œuvre avant la mise en boucle fermée du système à  $t = 5$  s (cf. Fig. 5.19(a)-5.19(e)). La stratégie de post-filtrage, illustrée à la Fig. 5.19(f), est quant à elle initiée lors de la mise en boucle fermée du système de manière à éviter la divergence de la composante intégrale. On observe ainsi lors des cinq premières secondes une oscillation des états de pré-filtrage dû aux cycles limites d'oscillation régissant le mouvement du BACT. Au moment de la fermeture de la boucle de contrôle, ces mêmes composantes de pré-filtrage, ainsi que la pré-commande  $v$ , convergent rapidement vers zéro. La stratégie de post-filtrage génère alors via la composante intégrale une commande adéquate pour le système bouclé. À  $t = 15$  s, lorsque la référence  $\alpha_r$  passe de 0 deg à  $\pm 10$  deg, on observe que les composantes de pré-filtrage  $\alpha - x_{\alpha,f}$ ,  $h - x_{h,f}$ ,  $\dot{\alpha} - x_{\dot{\alpha},f}$  et  $\dot{h} - x_{\dot{h},f}$  présentent des amplitudes relativement faibles. A première vue, l'erreur de suivi filtrée  $x_{r,f} - x_{\eta,f}$  présente une évolution dont l'amplitude est d'un ordre de grandeur significativement plus important. Cette amplitude est néanmoins à relativiser dû au facteur d'échelle  $\tau = 0.05$  qui intervient au niveau du gain intégral dans l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$ .

## 5.5 Application pour les contrôleurs dynamiques

Les applications précédentes concernaient un retour d'état statique. Dans cette section, on développe le cas de contrôleurs dynamiques. On se focalise en particulier sur la mise en œuvre de la méthode d'implémentation améliorée dans le cadre de contrôleurs dont la dynamique est basée sur des observateurs locaux de type Luenberger.

### 5.5.1 Implémentation de contrôleurs séquencés synthétisés sur la base d'observateurs locaux

Dans la Section 5.3, on a étudié le cas général de l'implémentation d'une famille de contrôleurs  $\mathcal{C}_l$  dont la dynamique en un point d'opération  $\theta_e$  donné est caractérisée sous la forme générique (5.6). Dans cette section, on considère le cas particulier d'une famille de contrôleurs dont la dynamique en un point d'opération donné est le résultat d'un gain de retour d'état combiné à l'estimation de l'état du système par le recours à un observateur de type Luenberger. Pour cela, on formule les hypothèses classiques suivantes.

**Hypothèse 5.3 (Hypothèses de détectabilité/contrôlabilité)** *Dans le contexte du contrôle du système  $\mathcal{S}(\delta)$  (5.1), dont la dynamique linéarisée  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta)$  est donnée par (5.2), on suppose que pour tout  $\theta_e \in \Theta$  et tout  $\delta \in \Delta$  :*

- (H1) *la paire  $(\mathbf{A}^{\mathcal{S}}(\theta_e, \delta), \mathbf{C}^{\mathcal{S}}(\theta_e, \delta))$  est détectable ;*
- (H2) *la paire  $(\mathbf{A}^{\mathcal{S}}(\theta_e, \delta), \mathbf{B}_u^{\mathcal{S}}(\theta_e, \delta))$  est contrôlable ;*

(H3) la matrice ci-dessous est de ligne rang plein :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{D}_{u,1}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}, \quad (5.87)$$

avec  $\mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \partial h_1 / \partial \mathbf{x}|_{\mu(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})} \in \mathbb{R}^{p_1 \times n}$  et  $\mathbf{D}_{u,1}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \partial h_1 / \partial \mathbf{u}|_{\mu(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})} \in \mathbb{R}^{p_1 \times m}$ .

### 5.5.1.1 Observateur d'ordre complet

Soit une configuration « nominale »  $\boldsymbol{\delta}_0 \in \Delta$  du vecteur d'incertitudes paramétriques. On suppose que l'on dispose pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  d'un contrôleur LTI prenant la forme suivante :

$$\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e) \triangleq \begin{cases} \dot{\boldsymbol{\delta}}\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{\delta}\mathbf{w} + \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_e)[\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{y}} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{y}] \\ \boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{\delta}\mathbf{u} + \mathbf{D}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\boldsymbol{\delta}\mathbf{w} \\ \boldsymbol{\delta}\dot{\mathbf{x}}_i = \boldsymbol{\delta}\mathbf{r} - \boldsymbol{\delta}\mathbf{y}_1 \\ \boldsymbol{\delta}\mathbf{u} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e)\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_i \end{cases} \quad (5.88)$$

où  $\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^n$  représente l'estimation du vecteur d'état  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}(t) \in \mathbb{R}^n$  du système,  $\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{y}}(t) \in \mathbb{R}^p$  est la sortie estimée et  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_i(t) \in \mathbb{R}^{p_1}$  est la composante intégrale du contrôleur. Dans cette configuration, les deux premières lignes de (5.88) forment un observateur de Luenberger du système LTI « nominal » à contrôler  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)$  (5.2), tandis que les deux lignes restantes constituent la composante intégrale et le retour d'état estimé. Les paramètres ajustables du contrôleur sont le gain d'observation  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ , le gain du retour d'état estimé  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et le gain intégral  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$ .

Le point (H1) de l'Hypothèse 5.3 assure l'existence d'un gain d'observateur  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_e) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  tel que  $\mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0) + \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_e)\mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)$  est Hurwitz. Similairement, (H2) et (H3) garantissent selon le test Popov-Belovich-Hautus (Zhou et al., 1996) que le système LTI  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)$ , une fois augmenté avec la composante intégrale  $\mathbf{x}_i$ , est contrôlable. En d'autres termes, on peut trouver un gain  $\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\theta}_e) = [\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_e) \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e)] \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_1)}$  telle que  $\mathbf{A}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0) + \mathbf{B}_a^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)\mathbf{K}_a(\boldsymbol{\theta}_e)$  est Hurwitz, où

$$\mathbf{A}_a^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{0}_{n \times p_1} \\ -\mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{0}_{p_1 \times p_1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_a^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \\ -\mathbf{D}_{u,1}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}. \quad (5.89)$$

Plus globalement, on suppose que les gains  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e)$  peuvent être choisis afin d'assurer la stabilité du système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}), \mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e))$  pour toute configuration

incertaine  $\delta \in \Delta$ .

Afin de vérifier les hypothèses de mise en œuvre de l'implémentation améliorée du *velocity-based algorithm*, on reformule la dynamique du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donnée par (5.88) comme suit :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^c(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^c(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{x}_i - \mathbf{L}(\theta_e) \delta \mathbf{y} \\ \quad + [\mathbf{B}_w(\theta_e, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta_e) \mathbf{D}_w(\theta_e, \delta)] \delta \mathbf{w} \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}(\theta_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{K}_i(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i \end{cases} \quad (5.90)$$

où  $\delta \mathbf{x}_c = \delta \hat{\mathbf{x}}$  et, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,

$$\mathbf{A}_c^c(\theta, \delta_0) = \mathbf{A}^S(\theta, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta) \mathbf{C}^S(\theta, \delta_0) + [\mathbf{B}_u^S(\theta, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta) \mathbf{D}_u^S(\theta, \delta_0)] \mathbf{K}(\theta), \quad (5.91a)$$

$$\mathbf{A}_i^c(\theta, \delta_0) = [\mathbf{B}_u^S(\theta, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta) \mathbf{D}_u^S(\theta, \delta_0)] \mathbf{K}_i(\theta). \quad (5.91b)$$

De manière à pouvoir mettre en œuvre la stratégie d'implémentation améliorée<sup>6</sup> (5.43), on doit vérifier l'Hypothèse 5.2. La condition (H1) est satisfaite dès lors que les matrices de la représentation d'état de  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta_0)$  ainsi que les gains  $\mathbf{L}(\theta_e)$ ,  $\mathbf{K}(\theta_e)$  et  $\mathbf{K}_i(\theta_e)$  dépendent continument du point d'opération  $\theta_e \in \Theta$ . De manière à satisfaire la condition (H3), on suppose que la dimension de l'entrée de contrôle du système  $\mathbf{u}$  coïncide avec celle du signal de référence  $\mathbf{r}$ , i.e.,  $m = p_1$ . L'hypothèse de stabilité interne (H4) est quant à elle une contrainte portant sur le choix des gains du contrôleur  $\mathbf{L}(\theta_e)$ ,  $\mathbf{K}(\theta_e)$  et  $\mathbf{K}_i(\theta_e)$ . Finalement, (H2) requiert, lorsque combinée avec l'égalité de dimensions  $m = p_1$  imposée par (H3), que la matrice  $\mathbf{E}(\theta_e)$  définie par (5.44) soit inversible. On peut voir que

$$\mathbf{E}(\theta_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_n & \mathbf{B}_u^S(\theta_e, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta_e) \mathbf{D}_u^S(\theta_e, \delta_0) \\ \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{A}^S(\theta_e, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta_e) \mathbf{C}^S(\theta_e, \delta_0) & \mathbf{0}_{n \times p_1} \\ \mathbf{K}(\theta_e) & \mathbf{K}_i(\theta_e) \end{bmatrix}. \quad (5.92)$$

La matrice  $\mathbf{L}(\theta_e)$  étant choisie de manière à ce que  $\mathbf{A}^S(\theta_e, \delta_0) + \mathbf{L}(\theta_e) \mathbf{C}^S(\theta_e, \delta_0)$  soit Hurwitz afin que l'erreur d'estimation converge vers zéro, la matrice  $\mathbf{E}(\theta_e)$  est inversible si et seulement si le gain intégral  $\mathbf{K}_i(\theta_e)$  est inversible. Lorsque ces différentes conditions sont vérifiées, les

---

6. Dans la Section 5.3, l'implémentation a été étudiée en l'absence de contribution du signal exogène  $\delta \mathbf{w}$  dans la dynamique de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$ . Néanmoins, on peut voir que  $\delta \mathbf{w}$  joue dans la dynamique LTI (5.90) un rôle similaire à celui de  $\delta \mathbf{r}$  dans l'implémentation initialement étudiée (5.6), i.e., celui d'un signal exogène utilisé en entrée du contrôleur. Ainsi, les conclusions précédemment obtenues demeurent en appliquant la même stratégie de pré-filtrage au signal exogène  $\mathbf{w}$  que pour les autres signaux d'entrée du contrôleur.

Théorèmes 5.1 et 5.6 garantissent le fonctionnement adéquat de l'implémentation :

$$\mathcal{C}_{\text{vel}+} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{r,f} = -\tau^{-1}\mathbf{x}_{r,f} + \tau^{-1}\mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{x}}_{y,f} = -\tau^{-1}\mathbf{x}_{y,f} + \tau^{-1}\mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{x}}_{w,f} = -\tau^{-1}\mathbf{x}_{w,f} + \tau^{-1}\mathbf{w} \\ \dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)\mathbf{v} + \mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)[\mathbf{w} - \mathbf{x}_{w,f}] + \mathbf{L}(\boldsymbol{\theta})[\hat{\mathbf{y}} - [\mathbf{y} - \mathbf{x}_{y,f}]] \\ \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{D}_u^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)\mathbf{v} + \mathbf{D}_w^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}_0)[\mathbf{w} - \mathbf{x}_{w,f}] \\ \mathbf{v} = \mathbf{K}(\boldsymbol{\theta})\hat{\mathbf{x}} + \tau\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta})[\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y_1,f}] \\ \dot{\mathbf{x}}_{v,f} = \tau^{-1}\mathbf{v} \\ \mathbf{u} = \mathbf{x}_{v,f} + \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.93)$$

où  $\mathbf{x}_{y_1,f}(t)$  dénote le vecteur composé des  $p_1$  premières lignes du vecteur  $\mathbf{x}_{y_1}(t)$ .

Bien que pour chaque point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  le contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\boldsymbol{\theta}_e)$  contienne un observateur de Luenberger, l'implémentation finale  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  ne comporte pas un tel observateur pour le système non linéaire d'origine. En effet, alors que  $\boldsymbol{\delta}\hat{\mathbf{x}}$  permet de reconstruire l'état  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$  du système LTI  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)$ , le signal  $\hat{\mathbf{x}}$  ne permet pas de reconstituer le vecteur d'état  $\mathbf{x}$  du système d'origine  $\mathcal{S}(\boldsymbol{\delta}_0)$ . Pour s'en convaincre, il suffit de noter qu'en général, le vecteur d'état du système à l'équilibre  $\mathbf{x}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0)$  est non nul, alors que la stratégie d'implémentation, de manière à éviter l'émergence des TCC, garantit (sous réserve de la satisfaction des hypothèses précédemment discutées) que  $\hat{\mathbf{x}}_e(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}_0) = \mathbf{0}$  pour tout point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ . Cela ne représente pas une limitation dans la mesure où l'objectif de l'implémentation n'est ici pas d'essayer de reconstituer l'état du système non linéaire, mais de permettre de préserver la dynamique de la famille de contrôleurs LTI  $\mathcal{C}_l$  obtenue lors du design point à point tel que formalisé par le Problème 5.1.

### 5.5.1.2 Observateur d'ordre réduit

De manière à réduire l'ordre de la dynamique de l'observateur, on envisage le cas d'observateurs d'ordre réduit tels que décrits dans (Friedland, 2012). Pour cela, supposons que  $p \leq n$  et introduisons  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_1(t) \in \mathbb{R}^p$  et  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_2(t) \in \mathbb{R}^{n-p}$  tels que  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_1^\top & \boldsymbol{\delta}\mathbf{x}_2^\top \end{bmatrix}^\top$ . Conformément à cette nouvelle écriture de  $\boldsymbol{\delta}\mathbf{x}$ , les matrices de la représentation d'état de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  donnée

par (5.2) sont réécrites comme suit :

$$\mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{A}_{12}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{A}_{21}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{A}_{22}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_u^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{u,1}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{B}_{u,2}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}, \quad (5.94)$$

$$\mathbf{B}_w^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{B}_{w,1}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{B}_{w,2}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix}, \quad (5.95)$$

où  $\mathbf{A}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\mathbf{B}_{u,1}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^{p \times m}$ ,  $\mathbf{B}_{w,1}^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^{p \times q}$  et  $\mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ; les dimension des autres matrices en sont déduites. De manière à mettre en place l'observateur d'ordre réduit, on suppose que la matrice  $\mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  est inversible, i.e.,  $\mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{R})$  pour tout  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et tout  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ . On suppose de plus que  $\mathbf{D}_u^S = \mathbf{0}_{p \times m}$  et  $\mathbf{D}_w^S = \mathbf{0}_{p \times q}$ .

Pour un point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$  et une configuration incertaine  $\boldsymbol{\delta}$  donnés, on considère le changement de base du vecteur d'état suivant :

$$\boldsymbol{\delta \bar{x}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\delta \bar{x}}_1 \\ \boldsymbol{\delta \bar{x}}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \mathbf{0}_{(n-p) \times p} & \mathbf{I}_{n-p} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta x}, \quad (5.96)$$

permettant de réécrire la dynamique de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta})$  sous la forme :

$$\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) = \begin{cases} \boldsymbol{\delta \dot{\bar{x}}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{A}}_{11}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \bar{\mathbf{A}}_{12}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \bar{\mathbf{A}}_{21}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) & \bar{\mathbf{A}}_{22}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta \bar{x}} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{u,1}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \bar{\mathbf{B}}_{u,2}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta u} + \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{B}}_{w,1}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \\ \bar{\mathbf{B}}_{w,2}(\boldsymbol{\theta}_e, \boldsymbol{\delta}) \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta w} \\ \boldsymbol{\delta y} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_p & \mathbf{0}_{p \times (n-p)} \end{bmatrix} \boldsymbol{\delta \bar{x}} \end{cases} \quad (5.97)$$

où, pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  et  $\boldsymbol{\delta} \in \Delta$ ,

$$\bar{\mathbf{A}}_{11}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = [\mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{A}_{11}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{A}_{21}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})] \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})^{-1}, \quad (5.98a)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{12}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = -\bar{\mathbf{A}}_{11}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{A}_{12}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{A}_{22}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}), \quad (5.98b)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{21}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{A}_{21}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})^{-1}, \quad (5.98c)$$

$$\bar{\mathbf{A}}_{22}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{A}_{22}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) - \mathbf{A}_{21}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta})^{-1} \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}), \quad (5.98d)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{u,1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{B}_{u,1}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{B}_{u,2}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}), \quad (5.98e)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{u,2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{B}_{u,2}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}), \quad (5.98f)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{w,1}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{C}_1^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{B}_{w,1}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) + \mathbf{C}_2^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) \mathbf{B}_{w,2}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}), \quad (5.98g)$$

$$\bar{\mathbf{B}}_{w,2}(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}) = \mathbf{B}_{w,2}^S(\boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\delta}). \quad (5.98h)$$

Soit une configuration « nominale »  $\boldsymbol{\delta}_0 \in \Delta$  du vecteur d'incertitudes paramétriques. On

synthétise pour chaque point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  un contrôleur par retour de sortie avec observateur d'ordre réduit sous la forme suivante (Friedland, 2012) :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) \triangleq \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}_s(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{s} + \mathbf{M}_y(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{y} + \mathbf{M}_u(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_w(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{w} \\ \delta \hat{\mathbf{x}}_2 = \delta \mathbf{s} + \mathbf{G}(\theta_e) \delta \mathbf{y} \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_1(\theta_e) \delta \mathbf{y} + \mathbf{K}_2(\theta_e) \delta \hat{\mathbf{x}}_2 + \mathbf{K}_i(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i \end{cases} \quad (5.99)$$

où  $\delta \mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n-p}$ ,  $\delta \mathbf{x}_i \in \mathbb{R}^{p_1}$  et, pour tout  $\theta \in \Theta$ ,

$$\mathbf{M}_s(\theta, \delta_0) = \bar{\mathbf{A}}_{22}(\theta, \delta_0) - \mathbf{G}(\theta) \bar{\mathbf{A}}_{12}(\theta, \delta_0), \quad (5.100a)$$

$$\mathbf{M}_y(\theta, \delta_0) = [\bar{\mathbf{A}}_{22}(\theta, \delta_0) - \mathbf{G}(\theta) \bar{\mathbf{A}}_{12}(\theta, \delta_0)] \mathbf{G}(\theta) - \mathbf{G}(\theta) \bar{\mathbf{A}}_{11}(\theta, \delta_0) + \bar{\mathbf{A}}_{21}(\theta, \delta_0), \quad (5.100b)$$

$$\mathbf{M}_u(\theta, \delta_0) = \bar{\mathbf{B}}_{u,2}(\theta, \delta_0) - \mathbf{G}(\theta) \bar{\mathbf{B}}_{u,1}(\theta, \delta_0), \quad (5.100c)$$

$$\mathbf{M}_w(\theta, \delta_0) = \bar{\mathbf{B}}_{w,2}(\theta, \delta_0) - \mathbf{G}(\theta) \bar{\mathbf{B}}_{w,1}(\theta, \delta_0). \quad (5.100d)$$

Les paramètres ajustables du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  sont le gain de l'observateur réduit  $\mathbf{G}(\theta_e) \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$ , ainsi que les gains de contrôle  $\mathbf{K}_1(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times p}$ ,  $\mathbf{K}_2(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times (n-p)}$  et  $\mathbf{K}_i(\theta_e) \in \mathbb{R}^{m \times p_1}$ .

En notant  $\delta \mathbf{e}_o = \delta \hat{\mathbf{x}}_2 - \delta \bar{\mathbf{x}}_2$  l'erreur d'observation, la dynamique de l'observateur est régie par  $\delta \dot{\mathbf{e}}_o = \mathbf{M}_s(\theta, \delta_0) \delta \mathbf{e}_o$ . La condition (H1) de l'Hypothèse 5.3 assure, après changement de base et recours au test de Popov-Belovich-Hautus (Zhou et al., 1996), la détectabilité de la paire  $(\bar{\mathbf{A}}_{22}(\theta_e, \delta_0), \bar{\mathbf{A}}_{12}(\theta_e, \delta_0))$ , garantissant ainsi l'existence d'un gain d'observation  $\mathbf{G}(\theta_e) \in \mathbb{R}^{(n-p) \times p}$  tel que  $\mathbf{M}_s(\theta, \delta_0) = \bar{\mathbf{A}}_{22}(\theta_e, \delta_0) - \mathbf{G}(\theta_e) \bar{\mathbf{A}}_{12}(\theta_e, \delta_0)$  soit Hurwitz et donc la convergence exponentielle vers zéro de l'erreur d'observation. De manière analogue au cas de l'observateur de Luenberger précédemment investigué, les hypothèses (H2) et (H3) assurent l'existence d'un gain  $\mathbf{K}_a(\theta_e) = [\mathbf{K}_1(\theta_e) \mathbf{K}_2(\theta_e) \mathbf{K}_i(\theta_e)] \in \mathbb{R}^{m \times (n+p_1)}$  tels que  $\mathbf{A}_a^S(\theta_e, \delta_0) + \mathbf{B}_a^S(\theta_e, \delta_0) \mathbf{K}_a(\theta_e)$  est Hurwitz.

Plus globalement, on suppose que les gains  $\mathbf{G}(\theta_e)$ ,  $\mathbf{K}_1(\theta_e)$ ,  $\mathbf{K}_2(\theta_e)$  et  $\mathbf{K}_i(\theta_e)$  peuvent être choisis afin d'assurer la stabilité du système bouclé  $\mathcal{CL}(\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta), \mathcal{C}_l(\theta_e))$  pour toute configuration incertaine  $\delta \in \Delta$ .

La dynamique du contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  donnée par (5.99) peut être réécrite sous la forme :

$$\mathcal{C}_l(\theta_e) = \begin{cases} \delta \dot{\mathbf{x}}_i = \delta \mathbf{r} - \delta \mathbf{y}_1 \\ \delta \dot{\mathbf{x}}_c = \mathbf{A}_c^C(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{A}_i^C(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{x}_i + \mathbf{B}_y^C(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{y} + \mathbf{M}_w(\theta_e, \delta_0) \delta \mathbf{w} \\ \delta \mathbf{u} = \mathbf{K}_2(\theta_e) \delta \mathbf{x}_c + \mathbf{K}_i(\theta_e) \delta \mathbf{x}_i + [\mathbf{K}_1(\theta_e) + \mathbf{K}_2(\theta_e) \mathbf{G}(\theta_e)] \delta \mathbf{y} \end{cases} \quad (5.101)$$

où  $\delta \mathbf{x}_c = \delta \mathbf{s}$  et, pour tout  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,

$$\mathbf{A}_c^c(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) = \mathbf{M}_s(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) + \mathbf{M}_u(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}), \quad (5.102a)$$

$$\mathbf{A}_i^c(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) = \mathbf{M}_u(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}), \quad (5.102b)$$

$$\mathbf{B}_y^c(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) = \mathbf{M}_y(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) + \mathbf{M}_u(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}_e) + \mathbf{M}_u(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0). \quad (5.102c)$$

On doit une nouvelle fois vérifier l'Hypothèse 5.2 de mise en œuvre de la stratégie d'implémentation améliorée (5.43). Comme précédemment, la condition (H1) est satisfaite dès lors que les matrices de la représentation d'état de  $\mathcal{S}_l(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0)$  ainsi que les gains  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e)$  dépendent continument du point d'opération  $\boldsymbol{\theta}_e \in \Theta$ . De manière à satisfaire la condition (H3), on suppose que la dimension de l'entrée de contrôle du système  $\mathbf{u}$  coïncide avec celle du signal de référence  $\mathbf{r}$ , i.e,  $m = p_1$ . L'hypothèse de stabilité interne (H4) est quant à elle une contrainte portant sur le choix des gains du contrôleur  $\mathbf{L}(\boldsymbol{\theta}_e)$ ,  $\mathbf{K}(\boldsymbol{\theta}_e)$  et  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e)$ . Finalement, (H2) requiert, lorsque combinée avec l'égalité de dimensions  $m = p_1$  imposée par (H3), que la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  définie par (5.44) soit inversible. On peut voir que

$$\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e) = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{n-p} & \mathbf{M}_u(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) \\ \mathbf{0}_{m \times (n-p)} & \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) & \mathbf{0}_{(n-p) \times p_1} \\ \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}_e) & \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e) \end{bmatrix}. \quad (5.103)$$

La matrice  $\mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e)$  étant choisie de manière à ce que  $\mathbf{M}_s(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) = \overline{\mathbf{A}}_{22}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) - \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}_e) \overline{\mathbf{A}}_{12}(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0)$  soit Hurwitz afin que l'erreur d'estimation converge vers zéro, la matrice  $\mathbf{E}(\boldsymbol{\theta}_e)$  est inversible si et seulement si le gain intégral  $\mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}_e)$  est inversible. Lorsque ces différentes conditions sont vérifiées, les Théorèmes 5.1 et 5.6 garantissent le fonctionnement adéquat de l'implémentation :

$$\mathcal{C}_{\text{vel}+} \triangleq \begin{cases} \dot{\mathbf{x}}_{r,f} = -\tau^{-1} \mathbf{x}_{r,f} + \tau^{-1} \mathbf{r} \\ \dot{\mathbf{x}}_{y,f} = -\tau^{-1} \mathbf{x}_{y,f} + \tau^{-1} \mathbf{y} \\ \dot{\mathbf{x}}_{w,f} = -\tau^{-1} \mathbf{x}_{w,f} + \tau^{-1} \mathbf{w} \\ \dot{\mathbf{s}} = \mathbf{M}_s(\boldsymbol{\theta}, \delta_0) \mathbf{s} + \mathbf{M}_y(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) [\mathbf{y} - \mathbf{x}_{y,f}] + \mathbf{M}_u(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) \mathbf{v} + \mathbf{M}_w(\boldsymbol{\theta}_e, \delta_0) [\mathbf{w} - \mathbf{x}_{w,f}] \\ \hat{\mathbf{x}}_2 = \mathbf{s} + \mathbf{G}(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y} - \mathbf{x}_{y,f}] \\ \mathbf{v} = \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{y} - \mathbf{x}_{y,f}] + \mathbf{K}_2(\boldsymbol{\theta}) \hat{\mathbf{x}}_2 + \tau \mathbf{K}_i(\boldsymbol{\theta}) [\mathbf{x}_{r,f} - \mathbf{x}_{y1,f}] \\ \dot{\mathbf{x}}_{v,f} = \tau^{-1} \mathbf{v} \\ \mathbf{u} = \mathbf{x}_{v,f} + \mathbf{v} \\ \boldsymbol{\theta} = \nu(\mathbf{y}_1, \mathbf{w}_m) \end{cases} \quad (5.104)$$

où  $\mathbf{x}_{y1,f}(t)$  dénote le vecteur composé des  $p_1$  premières lignes du vecteur  $\mathbf{x}_{y1}(t)$ .

Comme dans le cas de l'observateur de Luenberger, bien que pour chaque point d'opération  $\theta_e \in \Theta$  le contrôleur LTI  $\mathcal{C}_l(\theta_e)$  contienne un observateur d'ordre réduit, l'implémentation finale  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  ne comporte pas un tel observateur pour le système non linéaire d'origine.

### 5.5.2 Suppression active du *flutter* pour le BACT

En guise d'application, on considère l'exemple du BACT. On utilise la méthode de synthèse  $H_\infty$  structurée avec les mêmes branches de performances et des pondérations quasi-identiques à ce qui a été présenté à la Sous-Section 4.1.4.2. Cependant, au lieu d'effectuer la synthèse pour un contrôleur se réduisant à un simple gain de sortie nécessitant de mesurer  $\alpha$ ,  $\dot{\alpha}$ ,  $h$  et  $\dot{h}$ , on propose ici les deux approches listées ci-dessous. Dans les deux cas, la synthèse est effectuée sans tenir compte des TCC.

1. En supposant que l'on ne dispose que de la mesure de  $\alpha$ , on propose la mise en œuvre d'un contrôleur dynamique s'appuyant localement sur un observateur LTI d'ordre complet de type Luenberger venant estimer l'intégralité du vecteur d'état du système  $\mathcal{S}_l(\theta_e, \delta)$ . De la sorte, le contrôleur LTI prend la forme de l'Eq. (5.88) dont on fixe la configuration nominale à  $\delta_0 = 0$ . Les paramètres à ajuster sont le gain d'observation  $\mathbf{L}(\theta_e) \in \mathbb{R}^6$ , le gain intégral  $K_i(\theta_e) \in \mathbb{R}$  et le gain de retour d'état  $\mathbf{K}(\theta_e) = \begin{bmatrix} K_\alpha(\theta_e) & K_{\dot{\alpha}}(\theta_e) & K_h(\theta_e) & K_{\dot{h}}(\theta_e) & K_\beta(\theta_e) & K_{\dot{\beta}}(\theta_e) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 6}$ . L'implémentation améliorée du contrôleur séquencé correspond alors à (5.93).
2. En supposant que l'on dispose de la mesure de  $\alpha$  ainsi que de l'angle effectif de la gouverne  $\beta$ , on propose la mise en œuvre d'un contrôleur dynamique s'appuyant localement sur un observateur LTI d'ordre réduit venant estimer  $\delta\dot{\alpha}$ ,  $\delta h$  et  $\delta\dot{h}$ . En effet, la dynamique du BACT pouvant s'interpréter comme étant la mise en cascade de la dynamique de la gouverne (ordre 2 dont les variables d'état sont  $\delta\beta$  et  $\delta\dot{\beta}$  et la sortie est  $\delta\beta$ ) avec la dynamique de la section d'aile à proprement parler (ordre 4 dont l'entrée est  $\delta\beta$  et les variables d'état sont  $\delta\alpha$ ,  $\delta\dot{\alpha}$ ,  $\delta h$  et  $\delta\dot{h}$ ), supposer que  $\beta$  est mesuré permet d'estimer directement la dynamique de la section d'aile en laissant de côté la dynamique de la gouverne. Ainsi, la dynamique du contrôleur correspond à celle donnée par (5.99) dans laquelle on substitue le  $\delta u$  de la première ligne par  $\delta\beta$ , tandis que le  $\delta u$  de la dernière ligne correspond toujours à l'entrée de commande du système, i.e.,  $\delta\beta_c$ . De plus, les matrices de la première ligne sont obtenues sur la base de la dynamique du BACT en l'absence de la dynamique de la gouverne. La configuration nominale est fixée à  $\delta_0 = 0$ . Les paramètres ajustables sont le gain d'observation  $\mathbf{G}(\theta_e) \in \mathbb{R}^3$ , le gain intégral  $K_i(\theta_e) \in \mathbb{R}$  et le gain de retour  $K_1(\theta_e) = K_\alpha(\theta_e)$  et  $\mathbf{K}_2(\theta_e) = \begin{bmatrix} K_{\dot{\alpha}}(\theta_e) & K_h(\theta_e) & K_{\dot{h}}(\theta_e) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{1 \times 3}$ . L'implémentation améliorée du contrôleur séquencé correspond alors à (5.104), en te-



nant compte des ajustements précédemment mentionnés dans ce paragraphe.

Pour les deux stratégies de commande, une implémentation naïve ne permet pas, dû aux TCC, de supprimer le phénomène de *flutter* et rend le système instable en suivi de référence. On se focalise donc sur les implémentations à même de s'affranchir du problème des TCC. En particulier, on procède aux trois implémentations suivantes :

1. l'implémentation *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  en supposant que  $\dot{\alpha}$  est mesuré ;
2. l'implémentation *velocity-based algorithm* avec stratégie de pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$  ;
3. l'implémentation avec stratégie de filtrage  $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$ .

Dans les simulations présentées ci-dessous, la vitesse d'écoulement de l'air est de  $U = 16$  m/s, le paramètre de pseudo-dérivation pour  $\mathcal{C}_{\text{vel,a}}$  est fixé à  $\varepsilon = 0.003$  pour l'ordre complet et  $\varepsilon = 0.005$  pour l'ordre réduit. Dans le même temps, le paramètre de filtrage pour  $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$  est fixé à  $\tau = 0.03$  et  $\tau = 0.02$ , respectivement. Les résultats obtenus sont illustrés à la Fig. 5.20. Dans les deux cas, on observe que l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  permet à la fois de supprimer le *flutter* et d'effectuer un bon suivi de référence. Cependant, la mise en œuvre de la stratégie de pseudo-dérivation lorsque  $\dot{\alpha}$  n'est pas mesuré requiert des valeurs du paramètre de pseudo-dérivation  $\varepsilon$  inférieures à 0.001 afin de fonctionner de manière adéquate. Pour des valeurs légèrement plus élevées, on observe une nette dégradation des performances comme cela est illustré à la Fig. 5.20. *A contrario*, la stratégie d'implémentation améliorée  $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$  permet d'opérer le système pour des valeurs du paramètre de filtrage  $\tau$  plus élevées. Le comportement obtenu sur la base de  $\mathcal{C}_{\text{vel}}$  et de  $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$  est quasi-identique dans la phase de suivi de référence (i.e., pour  $t \geq 10$  s). On constate en simulation que le facteur limitant pour le choix des paramètres  $\varepsilon$  et  $\tau$  réside dans la capacité du contrôleur à supprimer le *flutter*. La phase de suivi de référence est quant à elle moins exigeante, tolérant des valeurs plus élevées de ces paramètres.

Finalement, la Fig. 5.21 illustre certains signaux internes de l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel+}}$  dans le cas d'observateurs locaux de Luenberger. En particulier, la Fig. 5.21(a) vient confirmer que bien que basée sur le design d'observateurs locaux, l'implémentation finale ne contient pas un observateur pour le système non linéaire d'origine. En effet, alors que  $\alpha$  suit le signal de référence  $r$  et peut donc prendre en régime permanent des valeurs non nulles, sa pseudo-estimée contenue dans le vecteur d'état du contrôleur  $\hat{\mathbf{x}}$  converge invariablement vers zéro. Cette observation est également valable pour les autres pseudo-estimations des grandeurs du système avec un  $\hat{\mathbf{x}}$  s'annulant à l'équilibre, quand bien même ce n'est pas le cas pour le vecteur d'état du système  $\mathbf{x}$ . Ce résultat est conforme aux analyses précédemment effectuées dans la mesure où l'annulation de  $\hat{\mathbf{x}}$  à l'équilibre est le mécanisme qui permet d'éviter l'émergence des TCC. D'un point de vue qualitatif, l'évolution de  $\hat{\mathbf{x}}$  peut s'interpréter comme étant une

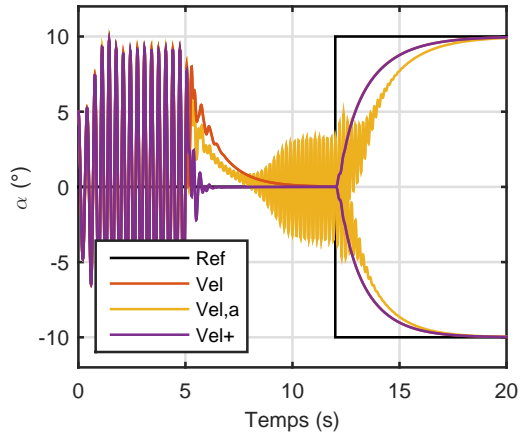
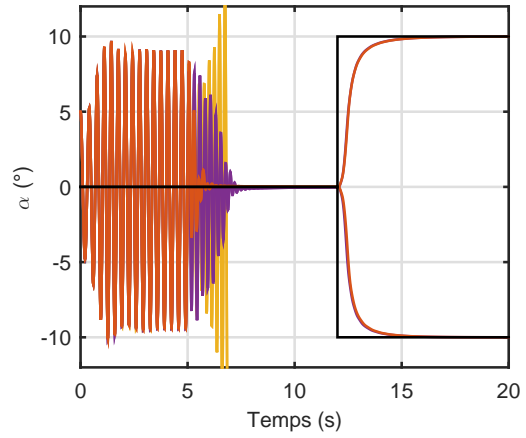
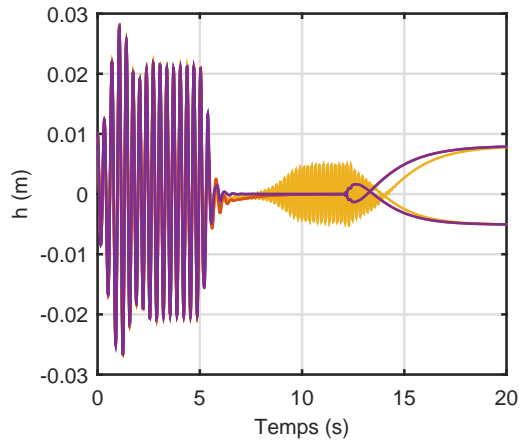
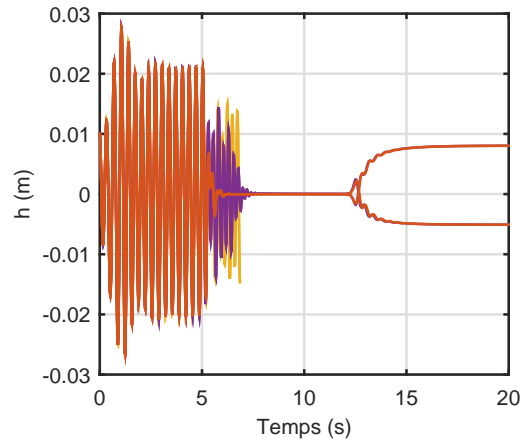
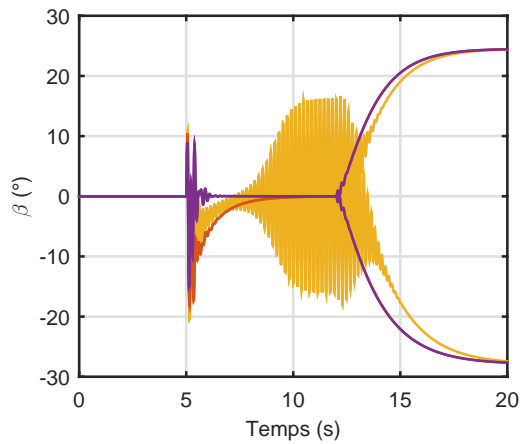
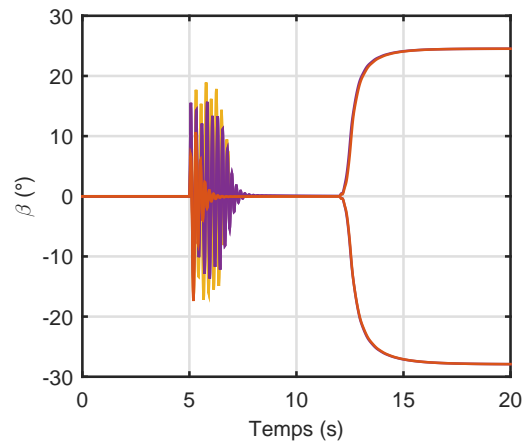
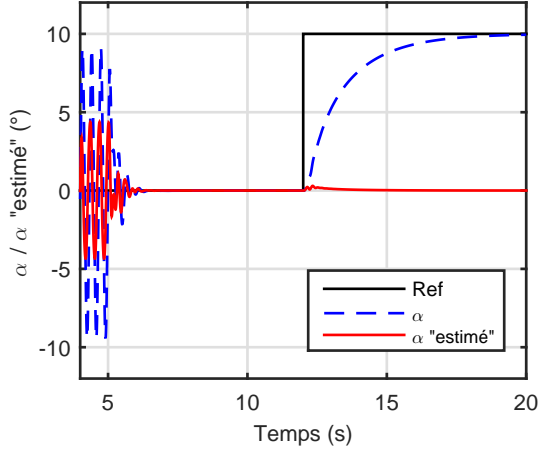
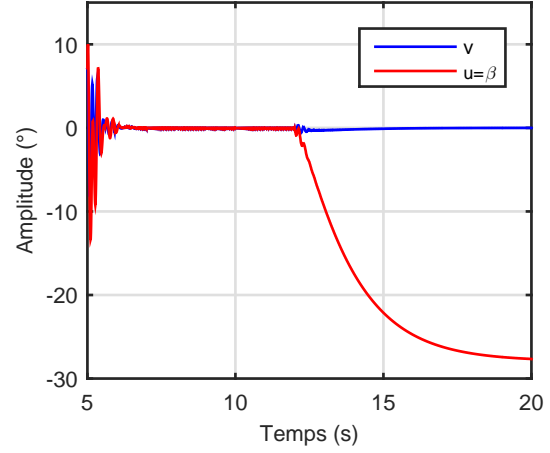
(a) Ordre complet - Angle de torsion  $\alpha$ (b) Ordre réduit - Angle de torsion  $\alpha$ (c) Ordre complet - Déplacement en flexion  $h$ (d) Ordre réduit - Déplacement en flexion  $h$ (e) Ordre complet - Position de la gouverne  $\beta$ (f) Ordre réduit - Position de la gouverne  $\beta$ 

Figure 5.20 Comparaison de la réponse du BACT en boucle fermée avec  $U = 16$  m/s pour les trois stratégies d'implémentation 1) *velocity-based algorithm*  $\mathcal{C}_{vel}$  ; 2) *velocity-based algorithm* avec pseudo-dérivation  $\mathcal{C}_{vel,a}$  ; 3) stratégie de filtrage  $\mathcal{C}_{vel+}$

estimation de la déviation locale du vecteur d'état du système  $\mathbf{x}$  relativement à son point de fonctionnement courant. La Fig. 5.21(b) montre quant à elle que, conformément aux analyses, le signal  $v$  converge vers zéro en régime permanent tandis que le signal de sortie  $u$  est adéquatement généré par la composante intégrale du post-filtrage.



(a) Comparaison de  $\alpha$  avec son pseudo-estimé  $\hat{\alpha}$



(b) Post-filtrage

Figure 5.21 Évaluation sur le BACT de signaux internes à l'implémentation  $\mathcal{C}_{\text{vel}+}$  dans le cas d'observateurs locaux de Luenberger

## CHAPITRE 6 MODÉLISATION D'UNE AILE FLEXIBLE EN DIMENSION INFINIE ET THÉORIE DES OPÉRATEURS DE $C_0$ -SEMI-GROUPE

La flexibilité accrue des systèmes aéronautiques et spatiaux, allant des avions militaires et commerciaux aux lanceurs spatiaux et panneaux solaires des satellites, est la source de nombreux défis en termes de commande active des phénomènes aéroélastiques. En effet, de par l'interaction de phénomènes aérodynamiques, élastiques et inertiels, les phénomènes aéroélastiques peuvent aboutir à une sévère dégradation des performances de l'appareil, voire compromettre totalement son intégrité structurelle. L'exemple traité jusqu'à présent dans le cadre de cette thèse a été celui du BACT modélisant une section d'aile à deux degrés de liberté. Cependant, un tel modèle de dimension finie ne peut modéliser de manière fidèle la dynamique d'une aile flexible dont le nombre de modes est infini. En effet, une aile flexible est plus fidèlement modélisée par un système distribué composé de deux EDP décrivant respectivement la dynamique de l'aile en flexion et en torsion (Bialy, 2014; Zhang et al., 2005; Ziabari and Ghadiri, 2010).

La Section 6.1 vise à introduire le modèle de la section d'aile dont la stratégie de commande sera investiguée dans les Chapitres 7 et 8. L'aile est supposée être actionnée à son extrémité par l'intermédiaire de volets permettant de générer des efforts aérodynamiques en termes de portance et de moment de torsion. Les EDP régissant la dynamique d'un tel système sont tirées de Bialy (2014). À des fins de complétude, les principales étapes de leur obtention, reposant sur l'application du principe d'Hamilton, sont brièvement détaillées.

Une fois le modèle présenté, la suite de ce chapitre vise à introduire les outils mathématiques permettant un traitement rigoureux des systèmes en dimension infinie dont font partie les EDP et les équations à retard. Plus particulièrement, les outils de base de la théorie des semi-groupes, et plus spécifiquement des semi-groupes fortement continus (généralement abrégé sous la dénomination  $C_0$ -semi-groupes), sont introduits (Curtain and Zwart, 2012; Pazy, 2012). La présentation de ces outils, loin d'être exhaustive, représente le pré-requis minimal afin d'aborder les prochains chapitres. En particulier, il sera rappelé dans quelle mesure la théorie des  $C_0$ -semi-groupes permet d'assurer que le problème est bien posé (*well-posed*) tel que défini par Hadamard (Hadamard, 1902), i.e., l'existence d'une solution, son unicité et sa continuité vis-à-vis des conditions initiales. Des rappels préalables portant sur les notions de base des espaces vectoriels normés, des espaces de Banach, des espaces de Hilbert et des espaces de Sobolev sont effectués en Annexe D.

## 6.1 Modèle d'une aile flexible en dimension infinie

On présente ici les étapes principales permettant l'obtention du modèle de l'aile flexible à partir du principe d'Hamilton (Bialy, 2014). Soit une aile flexible de section uniforme sujette à des mouvements élastiques en flexion et en torsion. On note  $l \in \mathbb{R}_+^*$  la longueur de l'aile,  $\rho : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  sa densité linéique,  $I_w : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  son moment d'inertie linéique,  $EI : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  sa rigidité en flexion et  $GJ : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  sa rigidité en torsion. On suppose qu'une masse  $m_s \in \mathbb{R}_+^*$  de moment d'inertie  $J_s \in \mathbb{R}_+^*$  est attachée à l'extrémité de l'aile. On considère un système de coordonnées direct dont l'origine est située au centre de cisaillement à l'emplanture de l'aile, et dont les axes  $x$  et  $y$  pointent respectivement vers l'arrière de l'aile et son extrémité. On note  $\omega(y, t)$  et  $\phi(y, t)$  les déformations élastiques en flexion et en torsion à l'ordonnée  $y$  et à l'instant  $t$ . A des fins de simplification, le centre de gravité de la section d'aile, le centre aérodynamique et le centre de gravité de la masse attachée à l'extrémité de l'aile sont supposés colinéaires. On note pour la suite les dérivées spatiales et temporelles des déplacements flexibles comme suit.

$$\omega_t = \frac{\partial \omega}{\partial t}, \quad \omega_{yy} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \omega_{tyy} = \frac{\partial^3 \omega}{\partial t \partial y^2}, \quad \phi_t = \frac{\partial \phi}{\partial t}, \quad \phi_y = \frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad \phi_{ty} = \frac{\partial^2 \omega}{\partial t \partial y}, \quad \dots \quad (6.1)$$

De manière à dériver les équations de la dynamique à partir du principe d'Hamilton, la première étape consiste à évaluer les énergies cinétique et potentielle de l'aile. L'énergie cinétique s'exprime sous la forme :

$$T_{\text{aile}}(t) = \frac{1}{2} \int_0^l \rho(y) \omega_t^2(y, t) + I_w(y) \phi_t^2(y, t) \, dy, \quad (6.2)$$

tandis que l'énergie cinétique de la masse située à l'extrémité de l'aile est donnée par :

$$T_s(t) = \frac{m_s}{2} \omega_t^2(l, t) + \frac{J_s}{2} \phi_t^2(l, t). \quad (6.3)$$

L'énergie potentielle liée à la déformation élastique est quant à elle exprimée par :

$$U(t) = \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \omega_{yy}^2(y, t) + GJ(y) \phi_y^2(y, t) \, dy. \quad (6.4)$$

L'expression analytique du Lagrangien est alors donnée par  $\mathcal{L} = T_{\text{aile}} + T_s - U$ . Pour exprimer le travail virtuel du système, on introduit  $L_a : (0, l) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  la portance et  $M_a : (0, l) \times \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  le moment en torsion de l'aile à l'ordonnée  $y$  et à l'instant  $t$ . On note également  $L_{\text{tip}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $M_{\text{tip}} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  la portance et le moment en torsion générés par les volets à l'extrémité de l'aile. On note finalement  $\eta_\omega, \eta_\phi : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}_+^*$  les coefficients d'amortissement

de Kelvin-Voigt. Le travail virtuel de l'aile est alors donné par :

$$\begin{aligned} \delta W(t) = & \int_0^l L_a(y) \delta \omega(y, t) + M_a(y) \delta \phi(y, t) dy \\ & - \int_0^l \eta_w(y) EI(y) \omega_{tyy}(y, t) \delta \omega_{yy}(y, t) + \eta_\phi(y) GJ(y) \phi_{ty}(y, t) \delta \phi_y(y, t) dy \\ & + L_{\text{tip}}(t) \delta \omega(l, t) + M_{\text{tip}}(t) \delta \phi(l, t). \end{aligned} \quad (6.5)$$

Le principe d'Hamilton impose alors que la dynamique du système doit satisfaire :

$$\forall t_1 < t_2, \quad \int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L}(t) + \delta W(t) dt = 0. \quad (6.6)$$

Un calcul explicite (le lecteur est renvoyé à (Bialy, 2014) pour plus de détails) permet d'obtenir que la dynamique de l'aile flexible est régie par les équations suivantes :

$$\rho \omega_{tt} + (EI \omega_{yy} + \eta_w EI \omega_{tyy})_{yy} = L_a \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (6.7a)$$

$$I_w \phi_{tt} - (GJ \phi_y + \eta_\phi GJ \phi_{ty})_y = M_a \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (6.7b)$$

$$\omega(0, t) = \omega_y(0, t) = \omega_{yy}(l, t) = \phi(0, t) = 0 \quad t \geq 0, \quad (6.7c)$$

$$(EI \omega_{yy} + \eta_w EI \omega_{tyy})_y(l, t) = -L_{\text{tip}}(t) + m_s \omega_{tt}(l, t) \quad t \geq 0, \quad (6.7d)$$

$$(GJ \phi_y + \eta_\phi GJ \phi_{ty})(l, t) = M_{\text{tip}}(t) - J_s \phi_{tt}(l, t) \quad t \geq 0, \quad (6.7e)$$

Dans cette configuration, la dynamique régissant l'évolution des déplacements élastiques de l'aile flexible est donnée par (6.7a-6.7b). Les conditions à la frontière (6.7c) sont liées au fait que l'aile est attachée à sa base au fuselage de l'appareil alors qu'elle est libre à l'extrémité de l'aile. Finalement, les entrées de commande impactent le système au niveau de la condition à la frontière à l'extrémité de l'aile (6.7d-6.7e). Le problème correspond donc à celui d'un contrôle à la frontière du domaine.

Afin de pouvoir étudier de manière rigoureuse le problème de contrôle à la frontière tel que donné par (6.7a-6.7e), la prochaine section introduit les outils mathématiques de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes.

## 6.2 Théorie des opérateurs de $C_0$ -semi-groupe

Cette section vise à introduire les principaux résultats généraux de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes qui seront employés dans les Chapitres 7 et 8. Des rappels portant sur les notions de base des espaces vectoriels normés, des espaces de Banach, des espaces de Hilbert et des espaces de Sobolev sont effectués en Annexe D.

### 6.2.1 D'un exemple illustratif vers une approche intuitive de la théorie des opérateurs de $C_0$ -semi-groupe

Cette sous-section vise, en partant de la dimension finie et sur la base d'un exemple illustratif en dimension infinie, d'introduire les motivations et une approche intuitive de la théorie des opérateurs de  $C_0$ -semi-groupe.

#### 6.2.1.1 Cas de la dimension finie

Il est courant dans la théorie du contrôle des systèmes LTI de représenter la dynamique du système sous la forme d'une représentation d'état :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (6.8a)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad t \geq 0, \quad (6.8b)$$

$$x(0) = x_0 \quad (6.8c)$$

où  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ ,  $u(t) \in \mathbb{R}^m$  et  $y(t) \in \mathbb{R}^p$  représentent respectivement l'état, l'entrée et la sortie du système. On suppose que  $u : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}^m$  est de classe  $\mathcal{C}^0$  par morceaux. La condition initiale est quant à elle donnée par  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Les dimensions des matrices sont données par  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$  et  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$ . L'équation différentielle (6.8a) représente la dynamique interne du système dont la condition initiale est donnée par (6.8c). L'équation algébrique (6.8b) permet quant à elle d'obtenir la sortie du système. Dans cette configuration, on parle de système en dimension finie car l'ordre de la représentation d'état, qui correspond à la dimension  $n$  du vecteur d'état, est finie. De manière plus abstraite, et qui sera sujette à généralisation par la suite, cette notion de dimension découle du fait qu'en interprétant les matrices  $A$ ,  $B$  et  $C$  en tant qu'applications linéaires, i.e.,  $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ ,  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^n)$  et  $C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^p)$ , l'espace d'évolution en tout instant de la solution de (6.8a) est  $\mathbb{R}^n$ , i.e., un espace de dimension  $n$ .

L'une des étapes cruciales dans l'étude de tout système décrit par un jeu d'équation réside dans l'étude de sa *well-posedness* telle que définie par Hadamard (Hadamard, 1902) et qui correspond aux trois points fondamentaux suivants :

1. l'existence de solutions pour toute condition initiale admissible<sup>1</sup> ;
2. pour une condition initiale donnée, unicité de la solution ;
3. dépendance continue de la solution vis-à-vis de la condition initiale.

Dans le cadre général des systèmes décrits par une EDO en dimension finie, la *well-posedness* est assurée pour des champs de vecteurs suffisamment réguliers (à savoir localement lipschit-

---

1. Ce concept sera rigoureusement spécifié par la suite.

ziens) par le théorème de Cauchy-Lipschitz. Il permet en effet d'assurer l'existence et l'unicité des solutions, tandis que la dépendance continue de ces dernières vis-à-vis de la condition initiale en est un corollaire. Ce résultat général garantit en particulier la *well-posedness* des systèmes LTI de dimension finie prenant la forme (6.8a-6.8c), pour lesquels la solution explicite est donnée sous la forme :

$$\forall t \geq 0, \quad x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau, \quad (6.9)$$

et où la sortie est obtenue par l'équation algébrique (6.8b). On rappelle que pour une matrice carrée  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , l'exponentielle de matrice est définie par<sup>2</sup> :

$$e^M = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{M^n}{n!}. \quad (6.10)$$

### 6.2.1.2 Transposition heuristique en dimension infinie

Bien que couvrant un large spectre d'applications, la représentation d'état en dimension finie (6.8a-6.8c) ne permet pas de capturer l'ensemble des modèles LTI décrivant l'évolution de certains systèmes. Un exemple classique d'une telle situation réside dans les systèmes distribués décrits par des EDP. On peut également mentionner le cas des systèmes à retard, c'est-à-dire de systèmes modélisés par des équations différentielles linéaires incluant des délais. De manière à motiver l'introduction de la théorie liée aux systèmes LTI en dimension infinie, considérons le cas classique (Curtain and Zwart, 2012, Exemple 2.1.1, page 13) d'une barre métallique de longueur unitaire<sup>3</sup> que l'on chauffe sur l'intégralité de sa longueur. L'équation modélisant ce problème est donnée par :

$$\frac{\partial z}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}(y, t) + u(y, t), \quad (y, t) \in (0, 1) \times \mathbb{R}_+, \quad (6.11a)$$

$$z(y, 0) = z_0(y), \quad y \in (0, 1), \quad (6.11b)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(0, t) = \frac{\partial z}{\partial y}(1, t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.11c)$$

où  $z(y, t)$  représente la température de la barre à la position  $y$  et à l'instant  $t$ ,  $z_0$  est le profile initial de température et  $u(y, t)$  est le flux de chaleur injecté à la barre à la position  $y$  et à l'instant  $t$ . Ainsi, (6.11a) représente la dynamique d'évolution de la température de la barre, (6.11b) est la condition initiale et (6.11c) correspond aux conditions à la frontière en

2. La convergence de la série est assurée car absolument convergente dans l'espace de Banach  $\mathbb{C}^{n \times n}$ .

3. Cette hypothèse n'est pas restrictive dans la mesure où un changement de variable dans la dimension d'espace permet de ramener l'étude d'une barre de longueur  $l > 0$  quelconque à celle d'une barre unitaire.



l'absence de flux de chaleur passant aux extrémités de la barre. En comparant (6.8a-6.8c) et (6.11a-6.11c), il semble raisonnable de chercher à écrire (6.11a-6.11c) sous la forme abstraite suivante :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (6.12a)$$

$$z(0) = z_0 \quad (6.12b)$$

avec les opérateurs  $A = d^2/d^2y$  et  $B = I$ , et où pour tout  $t \geq 0$ ,  $z(t) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction suffisamment régulière. Dans cette première approche, on ne définit pas de manière rigoureuse les opérateurs. Il est en effet nécessaire de spécifier les ensembles de départ et d'arriver, ainsi que les métriques associées et le sens des opérateurs de dérivation suivant les variables temporelle  $t$  et spatiale  $y$ . Ces points seront abordés de manière plus détaillée par la suite.

Sur la base de la formulation abstraite (6.12a-6.12b), on est tenté de chercher une solution du problème sous une forme analogue à celle donnée en dimension finie par (6.9). En effet, une théorie portant sur les systèmes en dimension infinie doit, pour être consistante avec les résultats usuels en dimension finie, l'englober. Le point crucial est ici d'identifier ce qui va pouvoir jouer le rôle du terme «  $e^{At}$  ». Autant en dimension finie ce terme correspond à une exponentielle de matrice dont la définition est simplement donnée par (6.10), autant définir l'exponentiel d'un opérateur tel que  $A = d^2/d^2y$  n'est pas une tâche aussi aisée. Dans le cas particulier où l'opérateur linéaire  $A$ , défini et à valeur dans le même espace de Banach  $E$ , est borné<sup>4</sup>, ce que l'on note  $A \in \mathcal{L}(E)$ , la définition de l'exponentielle de matrice (6.10) s'étend de manière directe. En effet la convergence de la série dans  $\mathcal{L}(E)$  est assurée de par la convergence absolue de la série et la complétude de l'espace. Cependant, dans la grande majorité des cas d'intérêt, l'opérateur  $A$  est non borné ce qui rend inapplicable une telle approche.

De manière à intuitiver un résultat pertinent dans le cadre de (6.11a-6.11c), on peut dans un premier temps chercher une solution de l'équation homogène (i.e., pour  $u = 0$ ) de manière heuristique par la méthode de séparation des variables. Pour cela on pose *a priori*  $z(y, t) = f(t)g(y)$ . En injectant dans l'équation (6.11a) et en tenant compte des conditions à la frontière (6.11c), on obtient une solution de la forme  $z_n(y, t) = e^{-n^2\pi^2t} \cos(n\pi y)$  où  $n \in \mathbb{N}$ . De manière heuristique (i.e., sans se soucier de la convergence de la série), par linéarité de l'équation

---

4. Le terme borné renvoie dans le cadre des opérateurs linéaires à la notion de continuité. La notion de borné au sens classique des fonctions n'a dans ce contexte que peu d'intérêt dans la mesure où les applications sont linéaires et donc le seul opérateur borné au sens classique du terme est l'opérateur nul.

différentielle, on peut envisager des solutions homogènes sous la forme :

$$z(y, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi y), \quad (6.13)$$

où  $\alpha_n \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  est sélectionné de manière à tenir compte de la condition initiale (6.11b). Pour cela, on suppose que  $z_0 \in L^2(0, 1)$  équipé de son produit scalaire naturel  $\langle f, g \rangle_{L^2(0,1)} = \int_0^1 f(\xi) \overline{g(\xi)} d\xi$ , dont on sait qu'une base de Hilbert possible est donnée par la famille  $\{y \rightarrow 1\} \cup \{y \rightarrow \sqrt{2} \cos(n\pi y), n \in \mathbb{N}^*\}$  (cf. Définition D.9 et les explications qui en découlent). Ainsi, on a que

$$z_0 = \langle z_0, 1 \rangle_{L^2(0,1)} + \sum_{n=1}^{\infty} \langle z_0, \sqrt{2} \cos(n\pi \cdot) \rangle_{L^2(0,1)} \sqrt{2} \cos(n\pi \cdot), \quad (6.14)$$

où l'égalité précédente est valable dans  $L^2(0, 1)$ . En prenant  $t = 0$  dans (6.13), de par unicité des coefficients dans une base de Hilbert, on obtient que  $\alpha_0 = \langle z_0, 1 \rangle_{L^2(0,1)}$  et  $\alpha_n = 2 \langle z_0, \cos(n\pi \cdot) \rangle_{L^2(0,1)}$ ,  $n \geq 1$ . On définit alors la *fonction de Green*<sup>5</sup> comme étant :

$$g(t, y, \xi) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi y) \cos(n\pi \xi). \quad (6.15)$$

On déduit alors de (6.13) et en inversant formellement série et intégrale que :

$$z(y, t) = \int_0^1 g(t, y, \xi) z_0(\xi) d\xi, \quad (6.16)$$

où pour tout  $t \geq 0$  l'égalité à lieu dans  $L^2(0, 1)$ . En comparant ce résultat à celui obtenu en dimension finie (6.9) lorsque  $u = 0$ , on observe que le rôle joué en dimension finie par le terme  $e^{At}$  est ici remplacé par un terme intégral pondéré par une fonction de Green.

En tenant compte de l'entrée de commande, l'analogie avec (6.9) permet alors de deviner pour  $u(t, \cdot) \in L^2(0, 1)$  la solution de (6.11a-6.11c) sous la forme :

$$z(y, t) = \int_0^1 g(t, y, \xi) z_0(\xi) d\xi + \int_0^t \int_0^1 g(t-s, y, \xi) u(\xi, s) d\xi ds, \quad (6.17)$$

où pour tout  $t \geq 0$  l'égalité précédente est valable dans  $L^2(0, 1)$ . Un calcul heuristique semble alors indiquer que (6.17) est bien solution de (6.11a-6.11c).

De manière à pouvoir justifier de manière rigoureuse les développements précédemment effectués de manière heuristique, il est nécessaire d'introduire le problème dans un cadre plus

---

5. La définition de la fonction de Green renvoie à la notion de réponse impulsionnelle en théorie de la commande, également appelée solution fondamentale dans le cadre de la théorie des distributions.

formel. Reprenons le système tel que décrit sous forme abstraite (6.12a-6.12b) et spécifions de manière précise les opérateurs sous-jacents pour le problème (6.11a-6.11c). Il serait à première vue tentant de choisir l'espace d'état, correspondant à la distribution de température le long de la barre, comme étant l'ensemble des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R})$  puisque la dérivée spatiale intervient deux fois dans (6.11a). Dans le même temps, il semble naturel d'un point de vue physique de mesurer l'énergie du système en termes de la norme-2 du signal  $z$ , i.e.,  $\|z(t, \cdot)\|_{L^2(0,1)} = \left(\int_0^1 z^2(t, \xi) d\xi\right)^{1/2}$ . Un tel choix mène cependant à une impasse dans la mesure où certes  $(\mathcal{C}^2([0, 1]; \mathbb{R}), \|\cdot\|_{L^2(0,1)})$  est un espace vectoriel normé, mais n'est pas un espace de Banach. Or, comme on le verra par la suite, et de manière analogue à ce qui se passe en dimension finie pour le théorème de Cauchy-Lipschitz<sup>6</sup>, le caractère complet de l'espace de travail est indispensable dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes afin d'établir les propriétés de *well-posedness*. Pour cette raison, on va plutôt travailler dans l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  équipé de son produit scalaire naturel (cf. Théorème D.2). Une raison secondaire<sup>7</sup> qui incite à travailler dans cet espace réside dans les calculs heuristiques précédemment effectués. En effet, la détermination des coefficients  $\alpha_n$  de (6.13) fut rendue possible par l'écriture de la condition initiale dans une base de Hilbert de  $\mathcal{H}$ , confère (6.14). Ce choix n'est néanmoins pas sans conséquence dans la mesure où il n'est pas possible de donner un sens au terme  $d^2f/d^2y$  pour tout élément  $f \in L^2(0, 1)$  et donc de définir l'opérateur  $A = d^2/d^2y$  sur  $\mathcal{H}$  tout entier. Pour contourner cette difficulté, on délaisse la notion de dérivée telle que définie au sens classique au profit de la notion de dérivée faible (cf. Définition D.20) telle que définie dans le cadre de la théorie des distributions. Ainsi, l'opérateur de dérivation spatiale  $d/dy$  renvoie à cette notion de dérivée faible, inscrivant de manière naturelle le problème étudié dans le cadre des espaces de Sobolev (cf. Définition D.21) (Brezis, 2010; Evans, 1997). L'intérêt d'une telle opération est double. Premièrement, cela permet de considérer une notion de dérivée dans un sens plus large que celle au sens classique. Deuxièmement, les espaces de Sobolev pour les fonctions de carré intégrable, lorsque équipés de leur produit scalaire naturel, sont des espaces de Hilbert.

Sur cette base, on peut à présent introduire de manière rigoureuse le problème sous forme abstraite. Plus spécifiquement, le problème (6.11a-6.11c) est reformulé sous la forme abstraite (6.12a-6.12b) où l'espace de travail est l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  équipé de son produit

---

6. Le théorème de Cauchy-Lipschitz se démontre sur la base du théorème du point fixe qui requiert que l'espace de travail soit complet, ce qui est toujours le cas pour un espace vectoriel de dimension finie sur le corps des réels ou des complexes.

7. Qui en réalité découle de la première mais permet d'avoir une certaine intuition du choix effectué.

scalaire naturel. L'opérateur non borné  $A$  est défini par :

$$\begin{aligned} A : D(A) \subset \mathcal{H} &\rightarrow \mathcal{H} \\ f &\rightarrow \frac{d^2 f}{dy^2} \end{aligned} \quad (6.18)$$

sur le domaine  $D(A) \subset \mathcal{H}$  donné par :

$$D(A) = \left\{ f \in H^2(0,1) : \frac{df}{dy}(0) = \frac{df}{dy}(1) = 0, f, \frac{df}{dy} \in AC[0,1] \right\}, \quad (6.19)$$

où  $H^2(0,1)$  désigne l'espace de Sobolev constitué des fonctions de  $L^2(0,1)$  admettent des dérivées faibles elles mêmes dans  $L^2(0,1)$  jusqu'à l'ordre 2. L'opérateur  $B$  est quant à lui défini comme étant l'identité sur  $\mathcal{H}$ , i.e.,  $B = I_{\mathcal{H}}$ .

Les conditions à la frontière (6.11c) sont spécifiées sous forme abstraite en étant introduites dans le domaine de définition de l'opérateur  $A$ . Dépendamment du problème étudié, tout ou une partie de ces conditions à la frontière peuvent également être inclus directement dans la définition de l'espace de travail. En outre, dans le cadre de la théorie des fonctions  $p$ -intégrables, et de surcroît des espaces de Sobolev, une fonction n'est pas bien définie à sous-ensemble de mesure nulle près. Pour illustrer cela, considérons le cas d'une fonction  $f \in H^1(0,1)$ . Cette notation constitue en réalité un abus dans la mesure où  $f$  n'est pas directement un élément de  $H^1(0,1)$ , au contraire de sa classe d'équivalence  $[f] \in H^1(0,1)$  qui correspond à l'ensemble des fonctions qui ne diffèrent de  $f$  que sur un sous-ensemble de mesure nulle, i.e., les rendant indistinguables du point de vue de la théorie de l'intégration<sup>8</sup>. Dès lors, imposer par exemple la contrainte  $g(0) = 0$  à toutes les fonctions de la classe d'équivalence de  $f$ , i.e., pour tout  $g \in [f]$ , n'a pas de sens dans la mesure où la valeur  $g(0)$  de la fonction  $g$  n'est pas définie en tant que telle de par son appartenance à la classe d'équivalence  $[f]$ . Pour contourner ce problème, on fait porter la condition à la frontière sur une fonction suffisamment régulière de la classe d'équivalence. En particulier, on sait par le Lemma D.8 que  $H^1(0,1) \subset AC[0,1]$  dans le sens où pour tout  $[f] \in H^1(0,1)$ , il existe une unique fonction  $g \in AC[0,1]$ , i.e., une fonction absolument continue, telle que  $g \in [f]$  (ou, en d'autres termes, telle que  $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} g$ ). La condition à la frontière est alors imposée sur cet élément suffisamment régulier et unique  $g$ , pour lequel la valeur  $g(0)$  est ainsi parfaitement définie. C'est pour cette raison qu'il est mentionné dans la définition du domaine  $D(A)$ , en

---

8. L'introduction de telles classes d'équivalence est requise puisque pour une fonction  $f$   $p$ -intégrable,  $\left(\int_0^1 |f|^p(\xi) d\xi\right)^{1/p} = 0$  implique que la fonction  $f$  est simplement nulle presque partout, i.e.,  $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0$ , mais avec en général  $f \neq 0$ . Dès lors, pour assurer que l'intégrale précédente définit bien une norme il ne faut pas distinguer, du point de vue de l'intégration, deux fonctions qui sont égales presque partout.

assimilant par commodité une fonction et sa classe d'équivalence, que les conditions à la frontière portent sur le représentant de la classe d'équivalence qui est absolument continu.

Ainsi, l'opérateur  $A$  n'est pas défini sur  $\mathcal{H}$  tout entier, mais seulement sur un sous-espace restreint pour lequel la notion de dérivée seconde au sens des distributions est bien définie. À ce stade, il pourrait à première vue être tentant de réduire l'espace de travail  $\mathcal{H}$  au simple sous-ensemble  $D(A)$ . Cependant, l'espace  $D(A)$  équipé du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(0,1)}$  n'est pas complet ( $D(A)$  est dense dans  $L^2(0,1)$  muni de son produit scalaire naturel), rendant inapplicable les outils théoriques sur ce sous-espace.

À présent que les opérateurs ont été définis de manière rigoureuse, il est nécessaire de revenir sur le sens à donner à la dérivée temporelle apparaissant dans le membre de gauche de l'équation (6.12a). Travaillant dans l'espace de Hilbert  $(L^2(0,1), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2(0,1)})$  la métrique de l'espace est naturellement définie par la norme associée  $\| \cdot \|_{L^2(0,1)}$ . Dès lors, le terme de dérivation temporelle  $\dot{z}$  à un instant  $t \geq 0$  fixé ne peut être interprété que dans le sens de l'existence d'un élément de  $L^2(0,1)$ , noté  $\dot{z}(t)$ , vérifiant :

$$\left\| \frac{z(t+h) - z(t)}{h} - \dot{z}(t) \right\|_{L^2(0,1)} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0. \quad (6.20)$$

Ainsi, alors que le problème EDP était initialement formulé sous la forme de dérivées partielles classiques (6.11a-6.11c), le problème mis sous forme abstraite s'interprète en réalité en termes de dérivées faibles au sens des distributions pour la variable spatiale, et en termes de dérivée de Fréchet relativement à la norme de l'espace d'état  $\mathcal{H}$  pour la variable temporelle. Cette différence de nature est cruciale afin d'interpréter correctement les résultats obtenus dans la cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes, dans la mesure où une solution de la formulation abstraite ne fournit pas, en général, une solution au sens classique des dérivées partielles usuelles (Curtain and Zwart, 2012, Exemple A.5.28 en page 630). Ainsi, en supposant que la condition initiale  $x_0 \in D(A)$ , une solution classique de la forme abstraite est une fonction  $z \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(A)) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$  vérifiant (6.12a-6.12b).

Sur la base des développements heuristiques précédemment menés, on peut deviner que l'analogue du terme «  $e^{At}$  » en dimension finie est donné par la famille d'opérateurs  $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  définie pour tout  $t \geq 0$  par :

$$\begin{aligned} T(t) &: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ f &\rightarrow \int_0^1 g(t, \cdot, \xi) f(\xi) d\xi \end{aligned} \quad (6.21)$$

où  $g$  est la fonction de Green définie par (6.15). On dira par la suite que  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  est le  $C_0$ -semi-groupe généré par l'opérateur  $A$  sur  $\mathcal{H}$ . Dès lors, dans le cas homogène (i.e.,  $u = 0$ ),

la solution initialement écrite sous la forme (6.16) se réinterprète sous la forme :

$$\forall t \geq 0, \quad z(t) = T(t)z_0, \quad (6.22)$$

tandis que dans le cas non homogène avec  $u(t) \in \mathcal{H}$  pour tout  $t \geq 0$ , on a à partir de (6.17) que

$$\forall t \geq 0, \quad z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)Bu(s)ds. \quad (6.23)$$

En comparant ce résultat intuitif à celui usuellement rencontré en dimension finie (6.9), on note que l'exponentiel de matrice «  $e^{At}$  » en dimension finie a été remplacée par le  $C_0$ -semi-groupe  $(T(t))_{t \in \mathbb{R}_+}$  généré par l'opérateur  $A$  sur  $\mathcal{H}$ . Cet exemple montre ainsi la nécessité de générer le concept d'exponentiel de matrice dans le cadre d'opérateurs non bornés définis sur des espaces de dimension infinie. L'étude de cette généralisation est le cœur de la théorie des opérateurs de  $C_0$ -semi-groupe.

### 6.2.1.3 Approche intuitive des $C_0$ -semi-groupes

Afin de donner une approche intuitive du concept de  $C_0$ -semi-groupes, supposons que  $z_0 \in \mathcal{H}$  est la condition initiale d'un système LTI homogène (i.e., sans entrée de contrôle) dont l'espace d'état est l'espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  de corps de base  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , possiblement de dimension infinie. Supposons que le problème ainsi étudié est *well-posed* sur  $\mathbb{R}_+$ , c'est-à-dire que l'on a l'existence et l'unicité de la solution  $\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow z(t; z_0) \in \mathcal{H}$  pour toute condition initiale  $z_0$  (i.e.,  $z(0; z_0) = z_0$ ) et que cette solution dépend continument de la condition initiale. L'unicité de la solution permet alors de définir pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} T(t) &: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H} \\ z_0 &\rightarrow z(t; z_0) \end{aligned} \quad (6.24)$$

donnant lieu à  $z(t; z_0) = T(t)z_0$ . En particulier, on obtient pour toute condition initiale  $z_0$  que  $T(0)z_0 = z(0; z_0) = z_0$ , i.e.,  $T(0) = I_{\mathcal{H}}$ .

Par linéarité,  $t \rightarrow \alpha z(t, z_0^1) + \beta z(t, z_0^2)$  est solution du problème pour la condition initiale  $\alpha z_0^1 + \beta z_0^2$  où  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Par unicité de la solution, on obtient que pour tout  $t \geq 0$ ,  $z(t; \alpha z_0^1 + \beta z_0^2) = \alpha z(t, z_0^1) + \beta z(t, z_0^2)$ , i.e.,  $T(t)(\alpha z_0^1 + \beta z_0^2) = \alpha T(t)z_0^1 + \beta T(t)z_0^2$ . On en déduit la linéarité de  $T(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . La dépendance continue vis-à-vis de la condition initiale  $z_0$  entraîne alors la continuité de  $T(t)$ , d'où  $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Sur la base du caractère temps invariant du système et de l'unicité des solutions,  $z(t+s; z_0)$  coïncide avec  $z(t; z(s, z_0))$ . Cela traduit le fait que l'état atteint à l'instant  $t+s$  à partir de la

condition initiale  $z_0$  coïncide avec l'état atteint à l'instant  $t$  à partir de la condition initiale  $z(s, z_0)$ . Ainsi, pour toute condition initiale  $z_0$ ,  $T(t+s)z_0 = z(t+s; z_0) = z(t; z(s, z_0)) = T(t)z(s, z_0) = T(t)T(s)z_0$ . On aboutit au résultat  $T(t+s) = T(t)T(s)$  pour tout  $t, s \geq 0$ . Cette propriété donne lieu au terme « semi-groupe » dans l'expression «  $C_0$ -semi-groupe ».

On impose finalement une condition de régularité supplémentaire en supposant la continuité de la solution à l'instant initial. En d'autres termes, on suppose que  $z(t, z_0) \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} z_0$ . Cela se traduit par  $\|T(t)z_0 - z_0\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  pour tout  $z_0 \in \mathcal{H}$ . Cette propriété donne lieu au terme « fortement continu », abrégé en «  $C_0$  », dans l'expression «  $C_0$ -semi-groupe ».

Les propriétés générales que l'on vient d'intuiter sur la base du comportement attendu d'un système LTI homogène sont à la base de la définition des opérateurs de  $C_0$ -semi-groupe tels que définis dans la prochaine sous-section.

### 6.2.2 Définition et propriétés fondamentales des opérateurs de $C_0$ -semi-groupe

Sur la base des éléments présentés précédemment, on définit la notion de  $C_0$ -semi-groupe de la façon suivante. Dans ce qui suit,  $\mathcal{H}$  désignera un espace de Hilbert séparable (réel ou complexe) dont le produit scalaire associé est noté  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  et la norme induite  $\|\cdot\| = \sqrt{\langle \cdot, \cdot \rangle}$ .

**Définition 6.1** *Un semi-groupe fortement continu, ou  $C_0$ -semi-groupe en abrégé, sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est une fonction*

$$\begin{aligned} T &: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}) \\ t &\rightarrow T(t) \end{aligned} \tag{6.25}$$

*satisfaisant les propriétés suivantes :*

1.  $T(t+s) = T(t)T(s)$  pour tout  $t, s \geq 0$  ;
2.  $T(0) = I_{\mathcal{H}}$  ;
3.  $\|T(t)z_0 - z_0\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} 0$  pour tout  $z_0 \in \mathcal{H}$ .

On a vu que cette définition a été posée de manière à pouvoir généraliser l'exponentielle de matrices. L'exemple qui suit vient confirmer que le concept de  $C_0$ -semi-groupe en est effet bien une généralisation.

**Exemple 6.1** *Soit un opérateur  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  fixé. Définissons pour tout  $t \geq 0$ ,*

$$e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!}. \tag{6.26}$$

On vérifie tout d'abord que la définition précédente a un sens et donne lieu à un élément de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Pour cela, notons que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left\| \frac{(At)^k}{k!} \right\| = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\|A^k\| t^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\|A\|t)^k}{k!} = e^{\|A\|t} < \infty. \quad (6.27)$$

La série est donc absolument convergente. L'espace  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  étant complet pour la norme induite par l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ , on en déduit la convergence de la série dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

On vérifie à présent que  $\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow e^{At} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est un  $C_0$ -semi-groupe. Par convergence absolue de la série, on a pour  $t, s \geq 0$  par le produit de Cauchy,

$$\begin{aligned} e^{At} e^{As} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(As)^l}{l!} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^k \frac{(At)^l}{l!} \frac{(As)^{k-l}}{(k-l)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \sum_{l=0}^k \binom{k}{l} t^l s^{k-l} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} (t+s)^k = e^{A(t+s)}. \end{aligned} \quad (6.28)$$

On vérifie directement à partir de la définition que  $e^{A \cdot 0} = I_{\mathcal{H}}$ . Finalement, pour tout  $z_0 \in \mathcal{H}$ ,

$$\|e^{At} z_0 - z_0\| = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(At)^k}{k!} z_0 \right\| \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\|A\|^k t^k}{k!} \|z_0\| = (e^{\|A\|t} - 1) \|z_0\| \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0 \quad (6.29)$$

par continuité de la fonction exponentielle définie sur les nombres réels.

La dernière équation montre en réalité que la condition plus forte  $\|e^{At} - I\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0$  est vérifiée. On a donc une « uniformité » du caractère continu du semi-groupe. En reprenant les éléments de la Définition 6.1, lorsque le troisième point peut être remplacé par la condition plus stricte  $\|T(t) - I\|_{\mathcal{H}} \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{ } 0$ , on parle de *semi-groupe uniformément continu*.

L'exemple 6.1 montre que la définition du concept de  $C_0$ -semi-groupe englobe l'exponentielle de matrice, et plus largement l'exponentielle d'un élément quelconque de  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Cependant, le concept de  $C_0$ -semi-groupe permet d'englober un bon nombre d'autres configurations. L'une de ces configurations, comptant parmi les plus fondamentales, est donnée ci-dessous.

**Exemple 6.2** (Curtain and Zwart, 2012) Soit  $\{\phi_n, n \geq 1\}$  une base de Hilbert d'un espace de Hilbert séparable<sup>9</sup>  $\mathcal{H}$  sur le corps des nombres complexes. Étant donnée une suite  $(\lambda_n)_{n \geq 1} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$  telle que

$$M \triangleq \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty, \quad (6.30)$$

---

9. Le caractère séparable (cf. Définition D.10) permet d'assurer l'existence d'une base orthonormale dénombrable.



on introduit pour tout  $t \geq 0$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ ,

$$T(t)z = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle z, \phi_k \rangle \phi_k. \quad (6.31)$$

On vérifie premièrement que cette définition a bien un sens. La théorie générale des espaces de Hilbert (cf. Lemma D.4) assure que pour  $z \in \mathcal{H}$  quelconque, la série des  $|\langle z, \phi_k \rangle|^2$  est convergente. On déduit de  $|e^{\lambda_k t} \langle z, \phi_k \rangle|^2 \leq e^{2Mt} |\langle z, \phi_k \rangle|^2$  que la série des  $|e^{\lambda_k t} \langle z, \phi_k \rangle|^2$  est convergente, et donc que la série des  $e^{\lambda_k t} \langle z, \phi_k \rangle \phi_k$  converge dans  $\mathcal{H}$ . Le terme  $T(t)z$  est donc bien défini en tant qu'élément de  $\mathcal{H}$  pour tout  $t \geq 0$  et tout  $z \in \mathcal{H}$ . La linéarité de  $T(t)$  découle alors de celle 1) du produit scalaire par rapport à la première entrée ; 2) de la somme ; 3) du passage à la limite. De plus, ce qui précède montre que  $\|T(t)z\| \leq e^{2Mt} \|z\|$ , d'où  $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .

Vérifions que  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$  est bien un  $C_0$ -semi-groupe. Tout d'abord, pour  $t, s \geq 0$  et  $z \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} T(t)T(s)z &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \langle T(s)z, \phi_k \rangle \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k t} \left\langle \sum_{l=1}^{\infty} e^{\lambda_l s} \langle z, \phi_l \rangle \phi_l, \phi_k \right\rangle \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} e^{\lambda_k t + \lambda_l s} \langle z, \phi_l \rangle \langle \phi_l, \phi_k \rangle \phi_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} e^{\lambda_k (t+s)} \langle z, \phi_k \rangle \phi_k \\ &= T(t+s)z, \end{aligned} \quad (6.32)$$

où il a été utilisé la linéarité et la continuité du produit scalaire relativement à sa première entrée. La théorie générale des espaces de Hilbert assure que  $T(0) = I_{\mathcal{H}}$  (découle de l'écriture d'un élément de l'espace dans une base de Hilbert). Finalement, la continuité forte découle du fait que pour  $z \neq 0$ ,  $N \in \mathbb{N}^*$  et  $t \leq t_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} \|T(t)z - z\|^2 &= \sum_{k=1}^{\infty} |e^{\lambda_k t} - 1|^2 |\langle z, \phi_k \rangle|^2 \\ &\leq \sup_{1 \leq k \leq N} |e^{\lambda_k t} - 1|^2 \sum_{k=1}^N |\langle z, \phi_k \rangle|^2 + (e^{Mt_1} + 1)^2 \sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle z, \phi_k \rangle|^2. \end{aligned} \quad (6.33)$$

Soit  $\varepsilon > 0$ . La série des  $|\langle z, \phi_k \rangle|^2$  étant convergente, il existe  $N \in \mathbb{N}^*$  tel que

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |\langle z, \phi_k \rangle|^2 < \frac{\varepsilon}{2(e^{Mt_1} + 1)^2}. \quad (6.34)$$

Pour un tel  $N$  fixé, par continuité de la fonction  $t \rightarrow \sup_{1 \leq k \leq N} |e^{\lambda_k t} - 1|^2$  qui est nulle en  $t = 0$ , il existe  $\eta \in (0, t_1)$  tel que pour tout  $0 \leq t < \eta$ ,

$$\sup_{1 \leq k \leq N} |e^{\lambda_k t} - 1|^2 < \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2}. \quad (6.35)$$

On obtient donc que pour tout  $0 \leq t < \eta$ ,

$$\|T(t)z - z\|^2 \leq \frac{\varepsilon}{2\|z\|^2} \sum_{k=1}^N |\langle z, \phi_k \rangle|^2 + (e^{Mt_1} + 1)^2 \frac{\varepsilon}{2(e^{Mt_1} + 1)^2} \leq \varepsilon. \quad (6.36)$$

Cela démontre le caractère fortement continu de  $T(t)$ . On a bien montré que  $T$  forme un  $C_0$ -semi-groupe.

Introduisons un dernier exemple, que l'on ne détaillera pas (le lecteur intéressé est renvoyé à (Curtain and Zwart, 2012) pour un traitement exhaustif). Cet exemple est celui dit du *décalage à gauche*, qui joue un rôle essentiel dans la théorie des systèmes à retard.

**Exemple 6.3** Soit  $\mathcal{H} = L^2(0, \infty)$  l'espace de Hilbert des fonctions intégrables sur  $[0, \infty)$  doté de son produit scalaire usuelle. Alors, l'opérateur de décalage à gauche

$$(T(t)h)(x) = h(t + x), \quad h \in \mathcal{H}, \quad t \geq 0, \quad x \geq 0, \quad (6.37)$$

est un  $C_0$ -semi-groupe.

On a donc vu à travers quelques exemples que la définition de  $C_0$ -semi-groupe permet d'englober un grand nombre de configurations généralisant le concept d'exponentiel de matrice. En outre, les  $C_0$ -semi-groupes jouissent d'un certain nombre de propriétés qui sont résumées dans le prochain théorème.

**Théorème 6.1** (Curtain and Zwart, 2012) Soit  $T(t)$  un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1.  $\|T(t)\|$  est borné sur tout sous intervalle de  $[0, \infty)$  de longueur finie.
2.  $T(t)$  est fortement continu pour tout  $t \in [0, \infty)$ , i.e.,  $\forall x \in \mathcal{H}$ , la fonction  $t \rightarrow T(t)x$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ .
3. Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\frac{1}{t} \int_0^t T(s)x ds \xrightarrow[t \rightarrow 0^+]{} x$ .
4. En posant  $\omega_0 = \inf_{t > 0} \frac{\log \|T(t)\|}{t}$ , on a  $\omega_0 = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\log \|T(t)\|}{t} < \infty$ .

5. Pour tout  $\omega > \omega_0$ , il existe  $M_\omega \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|T(t)\| \leq M_\omega e^{\omega t}$ .

La constante  $\omega_0$  est appelée le taux de croissance (growth bound) du semi-groupe.

Il est à souligner que l'intégrale intervenant dans le troisième point du Théorème 6.1 porte sur une fonction de variable réelle mais à valeur dans un espace de Hilbert. Ainsi, l'intégrale est ici à interpréter au sens de l'intégrale de Bochner, qui est une généralisation de l'intégrale de Lebesgue aux fonctions à valeur dans un espace de Banach (Phillips and Hille, 1957).

En reprenant l'Exemple 6.3, il est aisé de voir que  $\|T(t)h\| \leq \|h\|$  pour tout  $h \in L^2(0, \infty)$ , i.e.,  $\|T(t)\| \leq 1$ . Par définition, on a donc que  $\omega_0 \leq 0$ . Supposons par l'absurde que  $\omega_0 < 0$ . Par définition de  $\omega_0$ , il existe alors  $t_0 \geq 0$  tel que  $\|T(t_0)\| < 1$ . En prenant  $h = 1_{[t_0, t_0+1]}$  la fonction caractéristique de l'intervalle  $[t_0, t_0+1]$ , on a  $(T(t_0)h)(x) = 1_{[t_0, t_0+1]}(t_0+x) = 1_{[0, 1]}(x)$ . Ainsi,  $1 = \|T(t_0)h\| < \|h\| = 1$ , ce qui donne la contradiction souhaitée. On a donc bien que  $\omega_0 = 0$ . Une approche similaire permet de montrer que dans le cas de l'Exemple 6.2,  $\omega_0 = \sup_{n \geq 1} \operatorname{Re}(\lambda_n)$ .

### 6.2.3 Générateur infinitésimal d'un $C_0$ -semi-groupe

À présent que le concept de  $C_0$ -semi-groupe a été introduit, on aborde la question du générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe. Pour cela, rappelons que la définition de  $C_0$ -semi-groupe a été introduite de manière à pouvoir décrire de manière satisfaisante l'évolution temporelle d'un système LTI autonome. Dès lors, on cherche à interpréter la fonction  $t \rightarrow T(t)z$  comme étant une solution d'une équation différentielle sous forme abstraite. Cependant, ayant simplement supposé la continuité de  $T(t)z$ , il n'est en général pas possible de dériver  $T(t)z$  pour tout élément  $z \in \mathcal{H}$ . Pour cette raison, on introduit la définition suivante.

**Définition 6.2** *Le générateur infinitésimal  $A$  d'un  $C^0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est défini par*

$$Az = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t}, \quad (6.38)$$

sur le domaine  $D(A)$  donné par

$$D(A) = \left\{ z \in \mathcal{H} : \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{T(t)z - z}{t} \text{ existe} \right\}. \quad (6.39)$$

En appliquant la Définition 6.2 il est par exemple aisé de montrer dans le cadre de l'Exemple 6.1 que le générateur infinitésimal de  $e^{At}$  avec  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est  $A$  sur  $\mathcal{H}$  tout entier. Cependant, la Définition 6.2 ne permet pas en général de calculer de manière directe et explicite le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe. Une méthode indirecte, généralement plus performante, sera mentionnée par la suite.

Les principales propriétés du générateur infinitésimal d'un  $C^0$ -semi-groupe sont résumées dans le prochain théorème.

**Théorème 6.2** (*Curtain and Zwart, 2012*) Soit  $T(t)$  un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Les propriétés suivantes sont vérifiées.

1. Pour tout  $z_0 \in D(A)$ ,  $T(t)z_0 \in D(A)$  pour tout  $t \geq 0$ .
2.  $\frac{d(T(t)z_0)}{dt} = AT(t)z_0 = T(t)Az_0$  pour tout  $z_0 \in D(A)$  et  $t > 0$ .
3.  $T(t)z_0 - z_0 = \int_0^t T(s)Az_0 ds$  pour tout  $z_0 \in D(A)$ .
4. Pour tout  $t \geq 0$  et tout  $z_0 \in \mathcal{H}$ ,  $\int_0^t T(s)z_0 ds \in D(A)$ . Il s'en suit que  $D(A)$  est dense dans  $\mathcal{H}$ .
5.  $A$  est un opérateur linéaire fermé<sup>10</sup>.

Le Théorème 6.2 assure donc que si  $z_0 \in D(A)$ , la trajectoire de  $t \rightarrow T(t)z_0$  reste dans  $D(A)$  et que  $z(t) = T(t)z_0$  est solution de l'équation différentielle abstraite  $\dot{z} = Az$ . Ces résultats seront au fondement du concept de *well-posedness* présenté dans la Sous-Section 6.2.5. De plus, bien que la définition 6.2 du générateur infinitésimal  $A$  n'offre *a priori* aucune garantie quant au fait que  $D(A)$  n'est pas vide, il s'avère que c'est effectivement bien le cas pour tout  $C_0$ -semi-groupe et que de surcroît cet ensemble est dense dans  $\mathcal{H}$ .

Par unicité de la limite dans un espace vectoriel normé, le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe est unique. *A contrario*, il est légitime de se demander si le générateur infinitésimal permet de déterminer de manière unique le  $C_0$ -semi-groupe d'origine. La réponse est positive, telle que formulée par le prochain théorème.

**Théorème 6.3** (*Luo et al., 2012*) Soient  $T(t)$  et  $S(t)$  deux  $C_0$ -semi-groupes sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . On note  $A$  et  $B$  leurs générateurs infinitésimaux respectifs. Si  $A = B$ , alors  $T(t) = S(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .

Si le générateur infinitésimal  $A$  d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  est tel que  $D(A) = \mathcal{H}$ , puisque  $A$  est un opérateur linéaire fermé (Théorème 6.2), le théorème du graphe fermé (cf. Théorème D.5) assure que  $A$  est borné et donc  $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . L'unicité du  $C_0$ -semi-groupe associé à un générateur infinitésimal tel que formalisé par le Théorème 6.3 assure alors que  $T(t) = e^{At}$ . Or, comme préalablement mentionné, la théorie des  $C_0$ -semi-groupes vise à étendre le concept d'exponentielle au cas d'applications linéaires qui ne sont pas continues. Ainsi, dans la majorité des cas de figure, l'opérateur  $A$  qui est étudié n'est pas borné, de sorte que  $D(A) \subsetneq \mathcal{H}$ .

---

10. Confère Définition D.16.

On rappelle que pour un opérateur  $A : D(A) \subset H \rightarrow \mathcal{H}$ , le résolvant de  $A$ , noté  $\rho(A)$ , est défini par :

$$\rho(A) = \left\{ \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I_{\mathcal{H}} - A : D(A) \rightarrow \mathcal{H} \text{ est bijective, } (\lambda I_{\mathcal{H}} - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}) \right\}. \quad (6.40)$$

On définit alors pour  $\lambda \in \rho(A)$  l'opérateur résolvant  $R(\lambda, A) = (\lambda I_{\mathcal{H}} - A)^{-1}$  du générateur infinitésimal  $A$ . Cet opérateur joue un rôle prépondérant dans les théorèmes de génération de  $C_0$ -semi-groupes exposés ci-dessous. Cela provient en particulier de la connexion entre l'opérateur résolvant et la transformée de Laplace d'un  $C_0$ -semi-groupe.

**Théorème 6.4** (*Curtain and Zwart, 2012*) *Soit  $T(t)$  un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Soient  $A$  son générateur infinitésimal et  $\omega_0$  son taux de croissance. Pour  $\Re(\lambda) > \omega_0$ , on a que  $\lambda \in \rho(A)$ . De plus, pour tout  $z \in \mathcal{H}$ , on a les résultats suivants.*

1.  $R(\lambda, A)z = \int_0^\infty e^{-\lambda t} T(t)z dt.$
2.  $\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{M_\omega}{\Re(\lambda) - \omega}$  où  $M_\omega$  est donné par le Théorème 6.1.
3. Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\lim_{\alpha \rightarrow \infty} \alpha R(\alpha, A)z = z.$

Le Théorème 6.4 joue un rôle fondamental dans la théorie des  $C_0$ -semi-groupes, permettant d'interpréter l'opérateur résolvant du générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  en tant que transformée de Laplace de  $T(t)$ . De plus, ce théorème donne un moyen pratique indirect de calculer le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe. C'est par exemple le cas pour l'Exemple 6.3 (*Curtain and Zwart, 2012*)[Exercice 2.14]. En effet, on a vu que dans ce cas  $\omega_0 = 0$ . Cela permet à partir du point 1 du Théorème 6.4 de calculer de manière explicite l'opérateur résolvant  $R(\alpha, A)$  pour tout  $\alpha > 0$  :

$$\forall h \in L^2(0, \infty), \quad \forall x \in [0, \infty), \quad (R(\alpha, A)h)(x) = e^{\alpha x} \int_x^\infty e^{-\alpha \tau} h(\tau) d\tau. \quad (6.41)$$

En utilisant le fait que  $D(A) = \text{Im}(R(\alpha, A))$  pour  $\alpha > 0$ , une analyse attentive permet alors de montrer par double inclusion que

$$D(A) = \left\{ f \in L^2(0, \infty) : \frac{df}{dx} \in L^2(0, \infty), f \in \text{AC}[a, b] \text{ pour tout } 0 \leq a \leq b < \infty \right\}. \quad (6.42)$$

On déduit alors de cette analyse que  $A = d/dx$ .

### 6.2.4 Théorèmes de génération des $C_0$ -semi-groupes

À présent que les principaux résultats généraux portant sur les  $C_0$ -semi-groupes et leur générateur infinitésimal ont été introduits, on se pose la question de la génération d'un  $C_0$ -semi-groupe à partir d'un opérateur  $A$  donné. En effet, pour un problème à étudier du type  $\dot{z} = Az$ , on verra dans la prochaine sous-section que les propriétés d'existence et d'unicité des solutions sont intimement liées à l'existence d'un  $C_0$ -semi-groupe dont le générateur infinitésimal est  $A$ . La nécessité de pouvoir établir si un opérateur  $A$  donné génère un  $C_0$ -semi-groupe revêt donc un caractère primordial.

#### 6.2.4.1 Théorème de Hille-Yosida

La caractérisation des opérateurs  $A$  définis sur un espace de Hilbert générant un  $C_0$ -semi-groupe est fournie par le théorème de Hille-Yosida, pilier central de la théorie des opérateurs de  $C_0$ -semi-groupe.

**Théorème 6.5 (Théorème de Hille-Yosida)** (*Curtain and Zwart, 2012*) Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur.  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  sur  $\mathcal{H}$  si et seulement si

1.  $A$  est fermé et densément défini (i.e.,  $D(A)$  dense dans  $\mathcal{H}$ );
2. il existe  $M, \omega \in \mathbb{R}$  tels que pour tout nombre réel  $\alpha > \omega$ ,  $\alpha \in \rho(A)$  et

$$\forall r \in \mathbb{N}^*, \|R(\alpha, A)^r\| \leq \frac{M}{(\alpha - \omega)^r}. \quad (6.43)$$

Dans ce cas,  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ .

Contrairement à une large majorité des théorèmes d'existence de solutions dans le cadre d'équations différentielles, la démonstration du théorème de Hille-Yosida ne repose pas sur l'un des nombreux théorèmes du point fixe. Elle repose sur une approximation de l'opérateur  $A$  par les opérateurs bornés  $A_\alpha = \alpha^2 R(\alpha, A) - \alpha I_{\mathcal{H}} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  lorsque  $\alpha > \omega$ . En effet, pour  $z \in D(A)$ , il est aisé de voir que  $A_\alpha z = \alpha R(\alpha, A)Az \xrightarrow{\alpha \rightarrow \infty} Az$  d'après le Théorème 6.4. En définissant alors le  $C_0$ -semi-groupe  $T_\alpha(t) = e^{A_\alpha t}$  généré par l'opérateur borné  $A_\alpha$ , la démonstration du théorème consiste dans un premier temps à montrer qu'en faisant passer  $T_\alpha(t)$  à la limite lorsque  $\alpha \rightarrow \infty$ , on peut définir un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$ . Dans un second temps, la démonstration se réduit à montrer que le générateur infinitésimal de  $T(t)$  coïncide avec l'opérateur  $A$  d'origine.

### 6.2.4.2 $C_0$ -semi-groupe de contraction et théorème de Lümer-Phillips

Bien que fournissant une caractérisation complète des opérateurs générant un  $C_0$ -semi-groupe, le Théorème de Hille-Yosida est en général difficile à appliquer de manière directe. Cela est principalement dû à la nécessité de vérifier la condition (6.43) pour tout  $\alpha > \omega$  et tout  $r \in \mathbb{N}^*$ . Il est cependant à noter qu'un cas simple d'application est lorsqu'un  $M \in [0, 1]$  peut être trouvé tel que pour tout  $\alpha > \omega$ ,  $\|R(\alpha, A)\| \leq M/(\alpha - \omega)$ . En effet, on a dans ce cas pour tout  $\alpha > \omega$  et tout  $r \in \mathbb{N}^*$ ,  $\|R(\alpha, A)^r\| \leq \|R(\alpha, A)\|^r \leq M^r/(\alpha - \omega)^r \leq M/(\alpha - \omega)^r$ . Ce résultat est l'une des principales motivations amenant à introduire le concept de  $C_0$ -semi-groupe de contraction.

**Définition 6.3** *Un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe vérifiant pour tout  $t \geq 0$  la majoration  $\|T(t)\| \leq 1$ .*

Notons que pour  $\omega \in \mathbb{R}$ ,  $A - \omega I_{\mathcal{H}}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $S(t)$  si et seulement si  $A$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t) = e^{\omega t} S(t)$  vérifiant  $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$ . Ce constat permet d'obtenir comme conséquence directe du Théorème de Hille-Yosida le théorème suivant basé sur le concept d'opérateur adjoint (cf. Définition D.18).

**Théorème 6.6** *(Curtain and Zwart, 2012) Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert,  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur et  $\omega > 0$ .  $A - \omega I$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction  $T(t)$  sur  $\mathcal{H}$  si et seulement si*

1.  *$A$  est fermé et densément défini ;*
2. *pour tout nombre réel  $\alpha > \omega$ ,*

$$\forall z \in D(A), \quad \|(\alpha I_{\mathcal{H}} - A)z\| \geq (\alpha - \omega)\|z\|, \quad (6.44a)$$

$$\forall z \in D(A^*), \quad \|(\alpha I_{\mathcal{H}} - A^*)z\| \geq (\alpha - \omega)\|z\|, \quad (6.44b)$$

où  $A^*$  est l'opérateur adjoint de  $A$ .

De ce théorème découle le corollaire suivant qui donne une condition suffisante généralement plus facile à vérifier en pratique.

**Corollaire 6.7** *(Curtain and Zwart, 2012) Une condition suffisante pour qu'un opérateur  $A$  fermé et densément défini sur un espace de Hilbert soit le générateur infinitésimal d'un*

$C_0$ -semi-groupe vérifiant  $\|T(t)\| \leq e^{\omega t}$  est donnée par :

$$\forall z \in D(A), \quad \operatorname{Re}(\langle Az, z \rangle) \leq \omega \|z\|^2, \quad (6.45a)$$

$$\forall z \in D(A^*), \quad \operatorname{Re}(\langle A^* z, z \rangle) \leq \omega \|z\|^2. \quad (6.45b)$$

**Exemple 6.4** (*Curtain and Zwart, 2012*) Soit l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  équipé de son produit scalaire naturel. On définit  $A = -d/dx$  sur le domaine

$$D(A) = \left\{ z \in L^2(0, 1) : \frac{dz}{dx} \in L^2(0, 1), z(0) = 0, z \in AC[0, 1] \right\}. \quad (6.46)$$

Il est aisé de montrer<sup>11</sup> que  $A$  est fermé et que son opérateur adjoint est  $A^* = d/dx$  sur le domaine

$$D(A^*) = \left\{ z \in L^2(0, 1) : \frac{dz}{dx} \in L^2(0, 1), z(1) = 0, z \in AC[0, 1] \right\}. \quad (6.47)$$

De plus, un calcul direct montre que

$$\operatorname{Re}(\langle Az, z \rangle) = -\operatorname{Re} \left( \int_0^1 \frac{dz}{dx}(\xi) \overline{z(\xi)} d\xi \right) = -\operatorname{Re} \left( \left[ \frac{1}{2} |z(\xi)|^2 \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \right) = -\frac{1}{2} |z(1)|^2 \leq 0, \quad (6.48a)$$

$$\operatorname{Re}(\langle A^* z, z \rangle) = \operatorname{Re} \left( \int_0^1 \frac{dz}{dx}(\xi) \overline{z(\xi)} d\xi \right) = \operatorname{Re} \left( \left[ \frac{1}{2} |z(\xi)|^2 \right]_{\xi=0}^{\xi=1} \right) = -\frac{1}{2} |z(0)|^2 \leq 0. \quad (6.48b)$$

Le Corollaire 6.7 assure alors que  $A$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe de contraction.

Dans le cadre des opérateurs de  $C_0$ -semi-groupe de contraction, une caractérisation alternative au théorème de Hille-Yosida est fournie par le théorème de Lumer-Phillips. Afin de l'introduire, définissons le concept d'opérateur dissipatif.

**Définition 6.4 (Opérateur dissipatif)** Un opérateur linéaire  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dit dissipatif si

$$\forall x \in D(A), \quad \operatorname{Re}(\langle Ax, x \rangle) \leq 0. \quad (6.49)$$

Le théorème de Lumer-Phillips dans le cadre des espaces de Hilbert est énoncé ci-dessous.

**Théorème 6.8 (Théorème de Lumer-Phillips)** (*Luo et al., 2012*) Soit  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ .  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe de

---

11. Confère Exemples D.1 et D.2 en Annexe D.



contraction sur  $\mathcal{H}$  si et seulement si  $A$  est dissipatif et il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que  $\text{Im}(\lambda_0 I_{\mathcal{H}} - A) = \mathcal{H}$ .

Il est en particulier à noter que le caractère fermé et densément défini de l'opérateur  $A$  n'ont, dans le cadre du théorème de Lümer-Phillips, pas besoin d'être vérifiés car sont conséquence des hypothèses du théorème.

**Exemple 6.5** De manière à illustrer l'application du théorème de Lümer-Phillips, considérons à nouveau l'opérateur  $A$  rencontré dans le cas de l'évolution de la température de la barre défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ , équipé de son produit scalaire naturel, par  $A = d^2/d^2y$  sur le domaine  $D(A) \subset \mathcal{H}$  donné par :

$$D(A) = \left\{ f \in H^2(0, 1) : \frac{df}{dy}(0) = \frac{df}{dy}(1) = 0, f, \frac{df}{dy} \in \text{AC}[0, 1] \right\}. \quad (6.50)$$

On vérifie dans un premier temps le caractère dissipatif. Pour  $f \in D(A)$ , on obtient par intégration par partie :

$$\langle Af, f \rangle = \int_0^1 \frac{d^2 f}{d^2 y}(\xi) \overline{f(\xi)} d\xi = \left[ \frac{df}{dy}(\xi) \overline{f(\xi)} \right]_{\xi=0}^{\xi=1} - \int_0^1 \left| \frac{df}{dy}(\xi) \right|^2 d\xi = - \int_0^1 \left| \frac{df}{dy}(\xi) \right|^2 d\xi \leq 0, \quad (6.51)$$

où il a été utilisé les conditions à la frontières telles que spécifiées dans la définition du domaine  $D(A)$ . L'opérateur  $A$  est donc bien dissipatif. Il reste à vérifier l'existence d'un  $\lambda_0 > 0$  tel que  $\text{Im}(\lambda_0 I_{\mathcal{H}} - A) = \mathcal{H}$ . On va le vérifier pour  $\lambda_0 = 1$ . Pour cela, fixons  $f \in L^2(0, 1)$  quelconque. On cherche alors  $h \in D(A)$  tel que  $(A - I)h = f$ , i.e.,  $\frac{d^2 h}{d^2 y} - h = f$ . En résolvant de manière classique cette équation différentielle ordinaire en tenant compte des conditions aux limites spécifiées dans le domaine  $D(A)$ , on obtient le candidat suivant :

$$\forall y \in [0, 1], \quad h(y) = C \cosh(y) - \int_0^y \sinh(y - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (6.52)$$

où la constante  $C \in \mathbb{R}$  est donnée par

$$C = \frac{1}{\sinh(1)} \int_0^1 \cosh(1 - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6.53)$$

Les deux intégrales précédentes sont bien définies puisque par l'inégalité de Cauchy-Schwartz  $L^2(0, 1) \subset L^1(0, 1)$  et les fonctions  $\sinh$  et  $\cosh$  sont bornées sur l'intervalle  $[0, 1]$ . De plus, il est aisé de voir que  $h$  est continue sur  $[0, 1]$  et donc que  $h \in L^2(0, 1)$ . Finalement, en

écrivait de manière explicite l'expression de  $\sinh$  en fonction de la fonction exponentielle,

$$\int_0^y \sinh(y - \xi) f(\xi) d\xi = \frac{e^y}{2} \int_0^y e^{-\xi} f(\xi) d\xi - \frac{e^{-y}}{2} \int_0^y e^{\xi} f(\xi) d\xi, \quad (6.54)$$

puisque  $\xi \rightarrow e^{-\xi} f(\xi)$  et  $\xi \rightarrow e^{\xi} f(\xi)$  sont dans  $L^1(0, 1)$ , on en déduit que la fonction  $h$  est absolument continue sur  $[0, 1]$ . Dès lors,  $h$  est dérivable presque partout et vérifie pour presque tout  $y \in [0, 1]$ ,

$$\frac{dh}{dy}(y) = C \sinh(y) - \int_0^y \cosh(y - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (6.55)$$

De manière similaire à ce qui a été fait précédemment, le membre de droite de l'égalité précédente est absolument continue sur  $[0, 1]$ , d'où  $dh/dy \in AC[0, 1]$ . Un calcul direct montre que l'on a bien  $(dh/dy)(0) = (dh/dy)(1) = 0$ . Finalement, pour presque tout  $y \in [0, 1]$ ,

$$\frac{d^2h}{dy^2}(y) = C \cosh(y) - \int_0^y \sinh(y - \xi) f(\xi) d\xi - f(y) = h(y) - f(y), \quad (6.56)$$

i.e.,  $\frac{d^2h}{dy^2} - f = h$  dans  $L^2(0, 1)$ . On a bien montré la surjectivité de l'opérateur  $I_{\mathcal{H}} - A$ . En appliquant le théorème de Lümer-Phillips, on en déduit que  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe de contraction.

### 6.2.4.3 Théorème de perturbation

Lorsqu'un opérateur  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe, on peut se demander dans quelle mesure une perturbation de cet opérateur permet elle de préserver la propriété de génération de  $C_0$ -semi-groupe. Une réponse est apportée par le théorème suivant.

**Théorème 6.9 (Perturbation par un opérateur borné)** (*Luo et al., 2012*) Soit  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur linéaire sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  générant un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  vérifiant  $\|T(t)\| \leq Me^{\omega t}$ . Soit un opérateur  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Alors  $A + B : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe  $S(t)$  sur  $\mathcal{H}$  vérifiant  $\|S(t)\| \leq Me^{(\omega + M\|B\|)t}$ .

Ce résultat est très utile dans la mesure où il peut grandement simplifier la preuve qu'un opérateur génère un  $C_0$ -semi-groupe. En effet, supposons que l'on souhaite étudier un opérateur  $A$  et que ce dernier peut se décomposer sous la forme  $A = A_0 + B$  avec  $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Dès lors, sur la base du Théorème 6.9, il suffit de s'assurer que  $A_0$  génère un  $C_0$ -semi-groupe pour en déduire que c'est également le cas pour  $A$ . Ce théorème sera mis à profit lors des prochains chapitres. Il est à noter que certains résultats existent également dans le cas d'opérateurs  $B$  non bornés. On renvoie le lecteur intéressé à, e.g., (Luo et al., 2012).

#### 6.2.4.4 Opérateur Riesz Spectral

On conclut cette section portant sur les théorèmes de génération des  $C_0$ -semi-groupes par un résultat sur les opérateurs Riesz-spectraux. Bien que n'étant qu'une classe particulière d'opérateurs, elle permet de traiter nombre de configurations élémentaires en donnant un lien explicite entre les valeurs propres et vecteurs propres d'un opérateur Riesz spectral et la forme prise par le  $C_0$ -semi-groupe qu'il engendre. Pour cela on introduit le concept de base de Riesz (Christensen, 2003).

**Définition 6.5 (Base de Riesz)** *Un ensemble dénombrable de vecteurs  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  forme une base de Riesz si :*

1.  $\overline{\text{vect } \phi_n}_{n \in \mathbb{N}^*} = \mathcal{H}$  ;
2. il existe  $m, M \in \mathbb{R}_+$  tels que pour tout  $N \in \mathbb{N}$ , et tout  $\alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C}^N$ ,

$$m \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2 \leq \left\| \sum_{n=1}^N \alpha_n \phi_n \right\|^2 \leq M \sum_{n=1}^N |\alpha_n|^2. \quad (6.57)$$

Il est trivial de vérifier qu'une base de Hilbert est une base de Riesz. La notion de base de Riesz est introduite de manière à étendre la notion de base de Hilbert comme en atteste le lemme suivant.

**Lemme 6.10** *Soit  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  une base de Riesz d'un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Alors,*

1. *il existe  $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  une famille de vecteur biorthogonale à  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ , i.e.,  $\langle \phi_n, \psi_m \rangle = \delta_{n,m}$  pour tout  $n, m \in \mathbb{N}^*$  ;*
2. *tout élément  $x \in \mathcal{H}$  peut être représenté de manière unique sous la forme :*

$$z = \sum_{n=1}^{\infty} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n. \quad (6.58)$$

On peut à présent introduire la notion d'opérateur Riesz spectral.

**Définition 6.6 (Opérateur Riesz spectral)** *(Curtain and Zwart, 2012) Soit opérateur linéaire  $A$  fermée et densément défini sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ . Supposons que ses valeurs propres  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  sont simples et introduisons  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  les vecteurs propres associés.  $A$  est un opérateur Riesz spectral si ses vecteurs propres forment une base de Riesz de  $\mathcal{H}$  et si l'ensemble des valeurs propres est totalement disconnecté<sup>12</sup>.*

---

12. Cela signifie que pour tout  $\lambda, \mu \in \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$ ,  $[\lambda, \mu] \not\subset \overline{\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}}$ .

On a alors le résultat suivant portant sur la génération de  $C_0$  – semi – groupe des opérateurs Riesz-spectraux.

**Théorème 6.11** (*Curtain and Zwart, 2012*) *Soit un opérateur Riesz spectral sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  de valeurs propres simples  $\{\lambda_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  et de vecteur propres  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$ . Il existe alors une famille biorthogonale  $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  à  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  telle que :*

1. *A peut être représenté sous la forme*

$$Az = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle z, \psi_n \rangle \phi_n, \quad (6.59)$$

où  $z \in D(A)$  avec,

$$D(A) = \left\{ z \in \mathcal{H} : \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2 |\langle z, \psi_n \rangle|^2 < \infty \right\}; \quad (6.60)$$

2. *A est le générateur infinitésimal d'un opérateur de  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  si et seulement si  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Re}(\lambda_n) < \infty$ . Dans ce cas, pour tout  $t \geq 0$  et  $z \in \mathcal{H}$ ,*

$$T(t)z = \sum_{n=1}^{\infty} e^{\lambda_n t} \langle z, \psi_n \rangle \phi_n \quad (6.61)$$

*et le taux de croissance du  $C_0$ -semi-groupe est donné par*

$$\omega_0 = \sup_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Re}(\lambda_n). \quad (6.62)$$

Ainsi, le Théorème 6.11 donne une condition nécessaire et suffisante pour qu'un opérateur Riesz spectral génère un  $C_0$ -semi-groupe et, le cas échéant, en donne une formulation explicite. Dans le cas particulier où  $\{\phi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  est une base de Hilbert, la famille biorthogonale et alors donnée par  $\{\psi_n, n \in \mathbb{N}^*\}$  elle-même. Un exemple d'application de ce théorème est dans le cas de l'évolution de la température de la barre.

**Exemple 6.6** *Considérons à nouveau l'opérateur  $A$  défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$ , équipé de son produit scalaire naturel, par  $A = d^2/dy^2$  sur le domaine  $D(A) \subset \mathcal{H}$  donné par :*

$$D(A) = \left\{ f \in H^2(0, 1) : \frac{df}{dy}(0) = \frac{df}{dy}(1) = 0, f, \frac{df}{dy} \in \operatorname{AC}[0, 1] \right\}. \quad (6.63)$$

*Il est aisé de montrer que  $A$  est fermé et densément défini. On cherche alors à caractériser des valeurs propres et vecteurs propres associés. Pour  $\lambda \in \mathbb{C}$  et  $\phi \in D(A)$ , l'égalité  $A\phi = \lambda\phi$*

est équivalente à l'équation

$$\frac{d^2\phi}{d^2y} = \lambda\phi. \quad (6.64)$$

Puisque  $\phi$  est continue,  $d^2\phi/d^2y$  l'est également. On en déduit que  $\phi$  est de classe  $C^2$ . Le cas  $\lambda = 0$  donne lieu, en tenant compte des conditions à la frontière, à  $\phi(y) = \alpha$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ . Dans le cas  $\lambda \neq 0$ ,  $\phi(y) = \alpha e^{\sqrt{\lambda}y} + \beta e^{-\sqrt{\lambda}y}$ , où avec les conditions à la frontière,  $\alpha = \beta$  et  $\lambda = -n^2\pi^2$  pour  $n \in \mathbb{N}^*$ . Les valeurs propres de  $A$  sont alors données par  $\lambda_n = -n^2\pi^2$  pour  $n \in \mathbb{N}$  et les vecteurs propres associés sont donnés par  $\phi_0 = 1$  et  $\phi_n = \sqrt{2}\cos(n\pi\cdot)$  qui forment une base de Hilbert de  $L^2(0,1)$ . En vertu du Théorème 6.11, l'opérateur  $A$  peut s'écrire sous la forme :

$$\forall z \in D(A), \quad Az = \sum_{n=1}^{\infty} -2n^2\pi^2 \langle z, \cos(n\pi\cdot) \rangle \cos(n\pi\cdot), \quad (6.65)$$

avec

$$D(A) = \left\{ z \in L^2(0,1) : \sum_{n=1}^{\infty} n^4\pi^4 |\langle z, \cos(n\pi\cdot) \rangle|^2 < \infty \right\}. \quad (6.66)$$

De plus, puisque  $\sup_{n \in \mathbb{N}^*} \operatorname{Re}(\lambda_n) = 0 < \infty$ ,  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe tel que pour tout  $t \geq 0$  et  $z \in \mathcal{H}$ ,

$$T(t)z = \langle z, 1 \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} 2e^{-n^2\pi^2 t} \langle z, \cos(n\pi\cdot) \rangle \cos(n\pi\cdot), \quad (6.67)$$

dont le taux de croissance est  $\omega_0 = 0$ . On retrouve ainsi, de manière rigoureuse cette fois, le résultat que l'on avait entre-aperçu de manière intuitive lors de l'exemple introductif via les équation (6.15) et (6.16).

Bien que le Théorème 6.11 soit un outil puissant pour étudier les opérateurs Riesz spectraux, la difficulté inhérente est la capacité, pour un problème donné, à caractériser les valeurs propres et vecteurs propres associés. De plus, les opérateurs Riesz spectraux ne sont qu'une partie restreinte des opérateurs générant des  $C_0$ -semi-groupes.

### 6.2.5 Well-posedness

À présent que les principaux résultats portant sur la génération de  $C_0$ -semi-groupes ont été présentés, on retourne au problème initial de la *well-posedness* d'équations différentielles sous forme abstraite.

### 6.2.5.1 Problème de Cauchy homogène

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur linéaire. On considère le problème dit de Cauchy sous la forme abstraite :

$$\dot{z}(t) = Az(t), \quad t \geq 0, \quad (6.68a)$$

$$z(0) = z_0 \in D(A). \quad (6.68b)$$

Le problème de Cauchy consiste alors à trouver une solution à (6.68a-6.68b) la notion de solution fait l'objet de la définition suivante.

**Définition 6.7** *Une fonction  $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$  est dite solution du problème de Cauchy (6.68a-6.68b) si  $z \in C^0(\mathbb{R}_+; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$  et vérifie (6.68a-6.68b) pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .*

La notion de solution au problème de Cauchy (6.68a-6.68b) est intimement lié au concept de  $C_0$ -semi-groupe, comme en atteste les théorème suivant.

**Théorème 6.12** *(Luo et al., 2012) Soit  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur linéaire densément défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  avec  $\rho(A) \neq \emptyset$ . Le problème de Cauchy (6.68a-6.68b) admet une unique solution pour toute condition initiale  $z_0 \in D(A)$  si et seulement si  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe sur  $\mathcal{H}$ .*

Ce théorème vient légitimer l'étude de l'opérateur  $A$  en tant que générateur infinitésimal (ou non) d'un  $C_0$ -semi-groupe. Il est à noter que l'hypothèse  $\rho(A) \neq \emptyset$  est indispensable dans le sens « implique » de l'énoncé du théorème précédent<sup>13</sup>, comme le montre (Luo et al., 2012)[Exemple 2.65, page 65].

### 6.2.5.2 Problème de Cauchy non homogène

Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur linéaire. On considère le problème dit de Cauchy non homogène sous la forme abstraite :

$$\dot{z}(t) = Az(t) + f(t), \quad t \geq 0, \quad (6.69a)$$

$$z(0) = z_0 \in D(A), \quad (6.69b)$$

où  $f : [0, T] \rightarrow \mathcal{H}$ . Le problème de Cauchy non homogène consiste alors à trouver une solution à (6.69a-6.69b) la notion de solution fait l'objet de la définition suivante.

---

<sup>13</sup>. Dans le sens retour, le caractère non vide de l'ensemble résolvant est garanti par le théorème de Hille-Yosida.

**Définition 6.8** Une fonction  $z : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{H}$  est dite solution de (6.69a-6.69b) sur  $[0, T]$  si  $z \in C^0([0, T]; D(A)) \cap C^1([0, T]; \mathcal{H})$  et vérifie (6.69a-6.69b) pour tout  $t \in [0, T]$ .

Le résultat classique permettant d'assurer, sous hypothèse de régularité de la fonction  $f$ , l'existence et l'unicité des solutions de (6.69a-6.69b) est fournie par le théorème suivant.

**Théorème 6.13** (Curtain and Zwart, 2012) Soient  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$ ,  $f \in C^1([0, T]; \mathcal{H})$  et  $z_0 \in D(A)$ . Alors le problème de Cauchy non homogène (6.69a-6.69b) admet une unique solution sur  $[0, T]$  et est donnée par

$$\forall t \in [0, T], \quad z(t) = T(t)z_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds. \quad (6.70)$$

On retrouve une formule analogue à celle rencontrée en dimension finie dans lequel «  $e^{At}$  » a été remplacé par l'expression du  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$ . On a ainsi une partie liée à la condition initiale  $z_0$ , tandis que le terme intégral correspond à la « réponse forcée » liée à la contribution de la fonction  $f$ .

### 6.2.5.3 Problème de contrôle à la frontière

On conclut la présentation des outils portant sur la *well-posedness* par l'introduction du problème du contrôle à la frontière qui prend la forme suivante.

$$\dot{z}(t) = \mathcal{U}z(t), \quad t \geq 0, \quad (6.71a)$$

$$\mathcal{B}z(t) = u(t), \quad t \geq 0, \quad (6.71b)$$

$$z(0) = z_0 \in D(\mathcal{U}), \quad \text{t.q. } \mathcal{B}z_0 = u(0) \quad (6.71c)$$

où  $\mathcal{U} : D(\mathcal{U}) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ ,  $u(t) \in U$  pour tout  $t \geq 0$  avec  $U$  un espace de Hilbert séparable et un opérateur à la frontière  $\mathcal{B} : D(\mathcal{B}) \subset \mathcal{H} \rightarrow U$  tel que  $D(\mathcal{U}) \subset D(\mathcal{B})$ .

On introduit alors la définition de *boundary control system* comme suit.

**Définition 6.9 (Boundary control system)** (Curtain and Zwart, 2012) On dit de (6.71a-6.71c) qu'il est un boundary control system si les deux conditions suivantes sont réunies.

1. L'opérateur  $A : D(A) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  défini sur le domaine  $D(A) = D(\mathcal{U}) \cap D(\mathcal{B})$  par  $A = \mathcal{U}|_{D(A)}$  est le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  sur  $\mathcal{H}$ .
2. Il existe un opérateur  $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$  tel que  $\text{Im}(B) \subset D(\mathcal{U})$ ,  $\mathcal{U}B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$  et  $\mathcal{B}B = I_U$ .

Dès lors, si (6.71a-6.71c) est un *boundary control system*, on peut introduire pour  $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; U)$  le problème de Cauchy non homogène suivant.

$$\dot{v}(t) = Av(t) - B\dot{u}(t) + \mathcal{U}Bu(t), \quad t \geq 0, \quad (6.72a)$$

$$v(0) = v_0 \in D(A), \quad (6.72b)$$

Avec  $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; U)$ ,  $B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$  et  $\mathcal{U}B \in \mathcal{L}(U, \mathcal{H})$ , on a alors  $-B\dot{u} + \mathcal{U}Bu \in \mathcal{C}^1([0, T]; U)$ . Puisque  $A$  génère un  $C_0$ -semi-groupe, on déduit du Théorème 6.13 que le problème de Cauchy non homogène (6.72a-6.72b) admet pour tout  $v_0 \in D(A)$  une unique solution. Le théorème ci-dessous permet alors de faire le lien entre le *boundary control system* (6.71a-6.71c) et le problème de Cauchy non homogène (6.72a-6.72b).

**Théorème 6.14** (*Curtain and Zwart, 2012*) *Considérons le boundary control system (6.71a-6.71c) et le problème de Cauchy non homogène (6.72a-6.72b). Supposons que  $u \in \mathcal{C}^2([0, T]; U)$  et soit  $z_0 \in D(\mathcal{U})$  vérifiant  $\mathcal{B}z_0 = u(0)$ . Posons alors  $v_0 = z_0 - Bu(0) \in D(A)$ . Les solutions de (6.71a-6.71c) et (6.72a-6.72b) sont alors liées par la relation  $v = z - Bu$ . En particulier, le boundary control system (6.71a-6.71c) admet une unique solution.*

En particulier, on déduit des Théorèmes 6.13 et 6.14 que la solution du *boundary control system* (6.71a-6.71c) est donnée par :

$$\forall t \in [0, T], \quad z(t) = T(t)(z_0 - Bu(0)) + Bu(t) + \int_0^t T(t-s) [-B\dot{u}(s) + \mathcal{U}Bu(s)] ds. \quad (6.73)$$

### 6.2.6 Stabilité exponentielle d'un $C_0$ -semi-groupe

Pour conclure ce chapitre, on passe en revue la notion de stabilité pour les  $C_0$ -semi-groupes. On s'intéresse en particulier à la notion de stabilité exponentielle.

**Définition 6.10** *Un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  sur un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est dit exponentiellement stable s'il existe  $\alpha, M > 0$  tels que  $\|T(t)\| \leq Me^{-\alpha t}$  pour tout  $t \geq 0$ .*

On dit que  $\alpha$  est un taux de décroissance pour  $T(t)$ . La borne supérieure des taux de croissances de  $T(t)$  correspond à  $-\omega_0$  où  $\omega_0$  est le taux de croissance de  $T(t)$ . La convergence exponentielle du  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  dont le générateur infinitésimal est noté  $A$  permet d'assurer la convergence exponentielle des solutions de  $\dot{z} = Az$  pour toute condition initiale  $z(0) = z_0 \in D(A)$ . En effet, pour  $z(t) = T(t)z_0$ , on a  $\|z(t)\| \leq \|T(t)\| \|z_0\| \leq Me^{-\alpha t} \|z_0\|$ .



La notion de convergence exponentielle en dimension infinie est beaucoup plus délicate que celle rencontrée en dimension finie. En effet, en dimension finie, la stabilité est assurée dès lors que le spectre de la matrice  $A \in \mathbb{C}^n$  est contenue dans le demi plan complexe ouvert  $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ . Cela est dû au fait que le taux de croissance  $\omega_0$  du  $C_0$ -semi-groupe  $e^{At}$  vérifie  $\omega_0 = \sup_{\lambda \in \operatorname{sp}_{\mathbb{C}}(A)} \operatorname{Re}(\lambda)$ . Bien que cette situation se retrouve dans le cas des opérateurs Riesz spectraux (confère Théorème 6.11), tel n'est pas le cas en règle général en dimension infinie. En particulier, il est possible de construire un  $C_0$ -semi-groupe tel que le spectre du générateur infinitésimal soit contenu dans le demi plan complexe fermé  $\operatorname{Re}(\lambda) \leq -1$  alors que le  $C_0$ -semi-groupe n'est pas exponentiellement stable (Luo et al., 2012)[Exemple 3.3, page 110]. De manière analogue, contrairement à la dimension finie, la stabilité asymptotique<sup>14</sup> n'implique pas la stabilité exponentielle (Luo et al., 2012)[Exemple 3.2, page 110]. Ainsi, en règle générale, l'évaluation seule des valeurs propres du générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe n'est pas suffisante pour établir la stabilité exponentielle du dit  $C_0$ -semi-groupe.

**Théorème 6.15** (*Curtain and Zwart, 2012*) *Soit  $A$  le générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  sur un espace de Hilbert. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1.  $T(t)$  est exponentiellement stable.
2. Il existe  $t_0 > 0$  tel que  $\|T(t_0)\| < 1$ .
3. Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $T(\cdot)x \in L^2(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ .
4. Il existe un opérateur  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  positif<sup>15</sup> tel que

$$\forall x \in D(A), \quad \langle Ax, Px \rangle + \langle Px, Ax \rangle \leq -\|x\|^2. \quad (6.74)$$

5. si de plus  $\mathcal{H}$  est séparable,  $\sup_{\{s \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(s) > 0\}} \|(sI_{\mathcal{H}} - A)^{-1}\| < \infty$ .

L'équation (6.74) est connue sous le nom d'équation de Lyapunov, extension directe de l'équation de Lyapunov en dimension finie.

---

14. On dit qu'un  $C_0$ -semi-groupe est asymptotiquement stable si pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\|T(t)x\| \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ .

15. Un opérateur  $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  est dit positif si  $\langle Px, x \rangle > 0$  pour tout  $x \in \mathcal{H}$  non nul.

## CHAPITRE 7    CONTRÔLE À LA FRONTIÈRE D'UNE AILE FLEXIBLE HOMOGÈNE

Dans ce chapitre, on s'intéresse au contrôle de la dynamique de l'aile telle que décrite à la Sous-Section 6.1 dans le cas particulier d'une aile homogène. On suppose que les seules grandeurs mesurées et disponibles pour la loi de commande sont les positions, vitesses et accélérations des déplacements en flexion et en torsion de l'extrémité de l'aile. La loi de commande proposée consiste alors en un retour de sortie (Section 7.1). De manière à justifier sa pertinence, les propriétés du système bouclé sont étudiées dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes. Après avoir reformulé le problème sous forme abstraite, on étudie dans un premier temps la *well-posedness* du système (Section 7.2). Dans un second temps, une analyse de type fonction de Lyapunov est menée pour établir la stabilité du système en boucle fermée (Section 7.3). Finalement, une étude numérique est effectuée afin de valider la stratégie de commande en simulation (Section 7.4).

### 7.1    Modèle de l'aile homogène, loi de commande et forme abstraite

#### 7.1.1    Modèle de l'aile homogène et loi de commande

Puisque l'on s'intéresse au cas de l'aile homogène, on suppose que ses paramètres physiques sont des constantes le long de l'aile :  $EI, GJ, \eta_\omega, \eta_\phi, \alpha_\omega, \beta_\omega, \gamma_\omega, \alpha_\phi, \beta_\phi, \gamma_\phi \in \mathbb{R}_+^*$ . On étudie alors le problème du contrôle du système d'EDP couplées suivant :

$$\omega_{tt} + c_\omega^2(\omega_{yy} + \eta_\omega \omega_{tyy})_{yy} = \alpha_\omega \phi + \beta_\omega \phi_t + \gamma_\omega \omega_t, \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (7.1a)$$

$$\phi_{tt} - c_\phi^2(\phi_y + \eta_\phi \phi_{ty})_y = \alpha_\phi \phi + \beta_\phi \phi_t + \gamma_\phi \omega_t, \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (7.1b)$$

où  $c_\omega \triangleq \sqrt{EI/\rho} \in \mathbb{R}_+^*$  et  $c_\phi \triangleq \sqrt{GJ/I_w} \in \mathbb{R}_+^*$ . Les conditions à la frontière sont données par :

$$\omega(0, t) = \omega_y(0, t) = \omega_{yy}(l, t) = \phi(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (7.2)$$

avec une commande à la frontière telle que :

$$L_{\text{tip}}(t) = -\rho c_\omega^2(\omega_{yy} + \eta_\omega \omega_{tyy})_y(l, t) + m_s \omega_{tt}(l, t), \quad t \geq 0, \quad (7.3a)$$

$$M_{\text{tip}}(t) = I_w c_\phi^2(\phi_y + \eta_\phi \phi_{ty})(l, t) + J_s \phi_{tt}(l, t), \quad t \geq 0. \quad (7.3b)$$

Les entrées de commande sont la portance  $L_{\text{tip}}(t)$  et le moment en torsion  $M_{\text{tip}}(t)$  générés à l'instant  $t \geq 0$  par les volets situés à l'extrémité de l'aile.

La stratégie de commande prend la forme :

$$L_{\text{tip}}(t) = -k_1 \rho [\omega_t(l, t) + \epsilon_1 \omega(l, t)] + m_s \omega_{tt}(l, t), \quad t \geq 0, \quad (7.4a)$$

$$M_{\text{tip}}(t) = -k_2 I_w [\phi_t(l, t) + \epsilon_2 \phi(l, t)] + J_s \phi_{tt}(l, t), \quad t \geq 0, \quad (7.4b)$$

où  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  sont deux gains de commande et  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$  deux paramètres qui seront sélectionnés par la suite. En combinant (7.3a-7.3b) et (7.4a-7.4b), on obtient les deux conditions à la frontière suivantes :

$$c_\omega^2 (\omega_{yyy}(l, t) + \eta_\omega \omega_{tyyy}(l, t)) = k_1 (\omega_t(l, t) + \epsilon_1 \omega(l, t)), \quad t \geq 0, \quad (7.5a)$$

$$c_\phi^2 (\phi_y(l, t) + \eta_\phi \phi_{ty}(l, t)) = -k_2 (\phi_t(l, t) + \epsilon_2 \phi(l, t)), \quad t \geq 0, \quad (7.5b)$$

Finalement, les conditions initiales, dont la régularité sera spécifiée plus tard, sont données par  $\omega(\cdot, 0) = \omega_0$ ,  $\omega_t(\cdot, 0) = \omega_{t0}$ ,  $\phi(\cdot, 0) = \phi_0$  et  $\phi_t(\cdot, 0) = \phi_{t0}$ .

Ce chapitre vise à démontrer le bien fondé de la stratégie de contrôle à la frontière (7.4a-7.4b).

On définit l'énergie  $E(t)$  du système<sup>1</sup> :

$$\forall t \geq 0, E(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_0^l c_\omega^2 \omega_{yy}^2(y, t) + \omega_t^2(y, t) + c_\phi^2 \phi_y^2(y, t) + \phi_t^2(y, t) dy. \quad (7.6)$$

L'objectif est de montrer la convergence exponentielle de l'énergie  $E(t)$  du système bouclé vers 0, ainsi que celle des déplacements flexibles  $\omega$  et  $\phi$  de manière uniforme le long de l'aile.

### 7.1.2 Reformulation du problème sous forme abstraite

Considérons le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \{ (f, g, h, z) \in H^2(0, l) \times L^2(0, l) \times H^1(0, l) \times L^2(0, l) : \\ f(0) = f'(0) = 0, h(0) = 0, f, f', h \in \text{AC}[0, l] \} \end{aligned} \quad (7.7)$$

---

1. La définition (7.6) adoptée ici diffère légèrement de l'énergie au sens physique de l'aile qui s'exprime sous la forme  $\frac{1}{2} \int_0^l \rho c_\omega^2 \omega_{yy}^2(y, t) + \rho \omega_t^2(y, t) + I_w c_\phi^2 \phi_y^2(y, t) + I_w \phi_t^2(y, t) dy$ . Néanmoins, on peut montrer que si  $E(t)$  converge (exponentiellement) vers 0, alors il en est de même pour l'énergie au sens physique.

avec le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  défini par<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} & \langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_{\mathcal{H},1} \\ & \triangleq \int_0^l \left[ c_\omega^2 f_1''(y) f_2''(y) + g_1(y) g_2(y) + c_\phi^2 h_1'(y) h_2'(y) + z_1(y) z_2(y) \right] dy. \end{aligned} \quad (7.8)$$

La norme associée est notée  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$ . Le choix de ce produit scalaire est motivé par la définition de l'énergie du système adoptée (7.6) ; on a ainsi :

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) = \frac{1}{2} \|(\omega(\cdot, t), \omega_t(\cdot, t), \phi(\cdot, t), \phi_t(\cdot, t))\|_{\mathcal{H},1}^2. \quad (7.9)$$

L'un des aspects fondamentaux pour mettre en œuvre la théorie des  $C_0$ -semi-groupes est la complétude de l'espace dans lequel le problème est formulé. Le prochain lemme traite cette question.

**Lemme 7.1**  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$  est un espace de Hilbert.

**Démonstration.** Vérifions tout d'abord que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  est un produit scalaire. À partir de la définition, il est aisé de voir que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  est bien défini sur  $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$  (c'est une conséquence directe de l'inégalité de Cauchy-Schwartz), bilinéaire, symétrique et positif. Il reste donc à vérifier que  $\langle X, X \rangle_{\mathcal{H},1} = 0$  avec  $X = (f, g, h, z) \in \mathcal{H}$  implique  $X = 0$ . Puisque  $c_\omega^2, c_\phi^2 > 0$ , on déduit de  $\langle X, X \rangle_{\mathcal{H},1} = 0$  que  $f'' = g = h' = z = 0$  dans  $L^2(0, 1)$ . Or, puisque  $f, f', h \in AC[0, l]$  avec  $f(0) = f'(0) = h(0)$ , on en déduit que  $f = g = 0$  d'où  $X = 0$ . On a montré que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  définit bien un produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ .

De la théorie des espaces de Sobolev (cf. Annexe D), il est connu que  $(H^m(0, l), \langle \cdot, \cdot \rangle_{H^m(0,l)})$  est un espace de Hilbert. Ainsi, l'espace produit  $H^2(0, l) \times L^2(0, l) \times H^1(0, l) \times L^2(0, l)$  équipé du produit scalaire défini par :

$$\langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_\Sigma \triangleq \langle f_1, f_2 \rangle_{H^2(0,l)} + \langle g_1, g_2 \rangle_{L^2(0,l)} + \langle h_1, h_2 \rangle_{H^1(0,l)} + \langle z_1, z_2 \rangle_{L^2(0,l)} \quad (7.10)$$

est un espace de Hilbert dont la norme associée est notée  $\|\cdot\|_\Sigma$ . Montrons que  $\mathcal{H}$  est un sous-espace fermé de  $H^2(0, l) \times L^2(0, l) \times H^1(0, l) \times L^2(0, l)$ . Soit pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $X_n = (f_n, g_n, h_n, z_n) \in \mathcal{H}$  tel qu'il existe  $X = (f, g, h, z) \in H^2(0, l) \times L^2(0, l) \times H^1(0, l) \times L^2(0, l)$  vérifiant  $\|X_n - X\|_\Sigma \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ . Alors,

$$\|f_n - f\|_{H^2(0,l)}, \|g_n - g\|_{L^2(0,l)}, \|h_n - h\|_{H^1(0,l)}, \|z_n - z\|_{L^2(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.11)$$

---

2. L'indice « 1 » dans la notation du produit scalaire est utilisé pour le différencier du second produit scalaire introduit par la suite.

En particulier,  $\|f_n - f\|_{H^2(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  implique que

$$\|f_n - f\|_{L^2(0,l)}, \|f'_n - f'\|_{L^2(0,l)}, \|f''_n - f''\|_{L^2(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0, \quad (7.12)$$

et  $\|h_n - h\|_{H^1(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$  implique que

$$\|h_n - h\|_{L^2(0,l)}, \|h'_n - h'\|_{L^2(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (7.13)$$

Puisque  $f_n, f \in AC[0, l]$ , alors pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et  $y \in [0, l]$ ,

$$f_n(y) = \underbrace{f_n(0)}_{=0} + \int_0^y f'_n(\tau) d\tau = \int_0^y f'_n(\tau) d\tau, \quad (7.14a)$$

$$f(y) = f(0) + \int_0^y f'(\tau) d\tau. \quad (7.14b)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} |f_n(y) - (f(y) - f(0))| &= \left| \int_0^y f'_n(\tau) - f'(\tau) d\tau \right| \\ &\leq \sqrt{l} \|f'_n - f'\|_{L^2(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Donc,

$$f_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{CVS} f - f(0). \quad (7.16)$$

Or, puisque  $\|f_n - f\|_{L^2(0,l)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ , la preuve classique du théorème de Riez-Fisher<sup>3</sup> portant sur la complétude de  $L^2(0, l)$  muni de sa norme naturelle assure l'existence d'une suite extraite de  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , notée  $(\tilde{f}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , telle que  $\tilde{f}_n$  converge presque partout vers  $f$ . Soit  $y^* \in (0, 1)$  un point où la convergence a lieu, i.e., tel que  $\tilde{f}_n(y^*) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(y^*)$ . À partir de (7.16), l'unicité de la limite donne donc  $f(y^*) = f(y^*) - f(0)$ , i.e.,  $f(0) = 0$ . De manière similaire, on montre que  $f'(0) = 0$  et  $g(0) = 0$  d'où  $X \in \mathcal{H}$ . On a donc montré que  $\mathcal{H}$  est un sous-espace vectoriel fermé de  $H^2(0, l) \times L^2(0, l) \times H^1(0, l) \times L^2(0, l)$ . On en déduit que  $\mathcal{H}$  équipé de la restriction du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Sigma}$  sur  $\mathcal{H}$  est un espace de Hilbert. Pour conclure la démonstration, montrons que  $\|\cdot\|_{\Sigma}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  sont des normes équivalentes sur  $\mathcal{H}$ . Dans un premier temps, il est immédiat à partir des définitions des deux normes que pour tout  $(f, g, h, z) \in \mathcal{H}$ ,

$$\|(f, g, h, z)\|_{\mathcal{H},1} \leq \max(1, c_\omega, c_\phi) \|(f, g, h, z)\|_{\Sigma}. \quad (7.17)$$

---

3. Cf. Théorème D.2 en Annexe D.

Pour  $(f, g, h, z) \in \mathcal{H}$  avec  $f, f', h \in \text{AC}[0, l]$ , puisque  $f(0) = f'(0) = h(0) = 0$ , l'application de l'inégalité de Poincaré (cf. Lemma D.9) donne

$$\begin{aligned} \|(f, g, h, z)\|_{\Sigma}^2 &= \|f\|_{H^2(0,l)}^2 + \|g\|_{L^2(0,l)}^2 + \|h\|_{H^1(0,l)}^2 + \|z\|_{L^2(0,l)}^2 \\ &\leq \left( \frac{16l^4}{\pi^4} + \frac{4l^2}{\pi^2} + 1 \right) \|f''\|_{L^2(0,l)}^2 + \|g\|_{L^2(0,l)}^2 + \left( \frac{4l^2}{\pi^2} + 1 \right) \|h'\|_{L^2(0,l)}^2 + \|z\|_{L^2(0,l)}^2 \\ &\leq M \|(f, g, h, z)\|_{\mathcal{H},1}^2, \end{aligned} \quad (7.18)$$

où  $M = \max \left( \frac{1}{c_\omega^2} \left( \frac{16l^4}{\pi^4} + \frac{4l^2}{\pi^2} + 1 \right), \frac{1}{c_\phi^2} \left( \frac{4l^2}{\pi^2} + 1 \right), 1 \right)$ . On a montré que  $\|\cdot\|_{\Sigma}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  sont équivalentes sur  $\mathcal{H}$ . On en déduit finalement que  $\mathcal{H}$  équipé du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  est un espace de Hilbert.  $\square$

On introduit à présent, à partir des EDP couplées (7.1a-7.1b), l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A} : \quad D(\mathcal{A}) &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (f, g, h, z) &\longrightarrow (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \end{aligned} \quad (7.19)$$

où

$$\tilde{f} \triangleq g; \quad (7.20a)$$

$$\tilde{g} \triangleq -c_\omega^2(f'' + \eta_\omega g'')'' + \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g; \quad (7.20b)$$

$$\tilde{h} \triangleq z; \quad (7.20c)$$

$$\tilde{z} \triangleq c_\phi^2(h' + \eta_\phi z')' + \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g; \quad (7.20d)$$

défini sur le domaine :

$$\begin{aligned} D(\mathcal{A}) &\triangleq \{(f, g, h, z) \in \mathcal{H} : \\ &\quad g \in H^2(0, l), z \in H^1(0, l), f'' + \eta_\omega g'' \in H^2(0, l), h' + \eta_\phi z' \in H^1(0, l), \\ &\quad f(0) = f'(0) = 0, g(0) = g'(0) = 0, h(0) = 0, z(0) = 0, (f'' + \eta_\omega g'')(l) = 0, \\ &\quad c_\omega^2(f'' + \eta_\omega g'')'(l) = k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)), c_\phi^2(h' + \eta_\phi z')(l) = -k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l)), \\ &\quad f, f', g, g', h, z, (f'' + \eta_\omega g''), (f'' + \eta_\omega g'')', (h' + \eta_\phi z') \in \text{AC}[0, l]\}, \end{aligned} \quad (7.21)$$

qui a été choisi de manière à tenir compte des conditions aux frontières (7.2) et (7.5a-7.5b). Si l'on interprète les dérivées temporelles et spatiales au sens classique des dérivées partielles<sup>4</sup>,

---

4. Ce qui, dans le problème de Cauchy traité par la suite n'est pas le cas puisque la dérivée spatiale correspond à une dérivée faible au sens des espaces de Sobolev alors que la dérivée temporelle est une dérivée

la condition à la frontière  $\omega_{yy}(l, t) = 0$  implique  $\omega_{tyy}(l, t) = 0$ , donnant la condition  $\omega_{yy}(l, t) + \eta_\omega \omega_{tyy}(l, t) = 0$ . *A contrario*,  $\omega_{yy}(l, t) + \eta_\omega \omega_{tyy}(l, t) = 0$  avec la condition initiale  $\omega_{yy}(l, 0) = 0$  implique  $\omega_{yy}(l, t) = 0$  pour tout  $t \geq 0$ . Cette observation motive l'introduction de la contrainte à la frontière  $(f'' + \eta_\omega g'')(l) = 0$  dans (7.21).

Le problème de Cauchy investigué dans ce chapitre prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{A}X(t), \quad t > 0 \\ X(0) = X_0 \in D(\mathcal{A}) \end{cases} \quad (7.22)$$

où le vecteur d'état est donné par  $X(t) = (\omega(\cdot, t), \omega_t(\cdot, t), \phi(\cdot, t), \phi_t(\cdot, t))$  et la condition initiale est telle que  $X_0 = (\omega_0, \omega_{t0}, \phi_0, \phi_{t0}) \in D(\mathcal{A})$ . Il s'agit donc de démontrer que le problème de Cauchy (7.22) admet pour tout condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$  donnée une unique solution  $X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+; D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ . On a besoin pour cela de vérifier que l'opérateur  $\mathcal{A}$  est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe sur  $\mathcal{H}$ .

## 7.2 Well-posedness

De manière d'étudier les propriétés de l'opérateur  $\mathcal{A}$ , on introduit les deux opérateurs linéaires  $\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}_2 : D(\mathcal{A}_2) \rightarrow \mathcal{H}$  définis par :

$$\mathcal{A}_1(f, g, h, z) \triangleq (g, -c_\omega^2(f'' + \eta_\omega g'')'', z, c_\phi^2(h' + \eta_\phi z')') \quad (7.23a)$$

$$\mathcal{A}_2(f, g, h, z) \triangleq (0, \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, 0, \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g) \quad (7.23b)$$

avec les domaines  $D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A})$  et  $D(\mathcal{A}_2) = \mathcal{H}$ . En particulier, ils sont tels que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  sur le domaine  $D(\mathcal{A})$ .

### 7.2.1 Motivation et introduction d'un second produit scalaire

On souhaite dans un premier temps montrer que l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  génère un  $C_0$ -semi-groupe. Pour cela, on souhaite appliquer le théorème de Lümer-Phillips (Théorème 6.8) dont la conclusion est fournie au lemme suivant.

**Lemme 7.2**  $\mathcal{A}_1$  n'est pas un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{\mathcal{H},1}$ .

---

de Fréchet dans un espace de Hilbert.

**Démonstration.** Pour  $X = (f, g, h, z) \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} &= \left\langle \left( g, -c_\omega^2 (f'' + \eta_\omega g'')'', z, c_\phi^2 (h' + \eta_\phi z')' \right), (f, g, h, z) \right\rangle_{\mathcal{H},1} \\ &= c_\omega^2 \int_0^l f''(y) g''(y) dy - c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')''(y) g(y) dy \\ &\quad + c_\phi^2 \int_0^l h'(y) z'(y) dy + c_\phi^2 \int_0^l (h' + \eta_\phi z')'(y) z(y) dy. \end{aligned} \quad (7.24)$$

En intégrant par partie avec les conditions à la frontière (7.21), on obtient :

$$\begin{aligned} c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')''(y) g(y) dy &= c_\omega^2 [(f'' + \eta_\omega g'')'(y) g(y)]_{y=0}^{y=l} - c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')'(y) g'(y) dy \\ &= k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)) g(l) - c_\omega^2 [(f'' + \eta_\omega g'')(y) g'(y)]_{y=0}^{y=l} \\ &\quad + c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')(y) g''(y) dy \\ &= k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)) g(l) + c_\omega^2 \int_0^l f''(y) g''(y) dy + \eta_\omega c_\omega^2 \int_0^l g''^2(y) dy, \end{aligned} \quad (7.25)$$

ainsi que

$$\begin{aligned} c_\phi^2 \int_0^l (h' + \eta_\phi z')'(y) z(y) dy &= c_\phi^2 [(h' + \eta_\phi z')(y) z(y)]_{y=0}^{y=l} - c_\phi^2 \int_0^l (h' + \eta_\phi z')(y) z'(y) dy \\ &= -k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l)) z(l) - c_\phi^2 \int_0^l h'(y) z'(y) dy - \eta_\phi c_\phi^2 \int_0^l z'^2(y) dy. \end{aligned} \quad (7.26)$$

On en déduit l'identité :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} &= -k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)) g(l) - \eta_\omega c_\omega^2 \int_0^l g''^2(y) dy \\ &\quad - k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l)) z(l) - \eta_\phi c_\phi^2 \int_0^l z'^2(y) dy. \end{aligned} \quad (7.27)$$

L'équation (7.27) permet de conclure que l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  n'est pas dissipatif relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$ . En effet, en prenant  $f = g = 0$ ,  $h(y) = (2\kappa_1/l - \kappa_2)y + (-\kappa_1/l^2 + \kappa_2/l)y^2$  et  $z(y) = y/l$ , où  $\kappa_1 = -(1 + k_2 + \eta_\phi c_\phi^2/l)/(k_2 \epsilon_2) \in \mathbb{R}$  et  $\kappa_2 = -k_2(1 + \epsilon_2 \kappa_1)/c_\phi^2 - \eta_\phi/l \in \mathbb{R}$ , il est aisé de vérifier que  $(f, g, h, z) \in D(\mathcal{A})$  car la nature polynomiale de  $f, g, h$  et  $z$  permet de satisfaire les hypothèses de régularité, tandis que les conditions à la frontière se vérifient par calcul direct. En effet,  $h(0) = z(0) = 0$  et, sur la base de  $h(l) = \kappa_1$ ,  $h'(l) = \kappa_2$ ,  $z(l) = 1$



et  $z'(l) = 1/l$ , on a

$$c_\phi^2(h' + \eta_\phi z')(l) = c_\phi^2(\kappa_2 + \eta_\phi/l) = -k_2(1 + \epsilon_2\kappa_1) = -k_2(z(l) + \epsilon_2h(l)). \quad (7.28)$$

Cependant, pour ce choix spécifique de fonctions, on a

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1(f, g, h, z), (f, g, h, z) \rangle_{\mathcal{H},1} &= -k_2 z(l)^2 - k_2 \epsilon_2 h(l) z(l) - \eta_\phi c_\phi^2 \int_0^l z'^2(y) dy \\ &= -k_2 - k_2 \epsilon_2 \kappa_1 - \eta_\phi c_\phi^2 / l \\ &= 1, \end{aligned} \quad (7.29)$$

ce qui implique que  $\langle \mathcal{A}_1(f, g, h, z), (f, g, h, z) \rangle_{\mathcal{H},1} = 1 > 0$ , i.e., que  $\mathcal{A}_1$  n'est pas dissipatif sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$ . En conséquence, le théorème de Lümer-Phillips (Théorème 6.8) assure que  $\mathcal{A}_1$  ne génère pas un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$ .  $\square$

Le résultat précédent ne permet pas de conclure que  $\mathcal{A}_1$  ne génère pas de  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$ . Il permet simplement de conclure que s'il en génère un, ce dernier n'est pas un  $C_0$ -semi-groupe de contraction. De manière à pouvoir réellement conclure quant à la génération ou non d'un  $C_0$ -semi-groupe, la première approche possible est de recourir au Théorème de Hille-Yosida (Théorème 6.5) qui fournit une caractérisation complète des opérateurs générant des  $C_0$ -semi-groupes. Cependant, la condition (6.43) est généralement difficile à vérifier de manière directe. C'est pour cette raison que l'on propose ici une approche alternative permettant de recourir malgré tout, en dépit du lemme précédent, au théorème de Lümer-Phillips. Pour cela, il est nécessaire de choisir un nouveau produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  sur  $\mathcal{H}$  vérifiant les trois conditions suivantes :

1.  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un espace de Hilbert ;
2.  $\mathcal{A}_1$  est dissipatif relativement à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  ;
3. les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  sont équivalentes.

Les deux premières conditions visent à se mettre dans un cadre favorable pour appliquer le théorème de Lümer-Phillips. La troisième condition vise quant à elle à pouvoir transposer une partie des résultats obtenus dans l'espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  dans celui d'origine  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$ .

Dans ce contexte, on introduit le candidat  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  défini ci-dessous pour tout  $(f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \in \mathcal{H}$  par

$$\begin{aligned} \langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_{\mathcal{H},2} &\triangleq \langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_{\mathcal{H},1} \\ &+ \epsilon_1 \int_0^l [f_1(y)g_2(y) + g_1(y)f_2(y)] dy \\ &+ \epsilon_2 \int_0^l [h_1(y)z_2(y) + z_1(y)h_2(y)] dy, \end{aligned} \quad (7.30)$$

où  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  sont les paramètres introduits par la stratégie de contrôle (7.4a-7.4b) et intervenant en conséquence dans la définition du domaine  $D(\mathcal{A})$  (7.21).

De manière à procéder à l'étude de ce candidat, on introduit la constante  $K_m \in \mathbb{R}_+^*$  définie par

$$K_m \triangleq \max \left( \frac{1}{c_\phi}, \frac{1}{c_\omega}, \frac{4l^2}{\pi^2 c_\phi}, \frac{16l^4}{\pi^4 c_\omega} \right). \quad (7.31)$$

On a alors le résultat suivant.

**Lemme 7.3** *Pour tout  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in (0, 1/K_m)$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est un produit scalaire pour  $\mathcal{H}$ . De plus, la norme associée à ce produit scalaire, notée  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$ , est équivalente à  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$ .*

**Démonstration.** Il est aisé de voir que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est bien défini (application directe de l'inégalité de Cauchy-Schwartz), bilinéaire et symétrique. Pour tout  $X = (f, g, h, z) \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle X, X \rangle_{\mathcal{H},2} = \|X\|_{\mathcal{H},1}^2 + 2\epsilon_1 \int_0^l f(y)g(y)dy + 2\epsilon_2 \int_0^l h(y)z(y)dy. \quad (7.32)$$

En appliquant l'inégalité de Young<sup>5</sup> puis l'inégalité de Poincaré<sup>6</sup> pour  $h \in H^1(0, l)$  avec  $h(0) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l h(y)z(y)dy \right| &\leq \frac{1}{c_\phi} \int_0^l |c_\phi h(y)z(y)| dy \\ &\leq \frac{1}{2c_\phi} \left[ \int_0^l c_\phi^2 h^2(y)dy + \int_0^l z^2(y)dy \right] \\ &\leq \frac{1}{2c_\phi} \left[ \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l c_\phi^2 h'^2(y)dy + \int_0^l z^2(y)dy \right] \\ &\leq \frac{\max(1, 4l^2/\pi^2)}{2c_\phi} \int_0^l c_\phi^2 h'^2(y) + z^2(y)dy. \end{aligned} \quad (7.33)$$

---

5.  $\forall a, b \geq 0, \forall r > 0, ab \leq \frac{a^2}{2r} + \frac{rb^2}{2}$ .

6. Confère Lemma D.9

De manière analogue, en appliquant l'inégalité de Young puis celle de Poincaré pour  $f, f' \in H^1(0, l)$  avec  $f(0) = f'(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l f(y)g(y)dy \right| &\leq \frac{1}{c_\omega} \int_0^l |c_\omega f(y)g(y)| dy \\
&\leq \frac{1}{2c_\omega} \left[ \int_0^l c_\omega^2 f^2(y)dy + \int_0^l g^2(y)dy \right] \\
&\leq \frac{1}{2c_\omega} \left[ \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l c_\omega^2 f'^2(y)dy + \int_0^l g^2(y)dy \right] \\
&\leq \frac{1}{2c_\omega} \left[ \frac{16l^4}{\pi^4} \int_0^l c_\omega^2 f''^2(y)dy + \int_0^l g^2(y)dy \right] \\
&\leq \frac{\max(1, 16l^4/\pi^4)}{2c_\omega} \int_0^l c_\omega^2 f''^2(y) + g^2(y)dy.
\end{aligned} \tag{7.34}$$

Ainsi, pour tout  $X \in \mathcal{H}$ ,

$$(1 - \epsilon_m K_m) \|X\|_{\mathcal{H},1}^2 \leq \langle X, X \rangle_{\mathcal{H},2} \leq (1 + \epsilon_m K_m) \|X\|_{\mathcal{H},1}^2. \tag{7.35}$$

où  $\epsilon_m = \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Puisque par hypothèse  $0 < \epsilon_m < 1/K_m$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est défini positif et est donc bien un produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ . De plus, en notant  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  la norme associée, on a pour tout  $X \in \mathcal{H}$ ,

$$\sqrt{1 - \epsilon_m K_m} \|X\|_{\mathcal{H},1} \leq \|X\|_{\mathcal{H},2} \leq \sqrt{1 + \epsilon_m K_m} \|X\|_{\mathcal{H},1}. \tag{7.36}$$

On a donc montré que  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  sont équivalentes.  $\square$

On déduit directement du lemme précédent le corollaire suivant.

**Corollaire 7.4**  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un espace de Hilbert.

Par la suite, on supposera toujours que  $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1/K_m$ , de telle sorte que le Lemme 7.3 s'applique.

### 7.2.2 $\mathcal{A}_1$ génère un $C_0$ -semi-groupe

On cherche à appliquer le théorème de Lümer-Phillips sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ . Pour cela, on introduit dans un premier temps le résultat suivant

**Lemme 7.5** *L'opérateur  $\mathcal{A}_1^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(\mathcal{A}_1)$  existe et est borné, i.e.,  $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Ainsi  $0 \in \rho(\mathcal{A}_1)$  et  $\mathcal{A}_1$  est fermé.*

Puisque  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  sont équivalentes, il est suffisant de démontrer que le résultat est vrai pour  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  pour en déduire immédiatement qu'il est aussi valide pour  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$ .

**Démonstration.** On démontre dans un premier temps que  $\mathcal{A}_1$  est surjectif. Fixons  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$  et cherchons  $(f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1)$  tel que  $\mathcal{A}_1(f, g, h, z) = (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z})$ , i.e.,

$$g = \tilde{f} \quad \text{in } H^2(0, l); \quad (7.37a)$$

$$-c_\omega^2(f'' + \eta_\omega g'')'' = \tilde{g} \quad \text{in } L^2(0, l); \quad (7.37b)$$

$$z = \tilde{h} \quad \text{in } H^1(0, l); \quad (7.37c)$$

$$c_\phi^2(h' + \eta_\phi z')' = \tilde{z} \quad \text{in } L^2(0, l). \quad (7.37d)$$

Le principal intérêt de l'introduction de l'opérateur  $(\mathcal{A}_1, D(\mathcal{A}_1))$  réside dans le découplage des équations (7.37a)-(7.37b) et (7.37c)-(7.37d), rendant plus simple leur étude. Ainsi, il est possible de résoudre (7.37a)-(7.37b) indépendamment de (7.37c)-(7.37d). On procède pour cela par « analyse/synthèse ».

**Résolution des équations (7.37a)-(7.37b).** Notons tout d'abord que l'équation (7.37a) donne directement  $g = \tilde{f}$  avec, par définition de  $\mathcal{H}$ ,  $\tilde{f} \in H^2(0, l)$ ,  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$  et  $\tilde{f}, \tilde{f}'$  absolument continues, ce qui est compatible avec la définition de  $D(\mathcal{A}_1)$ .

Partie analyse. Sur la base de (7.37b), on cherche une fonction  $f \in H^2(0, l)$  telle que  $f(0) = f'(0) = 0$ ,  $f'' + \eta_\omega \tilde{f}'' \in H^2(0, l)$ ,  $(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')(l) = 0$ ,  $c_\omega^2(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')'(l) = k_1(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l))$ , avec  $f, f', (f'' + \eta_\omega \tilde{f}''), (f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')' \in \text{AC}[0, l]$  et vérifiant

$$c_\omega^2(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')'' = -\tilde{g}. \quad (7.38)$$

Par intégrations successives, on obtient pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} c_\omega^2(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')'(y) &= c_\omega^2(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')'(l) + \int_y^l \tilde{g}(\xi) d\xi \\ &= k_1(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) + \int_y^l \tilde{g}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (7.39a)$$

$$\begin{aligned} c_\omega^2(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')(y) &= c_\omega^2(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')(l) + k_1(y - l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) - \int_y^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \\ &= k_1(y - l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) - \int_y^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \quad (7.39b)$$

$$\begin{aligned} c_\omega^2(f'(y) + \eta_\omega \tilde{f}'(y)) &= c_\omega^2(f'(0) + \eta_\omega \tilde{f}'(0)) + \frac{k_1}{2} y(y - 2l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) \\ &\quad - \int_0^y \int_{\xi_1}^l \int_{\xi_2}^l \tilde{g}(\xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \end{aligned}$$

$$= \frac{k_1}{2} y(y - 2l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) - \int_0^y \int_{\xi_1}^l \int_{\xi_2}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1, \quad (7.39c)$$

$$\begin{aligned} c_\omega^2(f(y) + \eta_\omega \tilde{f}(y)) &= c_\omega^2(f(0) + \eta_\omega \tilde{f}(0)) + \frac{k_1}{6} y^2(y - 3l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) \\ &\quad - \int_0^y \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ &= \frac{k_1}{6} y^2(y - 3l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) - \int_0^y \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.39d)$$

On en déduit que pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$f(y) = -\eta_\omega \tilde{f}(y) + \frac{k_1}{6c_\omega^2} y^2(y - 3l)(\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)) - \frac{1}{c_\omega^2} \int_0^y \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1, \quad (7.40)$$

ce qui définit  $f$  de manière implicite puisque  $f(l)$  intervient dans le membre de droite de l'équation précédente. En évaluant en  $y = l$  et en isolant  $f(l)$ , on obtient que

$$f(l) = -\frac{\eta_\omega c_\omega^2 + k_1 l^3/3}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3/3} \tilde{f}(l) - \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3/3} \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1, \quad (7.41)$$

qui est bien défini puisque  $\eta_\omega c_\omega^2 + k_1 l^3/3 > 0$ . On en déduit alors que pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} f(y) &= -\eta_\omega \tilde{f}(y) + \frac{k_1}{6c_\omega^2} y^2(y - 3l) \left( 1 - \epsilon_1 \frac{\eta_\omega c_\omega^2 + k_1 l^3/3}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3/3} \right) \tilde{f}(l) \\ &\quad - \frac{1}{c_\omega^2} \int_0^y \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ &\quad - \frac{k_1}{6c_\omega^2} y^2(y - 3l) \frac{\epsilon_1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3/3} \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ &= -\eta_\omega \tilde{f}(y) + \frac{k_1}{6} \frac{1 - \epsilon_1 \eta_\omega}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3/3} y^2(y - 3l) \tilde{f}(l) \\ &\quad - \frac{1}{c_\omega^2} \int_0^y \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ &\quad - \frac{\epsilon_1 k_1}{6c_\omega^2} \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3/3} y^2(y - 3l) \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.42)$$

Partie synthèse. Sur la base des développements précédents, on pose pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} f(y) \triangleq & -\eta_\omega \tilde{f}(y) + \frac{k_1}{6} \frac{1 - \epsilon_1 \eta_\omega}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} y^2 (y - 3l) \tilde{f}(l) \\ & - \frac{1}{c_\omega^2} \int_0^y \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ & - \frac{\epsilon_1 k_1}{6 c_\omega^2} \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} y^2 (y - 3l) \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.43)$$

On vérifie que  $f(0) = -\eta_\omega \tilde{f}(0) = 0$ . Puisque  $\tilde{f} \in H^2(0, l) \subset \mathcal{C}^1[0, l]$  et  $\tilde{g} \in L^2(0, l) \subset L^1(0, l)$ , on obtient que pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} f'(y) = & -\eta_\omega \tilde{f}'(y) + \frac{k_1}{2} \frac{1 - \epsilon_1 \eta_\omega}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} y (y - 2l) \tilde{f}(l) - \frac{1}{c_\omega^2} \int_0^y \int_{\xi_1}^l \int_{\xi_2}^l \tilde{g}(\xi_3) d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ & - \frac{\epsilon_1 k_1}{2 c_\omega^2} \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} y (y - 2l) \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \quad (7.44)$$

avec  $f'(0) = -\eta_\omega \tilde{f}'(0) = 0$ , ainsi que pour presque tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} f''(y) = & -\eta_\omega \tilde{f}''(y) + k_1 \frac{1 - \epsilon_1 \eta_\omega}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} (y - l) \tilde{f}(l) - \frac{1}{c_\omega^2} \int_y^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \\ & - \frac{\epsilon_1 k_1}{c_\omega^2} \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} (y - l) \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \quad (7.45)$$

dont on déduit que  $f \in H^2(0, l)$  avec  $(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'') \in \text{AC}[0, l]$  et  $(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')(l) = 0$ . On obtient que  $(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'') \in H^2(0, l)$  et vérifie pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} (f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')(y) = & k_1 \frac{1 - \epsilon_1 \eta_\omega}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} \tilde{f}(l) + \frac{1}{c_\omega^2} \int_y^l \tilde{g}(\xi) d\xi \\ & - \frac{\epsilon_1 k_1}{c_\omega^2} \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.46)$$

En évaluant en  $y = l$ , on déduit que

$$\begin{aligned} c_\omega^2 (f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')(l) = & k_1 c_\omega^2 \frac{1 - \epsilon_1 \eta_\omega}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} \tilde{f}(l) - \epsilon_1 k_1 \frac{1}{c_\omega^2 + \epsilon_1 k_1 l^3 / 3} \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \\ = & k_1 (\tilde{f}(l) + \epsilon_1 f(l)). \end{aligned} \quad (7.47)$$

Finalement, en appliquant le Lemme D.8 avec  $\tilde{g} \in L^2(0, l) \subset L^1(0, l)$ , on a pour presque tout  $y \in [0, l]$ ,

$$(f'' + \eta_\omega \tilde{f}'')''(y) = -\frac{1}{c_\omega^2} \tilde{g}(y). \quad (7.48)$$

Puisque  $\tilde{f} = g$ , on obtient que  $(f'' + \eta_\omega g'')'' = -\frac{1}{c_\omega^2} \tilde{g}$  dans  $L^2(0, l)$  avec  $f, f', (f'' + \eta_\omega g''), (f'' + \eta_\omega g'')$  absolument continues.

**Résolution des équations (7.37c)-(7.37d).** Notons tout d'abord que l'équation (7.37c) donne  $z = \tilde{h}$  avec, par définition de  $\mathcal{H}$ ,  $\tilde{h} \in H^1(0, l)$ ,  $\tilde{h}(0) = 0$  et  $\tilde{h}$  absolument continue, ce qui est compatible avec la définition de  $D(\mathcal{A}_1)$ .

Partie analyse. En partant de (7.37d), on recherche une fonction  $h \in H^1(0, l)$  telle que  $h(0) = 0$ ,  $h' + \eta_\phi \tilde{h}' \in H^1(0, l)$ ,  $c_\phi^2(h' + \eta_\phi \tilde{h}')(l) = -k_2(\tilde{h}(l) + \epsilon_2 h(l))$ , avec  $h, h' + \eta_\phi \tilde{h}'$  absolument continues et

$$c_\phi^2(h' + \eta_\phi \tilde{h}')' = \tilde{z}. \quad (7.49)$$

Par intégrations successives, on obtient pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} c_\phi^2(h' + \eta_\phi \tilde{h}')(y) &= c_\phi^2(h' + \eta_\phi \tilde{h}')(l) - \int_y^l \tilde{z}(s) ds \\ &= -k_2(\tilde{h}(l) + \epsilon_2 h(l)) - \int_y^l \tilde{z}(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (7.50a)$$

$$\begin{aligned} c_\phi^2(h(y) + \eta_\phi \tilde{h}(y)) &= c_\phi^2(h(0) + \eta_\phi \tilde{h}(0)) - k_2 y(\tilde{h}(l) + \epsilon_2 h(l)) - \int_0^y \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \\ &= -k_2 y(\tilde{h}(l) + \epsilon_2 h(l)) - \int_0^y \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.50b)$$

On en déduit donc que pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$h(y) = -\eta_\phi \tilde{h}(y) - \frac{k_2}{c_\phi^2} y(\tilde{h}(l) + \epsilon_2 h(l)) - \frac{1}{c_\phi^2} \int_0^y \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \quad (7.51)$$

ce qui définit  $h$  de manière implicite puisque  $h(l)$  intervient dans le terme de droite de l'égalité précédente. En évaluant en  $y = l$  et en isolant  $h(l)$ , on obtient que

$$h(l) = -\frac{\eta_\phi c_\phi^2 + k_2 l}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \tilde{h}(l) - \frac{1}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \quad (7.52)$$

qui est bien défini car  $c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l > 0$ . On en déduit donc que

$$\begin{aligned} h(y) &= -\eta_\phi \tilde{h}(y) - \frac{k_2}{c_\phi^2} y \left( 1 - \epsilon_2 \frac{\eta_\phi c_\phi^2 + k_2 l}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \right) \tilde{h}(l) \\ &\quad - \frac{1}{c_\phi^2} \int_0^y \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \frac{k_2}{c_\phi^2} y \frac{\epsilon_2}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \\ &= -\eta_\phi \tilde{h}(y) - k_2 \frac{1 - \epsilon_2 \eta_\phi}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} y \tilde{h}(l) \end{aligned} \quad (7.53)$$

$$-\frac{1}{c_\phi^2} \int_0^y \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \frac{k_2}{c_\phi^2} \frac{\epsilon_2}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} y \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1.$$

Partie synthèse. Sur la base des développements précédents, posons pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} h(y) &\triangleq -\eta_\phi \tilde{h}(y) - k_2 \frac{1 - \epsilon_2 \eta_\phi}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} y \tilde{h}(l) \\ &\quad - \frac{1}{c_\phi^2} \int_0^y \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + \frac{k_2}{c_\phi^2} \frac{\epsilon_2}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} y \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \quad (7.54)$$

qui vérifie  $h(0) = -\eta_\phi \tilde{h}(0) = 0$ . Puisque  $\tilde{h} \in H^1(0, l)$  et  $\tilde{z} \in L^2(0, l)$ , on obtient que pour presque tout  $y \in [0, l]$ ,

$$\begin{aligned} h'(y) &= -\eta_\phi \tilde{h}'(y) - k_2 \frac{1 - \epsilon_2 \eta_\phi}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \tilde{h}(l) \\ &\quad - \frac{1}{c_\phi^2} \int_y^l \tilde{z}(\xi) d\xi + \frac{k_2}{c_\phi^2} \frac{\epsilon_2}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.55)$$

Ainsi,  $(h' + \eta_\phi \tilde{h}') \in \text{AC}[0, l]$  et son évaluation en  $y = l$  donne :

$$\begin{aligned} c_\phi^2 (h' + \eta_\phi \tilde{h}')(l) &= -k_2 c_\phi^2 \frac{1 - \epsilon_2 \eta_\phi}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \tilde{h}(l) + k_2 \frac{\epsilon_2}{c_\phi^2 + \epsilon_2 k_2 l} \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \\ &= -k_2 (\tilde{h}(l) + \epsilon_2 h(l)). \end{aligned} \quad (7.56)$$

Finalement, en appliquant le Lemme D.8 avec  $\tilde{z} \in L^2(0, l) \subset L^1(0, l)$ , on a pour presque tout  $y \in [0, l]$ ,

$$(h' + \eta_\phi \tilde{h}')'(y) = \frac{1}{c_\phi^2} \tilde{z}(y). \quad (7.57)$$

Puisque  $\tilde{h} = z$ , on obtient que  $(h' + \eta_\phi z')' = \frac{1}{c_\phi^2} \tilde{z}$  avec  $h$  et  $(h' + \eta_\phi z')$  absolument continues.

**Bilan de l'étude sur la surjectivité.** On a montré que pour tout élément  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}_1(f, \tilde{f}, h, \tilde{h}) = (\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z})$  avec  $(f, \tilde{f}, h, \tilde{h}) \in D(\mathcal{A}_1)$  où  $\tilde{f}$  et  $\tilde{h}$  sont respectivement définies par (7.43) et (7.54). On a ainsi prouvé que  $\mathcal{A}_1$  est surjectif. Il s'agit à présent d'étudier la question de l'injectivité.

**Étude de l'injectivité.** Par linéarité, il est suffisant de montrer que pour  $(f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1)$ ,  $\mathcal{A}_1(f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0) \Rightarrow (f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0)$ . Par définition,  $\mathcal{A}_1(f, g, h, z) =$



$(0, 0, 0, 0)$  implique que :

$$g = 0 \quad \text{in } H^2(0, l); \quad (7.58a)$$

$$-c_\omega^2(f'' + \eta_\omega g'')'' = 0 \quad \text{in } L^2(0, l); \quad (7.58b)$$

$$z = 0 \quad \text{in } H^1(0, l); \quad (7.58c)$$

$$c_\phi^2(h' + \eta_\phi z')' = 0 \quad \text{in } L^2(0, l). \quad (7.58d)$$

Alors  $g = 0$  dans  $H^2(0, l)$  et  $z = 0$  dans  $H^1(0, l)$ . On en déduit alors que  $f'''' = 0$  et  $h'' = 0$  dans  $L^2(0, l)$ . Puisque  $(f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1)$ , les conditions d'intégration sont  $f(0) = f'(0) = f''(l) = 0$ ,  $f'''(l) = (k_1\epsilon_1/c_\omega^2)f(l)$ ,  $h(0) = 0$  et  $h'(l) = -(k_2\epsilon_2/c_\phi^2)h(l)$ . Ainsi, de  $f''''(y) = 0$  pour presque tout  $y \in [0, l]$  et  $f, f', f'', f''' \in AC[0, l]$ , on obtient par intégrations successives que pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$f'''(y) = f'''(l) = \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}f(l) \quad (7.59a)$$

$$\Rightarrow f''(y) = \underbrace{f''(l)}_{=0} + \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}(y-l)f(l) = \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}(y-l)f(l) \quad (7.59b)$$

$$\Rightarrow f'(y) = \underbrace{f'(0)}_{=0} + \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}(y^2/2 - ly)f(l) = \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}(y^2/2 - ly)f(l) \quad (7.59c)$$

$$\Rightarrow f(y) = \underbrace{f(0)}_{=0} + \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}(y^3/6 - ly^2/2)f(l) = \frac{k_1\epsilon_1}{c_\omega^2}(y^3/6 - ly^2/2)f(l). \quad (7.59d)$$

En évaluant la dernière égalité en  $y = l$ , on obtient  $(1 + k_1\epsilon_1 l^3/(3c_\omega^2))f(l) = 0$ . Puisque  $k_1, \epsilon_1, l > 0$ ,  $f(l) = 0$  et donc  $f = 0$ . De manière analogue, puisque  $h''(y) = 0$  pour presque tout  $y \in [0, l]$  et  $h, h' \in AC[0, l]$ , on a pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$h'(y) = h'(l) = -\frac{k_2\epsilon_2}{c_\phi^2}h(l) \quad (7.60a)$$

$$\Rightarrow h(y) = \underbrace{h(0)}_{=0} - \frac{k_2\epsilon_2}{c_\phi^2}yh(l) = -\frac{k_2\epsilon_2}{c_\phi^2}yh(l). \quad (7.60b)$$

En prenant  $y = l$  dans la dernière égalité, il vient que  $(1 + k_2\epsilon_2 l/c_\phi^2)h(l) = 0$ . Puisque  $k_2, \epsilon_2, l > 0$ , cela implique que  $h(l) = 0$  et donc  $h = 0$ . Au bilan,  $\mathcal{A}_1(f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0)$  implique  $(f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0)$ , i.e.,  $\mathcal{A}_1$  est injectif. On déduit ainsi que  $\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{H}$  est bijectif. Ainsi,  $\mathcal{A}_1^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(\mathcal{A}_1)$  est bien défini pour tout  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$  par  $\mathcal{A}_1^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) = (f, \tilde{f}, h, \tilde{h})$  où  $f$  et  $h$  sont respectivement donnés par (7.43) et (7.54).

**Étude du caractère borné.** Pour conclure la démonstration, il reste à montrer que  $\mathcal{A}_1^{-1}$  est borné, i.e., il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$ ,  $\|\mathcal{A}_1^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H},1} \leq M \|(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H},1}$ . Par définition, on a que

$$\|\mathcal{A}_1^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H},1}^2 = c_\omega^2 \|f''\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^2(0,l)}^2 + c_\phi^2 \|h'\|_{L^2(0,l)}^2 + \|\tilde{h}\|_{L^2(0,l)}^2. \quad (7.61)$$

Sur la base de l'équation (7.55), il existe  $c_1, c_2, c_3, c_4 \in \mathbb{R}$  qui ne dépendent que des constantes  $\eta_\phi, c_\phi, \epsilon_2, k_2, l$  tels que pour presque tout  $y \in [0, l]$ ,

$$h'(y) = c_1 \tilde{h}'(y) + c_2 \tilde{h}(l) + c_3 \int_y^l \tilde{z}(\xi) d\xi + c_4 \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1. \quad (7.62)$$

Par inégalité triangulaire, on déduit que

$$\|h'\|_{L^2(0,l)} \leq |c_1| \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)} + \sqrt{l} |c_2| |\tilde{h}(l)| + |c_3| \left\| \int_{\cdot}^l \tilde{z}(\xi) d\xi \right\|_{L^2(0,l)} + \sqrt{l} |c_4| \int_0^l \int_{\xi_1}^l |\tilde{z}(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1. \quad (7.63)$$

Sur la base de  $\tilde{h} \in \text{AC}[0, l]$ ,  $\tilde{h}(0) = 0$  et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, le second terme est tel que

$$|\tilde{h}(l)| = \left| \tilde{h}(0) + \int_0^l \tilde{h}'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^l |\tilde{h}'(\xi)| d\xi \leq \sqrt{l} \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)}. \quad (7.64)$$

De manière similaire, pour  $y \in [0, l]$ ,

$$\left| \int_y^l \tilde{z}(\xi) d\xi \right| \leq \int_y^l |\tilde{z}(\xi)| d\xi \leq \int_0^l |\tilde{z}(\xi)| d\xi \leq \sqrt{l} \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)}, \quad (7.65)$$

d'où

$$\left\| \int_{\cdot}^l \tilde{z}(\xi) d\xi \right\|_{L^2(0,l)} \leq l \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)}. \quad (7.66)$$

Finalement,

$$\int_0^l \int_{\xi_1}^l |\tilde{z}(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1 \leq \int_0^l \int_0^l |\tilde{z}(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1 \leq l \sqrt{l} \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)}. \quad (7.67)$$

On en déduit l'inégalité suivante :

$$\|h'\|_{L^2(0,l)} \leq M_1 \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)} + M_2 \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)}, \quad (7.68)$$

avec  $M_1 = |c_1| + l|c_2|$  et  $M_2 = l|c_3| + l^2|c_4|$ . On obtient ainsi la majoration :

$$\begin{aligned} \|h'\|_{L^2(0,l)}^2 &\leq \left( M_1 \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)} + M_2 \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)} \right)^2 \\ &\leq M_1^2 \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)}^2 + 2M_1 M_2 \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)} \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)} + M_2^2 \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)}^2 \\ &\leq M_1(M_1 + M_2) \|\tilde{h}'\|_{L^2(0,l)}^2 + M_2(M_1 + M_2) \|\tilde{z}\|_{L^2(0,l)}^2. \end{aligned} \quad (7.69)$$

Sur la base de (7.45), il existe  $d_1, d_2, d_3, d_4 \in \mathbb{R}$  qui ne dépendent que des constantes  $\eta_\omega, c_\omega, \epsilon_1, k_1, l$  tels que pour presque tout  $y \in [0, l]$ ,

$$f''(y) = d_1 \tilde{f}''(y) + d_2(y-l) \tilde{f}(l) + d_3 \int_y^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 + d_4(y-l) \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l \tilde{g}(\xi_4) d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \quad (7.70)$$

On déduit de l'inégalité triangulaire que

$$\begin{aligned} \|f''\|_{L^2(0,l)} &\leq |d_1| \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)} + \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}} |d_2| |\tilde{f}(l)| + |d_3| \left\| \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right\|_{L^2(0,l)} \\ &\quad + \frac{l^{3/2}}{\sqrt{3}} |d_4| \int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l |\tilde{g}(\xi_4)| d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1. \end{aligned} \quad (7.71)$$

En se basant sur  $\tilde{f}, \tilde{f}' \in \text{AC}[0, l]$ ,  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = 0$  et l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on a que

$$\begin{aligned} |\tilde{f}(l)| &= \left| \tilde{f}(0) + \int_0^l \tilde{f}'(\xi) d\xi \right| = \left| \int_0^l \tilde{f}'(0) + \int_0^{\xi_1} \tilde{f}''(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right| = \left| \int_0^l \int_0^{\xi_1} \tilde{f}''(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right| \\ &\leq \int_0^l \int_0^{\xi_1} |\tilde{f}''(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1 \leq \int_0^l \int_0^l |\tilde{f}''(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1 \leq l^{3/2} \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)}. \end{aligned} \quad (7.72)$$

De manière analogue, pour  $y \in [0, l]$ ,

$$\left| \int_y^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right| \leq \int_y^l \int_{\xi_1}^l |\tilde{g}(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1 \leq \int_0^l \int_0^l |\tilde{g}(\xi_2)| d\xi_2 d\xi_1 \leq l^{3/2} \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)}, \quad (7.73)$$

ce qui entraîne que

$$\left\| \int_0^l \int_{\xi_1}^l \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right\|_{L^2(0,l)} \leq l^2 \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)}. \quad (7.74)$$

On obtient alors la majoration :

$$\int_0^l \int_0^{\xi_1} \int_{\xi_2}^l \int_{\xi_3}^l |\tilde{g}(\xi_4)| d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \leq \int_0^l \int_0^l \int_0^l \int_0^l |\tilde{g}(\xi_4)| d\xi_4 d\xi_3 d\xi_2 d\xi_1 \leq l^{7/2} \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)}. \quad (7.75)$$

Au final, on obtient que

$$\|f''\|_{L^2(0,l)} \leq M_3 \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)} + M_4 \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)}, \quad (7.76)$$

avec  $M_3 = |d_1| + l^3|d_2|/\sqrt{3}$  et  $M_4 = l^2|d_3| + l^5|d_4|/\sqrt{3}$ . On en déduit,

$$\begin{aligned} \|f''\|_{L^2(0,l)}^2 &\leq \left( M_3 \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)} + M_4 \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)} \right)^2 \\ &\leq M_3^2 \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)}^2 + 2M_3M_4 \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)} \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)} + M_4^2 \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)}^2 \\ &\leq M_3(M_3 + M_4) \|\tilde{f}''\|_{L^2(0,l)}^2 + M_4(M_3 + M_4) \|\tilde{g}\|_{L^2(0,l)}^2. \end{aligned} \quad (7.77)$$

Finalement, en tirant profit de l'inégalité de Poincaré avec  $\tilde{f}, \tilde{f}', \tilde{h} \in \text{AC}[0, l]$  et  $\tilde{f}(0) = \tilde{f}'(0) = \tilde{h}(0)$ ,

$$\|\tilde{h}\|_{L^2(0,l)}^2 \leq M_5 c_\phi^2 \|h'_1\|_{L^2(0,l)}^2, \quad \|\tilde{f}\|_{L^2(0,l)}^2 \leq M_6 c_\omega^2 \|f''_1\|_{L^2(0,l)}^2, \quad (7.78)$$

avec  $M_5 = 4l^2/(\pi^2 c_\phi^2)$  et  $M_6 = 16l^4/(\pi^4 c_\omega^2)$ . En rassemblant (7.61) et les inégalités (7.69-7.78), on obtient

$$\|\mathcal{A}_1^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z})\|_{\mathcal{H},1} \leq M \|(f, g, h, z)\|_{\mathcal{H},1}, \quad (7.79)$$

avec la constante

$$M \triangleq \max(M_1(M_1 + M_2) + M_5, c_\phi^2 M_2(M_1 + M_2), M_3(M_3 + M_4) + M_6, c_\omega^2 M_4(M_3 + M_4))^{1/2} \in \mathbb{R}_+, \quad (7.80)$$

qui ne dépend que des paramètres du système.

**Bilan.** On a ainsi montré que  $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Dès lors, par définition de l'ensemble résolvant,  $0 \in \rho(\mathcal{A}_1)$ , dont on déduit que  $\mathcal{A}_1$  est un opérateur fermé.  $\square$

On s'intéresse à présent à la seconde condition d'application du théorème de Lümer-Phillips, à savoir la dissipativité de l'opérateur. Pour cela, on introduit :

$$\epsilon_1^* \triangleq \frac{4\pi^4 \eta_\omega c_\omega^2}{64l^4 + \pi^4 \eta_\omega^2 c_\omega^2} \in \mathbb{R}_+^*, \quad \epsilon_2^* \triangleq \frac{4\pi^2 \eta_\phi c_\phi^2}{16l^2 + \pi^2 \eta_\phi^2 c_\phi^2} \in \mathbb{R}_+^*. \quad (7.81)$$

On a alors le lemme suivant.

**Lemme 7.6** *Soit  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{H}$  est dissipatif sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .*

**Démonstration.** Puisque  $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1/K_m$ , le Lemme 7.3 assure que  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un  $\mathbb{R}$ -espace de Hilbert. Il s'agit donc de montrer que

$$\forall X \in D(\mathcal{A}_1), \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} \leq 0. \quad (7.82)$$

Soit  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1)$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &= \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} \\ &+ \epsilon_1 \int_0^l g^2(y) dy - \epsilon_1 c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')''(y) f(y) dy \\ &+ \epsilon_2 \int_0^l z^2(y) dy + \epsilon_2 c_\phi^2 \int_0^l (h' + \eta_\phi z')'(y) h(y) dy. \end{aligned} \quad (7.83)$$

Le premier terme du membre de droite de (7.83) a été évalué précédemment via (7.27). On s'intéresse donc aux troisième et cinquième termes du membre de droite de (7.83). Le troisième terme, en utilisant des intégrations par partie avec les conditions à la frontière de (7.21), s'exprime comme suit :

$$\begin{aligned} c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')''(y) f(y) dy &= c_\omega^2 [(f'' + \eta_\omega g'')'(y) f(y)]_{y=0}^{y=l} - c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')'(y) f'(y) dy \\ &= k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)) f(l) - c_\omega^2 [(f'' + \eta_\omega g'')(y) f'(y)]_{y=0}^{y=l} \\ &+ c_\omega^2 \int_0^l (f'' + \eta_\omega g'')(y) f''(y) dy \\ &= k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)) f(l) + c_\omega^2 \int_0^l f''^2(y) dy \\ &+ \eta_\omega c_\omega^2 \int_0^l f''(y) g''(y) dy. \end{aligned} \quad (7.84)$$

De manière analogue, le cinquième terme du membre de droite de (7.83) devient :

$$\begin{aligned} c_\phi^2 \int_0^l (h' + \eta_\phi z')'(y) h(y) dy &= c_\phi^2 [(h' + \eta_\phi z')(y) h(y)]_{y=0}^{y=l} - c_\phi^2 \int_0^l (h' + \eta_\phi z')(y) h'(y) dy \\ &= -k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l)) h(l) - c_\phi^2 \int_0^l h'^2(y) dy \\ &- \eta_\phi c_\phi^2 \int_0^l h'(y) z'(y) dy. \end{aligned} \quad (7.85)$$

En injectant dans (7.83) les équations (7.27), (7.84) et (7.85), on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &= -k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l))^2 - k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l))^2 \\
&\quad + \epsilon_1 \int_0^l g^2(y) dy + \epsilon_2 \int_0^l z^2(y) dy \\
&\quad - \eta_\omega c_\omega^2 \int_0^l g''^2(y) dy - \eta_\phi c_\phi^2 \int_0^l z''^2(y) dy \\
&\quad - \epsilon_1 c_\omega^2 \int_0^l f''^2(y) dy - \epsilon_1 \eta_\omega c_\omega^2 \int_0^l f''(y) g''(y) dy \\
&\quad - \epsilon_2 c_\phi^2 \int_0^l h''^2(y) dy - \epsilon_2 \eta_\phi c_\phi^2 \int_0^l h'(y) z'(y) dy.
\end{aligned} \tag{7.86}$$

En appliquant l'inégalité de Young pour  $r_1, r_2 > 0$  quelconques qui seront déterminés par la suite, on obtient

$$\left| \int_0^l f''(y) g''(y) dy \right| \leq \frac{1}{2r_1} \int_0^l f''(y)^2 dy + \frac{r_1}{2} \int_0^l g''(y)^2 dy, \tag{7.87a}$$

$$\left| \int_0^l h'(y) z'(y) dy \right| \leq \frac{1}{2r_2} \int_0^l h'(y)^2 dy + \frac{r_2}{2} \int_0^l z'(y)^2 dy. \tag{7.87b}$$

L'inégalité de Poincaré pour  $g, g', z \in \text{AC}[0, l]$  avec  $g(0) = g'(0) = z(0)$  donne :

$$\int_0^l g^2(y) dy \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l g'^2(y) dy \leq \frac{16l^4}{\pi^4} \int_0^l g''^2(y) dy, \tag{7.88a}$$

$$\int_0^l z^2(y) dy \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l z'^2(y) dy. \tag{7.88b}$$

Dès lors, pour tout  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A})$  et tout  $r_1, r_2 > 0$ ,

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &\leq -k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l))^2 - k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l))^2 \\
&\quad - \left( \eta_\omega c_\omega^2 - \epsilon_1 \left( \frac{16l^4}{\pi^4} + \frac{\eta_\omega c_\omega^2 r_1}{2} \right) \right) \int_0^l g''^2(y) dy \\
&\quad - \left( \eta_\phi c_\phi^2 - \epsilon_2 \left( \frac{4l^2}{\pi^2} + \frac{\eta_\phi c_\phi^2 r_2}{2} \right) \right) \int_0^l z'^2(y) dy \\
&\quad - \epsilon_1 c_\omega^2 \left( 1 - \frac{\eta_\omega}{2r_1} \right) \int_0^l f''^2(y) dy \\
&\quad - \epsilon_2 c_\phi^2 \left( 1 - \frac{\eta_\phi}{2r_2} \right) \int_0^l h'^2(y) dy.
\end{aligned} \tag{7.89}$$

Puisque  $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \ni x \rightarrow 2\pi^4 \eta_\omega c_\omega^2 / (32l^4 + \pi^4 \eta_\omega c_\omega^2 x)$  est une fonction continue et décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec, par hypothèse,  $\epsilon_1 < \epsilon_1^* = \varphi_1(\eta_\omega/2)$ , il existe alors  $r_1^* > \eta_\omega/2$  tel que  $\epsilon_1 < \varphi_1(r_1^*) < \varphi_1(\eta_\omega/2)$ . De manière analogue avec  $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \ni x \rightarrow 2\pi^2 \eta_\phi c_\phi^2 / (8l^2 + \pi^2 \eta_\phi c_\phi^2 x)$ , il

existe  $r_2^* > \eta_\phi/2$  tel que  $\epsilon_2 < \varphi_2(r_2^*) < \varphi_2(\eta_\phi/2) = \epsilon_2^*$ . Ainsi, en prenant  $r_1 = r_1^*$  et  $r_2 = r_2^*$  dans (7.89), cela assure que pour tout  $X \in \mathcal{H}$ ,  $\langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} \leq 0$ , i.e.,  $\mathcal{A}_1$  est dissipatif sur  $\mathcal{H}$  équipé du produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ .  $\square$

On peut à présent introduire le résultat principal au regard de l'opérateur  $\mathcal{A}_1$ .

**Théorème 7.7** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  génère un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .*

**Démonstration.** Puisque  $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1/K_m$ , le Lemme 7.3 assure que  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un espace de Hilbert. De plus, le Lemme 7.6 montre que  $\mathcal{A}_1$  est dissipatif. Il reste donc à montrer qu'il existe  $\lambda_0 > 0$  tel que  $R(\lambda_0 I_{D(\mathcal{A}_1)} - \mathcal{A}_1) = \mathcal{H}$ . Le Lemme 7.5 montre que l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  est fermé avec  $0 \in \rho(\mathcal{A}_1)$ . Puisque l'ensemble résolvant  $\rho(\mathcal{A}_1)$  est un sous-ensemble ouvert de  $\mathbb{C}$ , il existe donc  $\lambda_0 > 0$  tel que la condition  $\text{Im}(\lambda_0 I_{D(\mathcal{A}_1)} - \mathcal{A}_1) = \mathcal{H}$  soit vérifiée<sup>7</sup>. L'application du théorème de Lümer-Philips (Théorème 6.8) permet de conclure la démonstration.  $\square$

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 7.8** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$  équipé de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  ou de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ , i.e.,  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ .*

**Démonstration.** La densité de  $D(\mathcal{A}_1)$  dans  $\mathcal{H}$  équipé de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est une conséquence directe des propriétés de dissipativité et de rang par l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  dans l'application du théorème de Lümer-Philips pour les espaces réflexifs. Puisque sur la base du Lemme 7.3 les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  sont équivalentes,  $D(\mathcal{A}_1)$  est également dense dans  $\mathcal{H}$  équipé de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$ . La démonstration est complète car, par définition,  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_1)$ .  $\square$

### 7.2.3 $\mathcal{A}_2$ est borné

Après avoir complété l'étude de  $\mathcal{A}_1$ , on investigue à présent le cas de l'opérateur  $\mathcal{A}_2$ . Rappelons qu'il est défini par :

$$\mathcal{A}_2(f, g, h, z) = (0, \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, 0, \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g) \quad (7.90)$$

sur le domaine  $D(\mathcal{A}_2) = \mathcal{H}$ . On a alors le résultat suivant.

---

7. On peut voir que tout  $\lambda_0 \in (0, \|\mathcal{A}_1^{-1}\|_{\mathcal{H},2}^{-1})$  vérifie cette condition. En effet,  $\lambda_0 I_{D(\mathcal{A}_1)} - \mathcal{A}_1 = -(I_{\mathcal{H}} - \lambda_0 \mathcal{A}_1^{-1}) \mathcal{A}_1$  avec  $\text{Im}(\mathcal{A}_1) = \mathcal{H}$ . La conclusion provient alors du fait que, puisque  $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  avec  $\mathcal{H}$  espace de Hilbert,  $I_{\mathcal{H}} - \lambda_0 \mathcal{A}_1^{-1}$  admet un inverse dans  $\mathcal{L}(\mathcal{H})$  pour  $|\lambda_0| < \|\mathcal{A}_1^{-1}\|_{\mathcal{H},2}^{-1}$ , et donc  $\text{Im}(I_{\mathcal{H}} - \lambda_0 \mathcal{A}_1^{-1}) = \mathcal{H}$ .

**Lemme 7.9** *L'opérateur  $\mathcal{A}_2$  est borné, i.e.,  $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .*

Une nouvelle fois, puisque  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  sont équivalentes, il est suffisant de démontrer que le résultat est valable avec  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  pour en déduire sa validité pour  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$ .

**Démonstration.** Soit  $(f, g, h, z) \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_2(f, g, h, z)\|_{\mathcal{H},1}^2 &= \|(0, \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, 0, \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g)\|_{\mathcal{H},1}^2 \\ &= \int_0^l (\alpha_\omega h(y) + \beta_\omega z(y) + \gamma_\omega g(y))^2 dy + \int_0^l (\alpha_\phi h(y) + \beta_\phi z(y) + \gamma_\phi g(y))^2 dy \\ &\leq M \|(f, g, h, z)\|_{\mathcal{H},1}^2, \end{aligned} \quad (7.91)$$

où, après développement des carrés, les inégalités de Young et de Poincaré (pour  $f, f', h \in \text{AC}[0, l]$  et  $f(0) = f'(0) = h(0) = 0$ ) ont été utilisées. La constante  $M \in \mathbb{R}_+$  dépend uniquement de  $l, c_\omega, c_\phi, \alpha_\omega, \beta_\omega, \gamma_\omega, \alpha_\phi, \beta_\phi, \gamma_\phi$ .  $\square$

#### 7.2.4 *Well-posedness* du problème de Cauchy

On peut finalement introduire le résultat principal de cette section sous la forme du prochain théorème.

**Théorème 7.10** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .*

**Démonstration.** Par définition,  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  sur  $D(\mathcal{A})$  avec  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_1)$  et  $D(\mathcal{A}_2) = \mathcal{H}$ . De plus, par le Théorème 7.7,  $\mathcal{A}_1$  génère un  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  et, de par le Lemme 7.9,  $\mathcal{A}_2$  est borné. Le Théorème 6.9 assure alors que  $\mathcal{A}$  génère une  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .  $\square$

On en déduit immédiatement le corollaire suivant.

**Corollaire 7.11** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$ . De plus, ce  $C_0$ -semi-groupe  $S(t)$  généré par  $\mathcal{A}$  sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$  coïncide avec le  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$  généré par  $\mathcal{A}$  sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ , i.e.,  $S(t) = T(t)$  pour tout  $t \geq 0$ .*

**Démonstration.** Notons  $T(t)$  le  $C_0$ -semi-groupe généré par  $\mathcal{A}$  sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ . Par équivalence des normes,  $T(t)$  est également un  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$  avec générateur



infinitésimal  $\mathcal{A}$ . Le Théorème 6.3 portant sur l'unicité du  $C_0$ -semi-groupe associé à un générateur infinitésimal donné permet de conclure la démonstration.  $\square$

On déduit alors du Théorème 6.12 que le problème de Cauchy (7.22) est bien posé. Soit  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  le  $C_0$ -semi-groupe généré par  $\mathcal{A}$ . Pour toute condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ ,

$$\begin{aligned} X : \mathbb{R}_+ &\longrightarrow \mathcal{H} \\ t &\longrightarrow T(t)X_0 \end{aligned} \quad (7.92)$$

est l'unique solution de (7.22), i.e., vérifie  $X(0) = X_0$ ,  $X \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ , et pour tout  $t \geq 0$ ,  $\dot{X}(t) = \mathcal{A}X(t)$ . De plus, pour tout  $t \geq 0$ ,  $X(t) \in D(\mathcal{A})$ , i.e.,  $X \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H})$ .

### 7.3 Stabilité exponentielle

La question de la *well-posedness* réglée, on s'intéresse à présent aux propriétés de stabilité du système bouclé (7.22).

#### 7.3.1 Décroissance exponentielle de l'énergie du système

Dans le cadre des méthodes dites *energy multipliers methods* (Luo et al., 2012), on définit l'énergie augmentée du système par

$$\forall t \geq 0, \mathcal{E}(t) \triangleq \frac{1}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},2}^2 = \frac{1}{2} \langle X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2}, \quad (7.93)$$

où  $\mathbb{R}_+ \ni t \rightarrow X(t) \triangleq T(t)X_0 \in D(\mathcal{A})$  représente l'unique solution du problème de Cauchy (7.22) associé à la condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ . Puisque  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe, on en déduit que  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  avec pour tout  $t \geq 0$  (cf. Annexe D),

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2} = \langle \mathcal{A}X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2} = \langle \mathcal{A}_1 X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2} + \langle \mathcal{A}_2 X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2}. \quad (7.94)$$

Le premier terme du membre de droite de (7.94) a été majoré via (7.89) puisque pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{A}(t) \in D(\mathcal{A})$  et, par définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_1$ ,  $D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A})$ . On se focalise donc sur l'évaluation du second terme. Pour tout  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A})$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_2 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &= \langle (0, \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, 0, \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g), (f, g, h, z) \rangle_{\mathcal{H},2} \\ &= \int_0^l [\alpha_\omega h(y) + \beta_\omega z(y) + \gamma_\omega g(y)] g(y) dy \\ &\quad + \int_0^l [\alpha_\phi h(y) + \beta_\phi z(y) + \gamma_\phi g(y)] z(y) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \epsilon_1 \int_0^l [\alpha_\omega h(y) + \beta_\omega z(y) + \gamma_\omega g(y)] f(y) dy \\
& + \epsilon_2 \int_0^l [\alpha_\phi h(y) + \beta_\phi z(y) + \gamma_\phi g(y)] h(y) dy \\
= & \epsilon_1 \gamma_\omega \int_0^l f(y) g(y) dy + \epsilon_1 \alpha_\omega \int_0^l f(y) h(y) dy + \epsilon_1 \beta_\omega \int_0^l f(y) z(y) dy \quad (7.95) \\
& + \gamma_\omega \int_0^l g^2(y) dy + (\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi) \int_0^l g(y) h(y) dy + (\beta_\omega + \gamma_\phi) \int_0^l g(y) z(y) dy \\
& + \epsilon_2 \alpha_\phi \int_0^l h^2(y) dy + (\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi) \int_0^l h(y) z(y) dy \\
& + \beta_\phi \int_0^l z^2(y) dy.
\end{aligned}$$

En utilisant une nouvelle fois les inégalités de Young et Poincaré (pour  $f, f', g, g', h, z \in \text{AC}[0, l]$  avec  $f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = h(0) = z(0) = 0$ ), on a pour  $r_3, \dots, r_8 > 0$  :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l f(y) g(y) dy \right| & \leq \frac{1}{2r_3} \int_0^l f^2(y) dy + \frac{r_3}{2} \int_0^l g^2(y) dy \\
& \leq \frac{8l^4}{\pi^4 r_3} \int_0^l f''^2(y) dy + \frac{r_3}{2} \int_0^l g^2(y) dy, \quad (7.96a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l f(y) h(y) dy \right| & \leq \frac{1}{2r_4} \int_0^l f^2(y) dy + \frac{r_4}{2} \int_0^l h^2(y) dy \\
& \leq \frac{8l^4}{\pi^4 r_4} \int_0^l f''^2(y) dy + \frac{2l^2 r_4}{\pi^2} \int_0^l h'^2(y) dy, \quad (7.96b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l f(y) z(y) dy \right| & \leq \frac{1}{2r_5} \int_0^l f^2(y) dy + \frac{r_5}{2} \int_0^l z^2(y) dy \\
& \leq \frac{8l^4}{\pi^4 r_5} \int_0^l f''^2(y) dy + \frac{r_5}{2} \int_0^l z^2(y) dy, \quad (7.96c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l g(y) h(y) dy \right| & \leq \frac{1}{2r_6} \int_0^l g^2(y) dy + \frac{r_6}{2} \int_0^l h^2(y) dy \\
& \leq \frac{1}{2r_6} \int_0^l g^2(y) dy + \frac{2l^2 r_6}{\pi^2} \int_0^l h'^2(y) dy, \quad (7.96d)
\end{aligned}$$

$$\left| \int_0^l g(y) z(y) dy \right| \leq \frac{1}{2r_7} \int_0^l g^2(y) dy + \frac{r_7}{2} \int_0^l z^2(y) dy, \quad (7.96e)$$

$$\int_0^l h^2(y) dy \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l h'^2(y) dy, \quad (7.96f)$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l h(y) z(y) dy \right| & \leq \frac{1}{2r_8} \int_0^l h^2(y) dy + \frac{r_8}{2} \int_0^l z^2(y) dy \\
& \leq \frac{2l^2}{\pi^2 r_8} \int_0^l h'^2(y) dy + \frac{r_8}{2} \int_0^l z^2(y) dy. \quad (7.96g)
\end{aligned}$$

On en déduit la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_2 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &\leq \frac{8\epsilon_1 l^4}{\pi^4} \left( \frac{\alpha_\omega}{r_4} + \frac{\beta_\omega}{r_5} + \frac{\gamma_\omega}{r_3} \right) \int_0^l f''^2(y) dy \\
&+ \left( \gamma_\omega + \frac{\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi}{2r_6} + \frac{\epsilon_1 \gamma_\omega r_3}{2} + \frac{\beta_\omega + \gamma_\phi}{2r_7} \right) \int_0^l g^2(y) dy \\
&+ \frac{4l^2}{\pi^2} \left( \frac{(\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi)r_6}{2} + \frac{(\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi)}{2r_8} + \frac{\epsilon_1 \alpha_\omega r_4}{2} + \epsilon_2 \alpha_\phi \right) \int_0^l h'^2(y) dy \\
&+ \left( \beta_\phi + \frac{(\beta_\omega + \gamma_\phi)r_7}{2} + \frac{(\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi)r_8}{2} + \frac{\epsilon_1 \beta_\omega r_5}{2} \right) \int_0^l z^2(y) dy
\end{aligned} \tag{7.97}$$

En combinant cette majoration avec (7.89) et en notant  $X(t) = (f(\cdot, t), g(\cdot, t), h(\cdot, t), z(\cdot, t))$ , l'équation (7.94) donne lieu à la majoration :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}(t) &\leq -k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l, t))^2 - k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l, t))^2 \\
&- \epsilon_1 \left( c_\omega^2 - \frac{\eta_\omega c_\omega^2}{2r_1} - \frac{8l^4}{\pi^4} \left( \frac{\alpha_\omega}{r_4} + \frac{\beta_\omega}{r_5} + \frac{\gamma_\omega}{r_3} \right) \right) \int_0^l f''^2(y, t) dy \\
&+ \left( \gamma_\omega + \frac{\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi}{2r_6} + \frac{\epsilon_1 \gamma_\omega r_3}{2} + \frac{\beta_\omega + \gamma_\phi}{2r_7} \right) \int_0^l g^2(y, t) dy \\
&- \left( \eta_\omega c_\omega^2 - \epsilon_1 \left( \frac{16l^4}{\pi^4} + \frac{\eta_\omega c_\omega^2 r_1}{2} \right) \right) \int_0^l g''^2(y, t) dy \\
&- \left( \epsilon_2 c_\phi^2 - \frac{\epsilon_2 c_\phi^2 \eta_\phi}{2r_2} - \frac{4l^2}{\pi^4} \left( \frac{(\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi)r_6}{2} + \frac{\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi}{2r_8} + \frac{\epsilon_1 \alpha_\omega r_4}{2} + \epsilon_2 \alpha_\phi \right) \right) \int_0^l h'^2(y, t) dy \\
&+ \left( \beta_\phi + \frac{(\beta_\omega + \gamma_\phi)r_7}{2} + \frac{(\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi)r_8}{2} + \frac{\epsilon_1 \beta_\omega r_5}{2} \right) \int_0^l z^2(y, t) dy \\
&- \left( \eta_\phi c_\phi^2 - \epsilon_2 \left( \frac{4l^2}{\pi^2} + \frac{\eta_\phi c_\phi^2 r_2}{2} \right) \right) \int_0^l z'^2(y, t) dy.
\end{aligned} \tag{7.98}$$

À la vue de ce résultat, on formule d'hypothèse suivante.

**Hypothèse 7.1** *On suppose que les constantes du problème intervenant dans (7.1a-7.1b), i.e.,  $l$ ,  $c_\omega^2$ ,  $c_\phi^2$ ,  $\eta_\omega$ ,  $\eta_\phi$ ,  $\alpha_\omega$ ,  $\beta_\omega$ ,  $\gamma_\omega$ ,  $\alpha_\phi$ ,  $\beta_\phi$  et  $\gamma_\phi$ , sont telles qu'il existe  $r_1, r_2, \dots, r_8 > 0$  ainsi*

que  $0 < \varepsilon_1 < \min(\varepsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $0 < \varepsilon_2 < \min(\varepsilon_2^*, 1/K_m)$  tels que

$$\lambda_1 \triangleq \epsilon_1 \left( c_\omega^2 - \frac{\eta_\omega c_\omega^2}{2r_1} - \frac{8l^4}{\pi^4} \left( \frac{\alpha_\omega}{r_4} + \frac{\beta_\omega}{r_5} + \frac{\gamma_\omega}{r_3} \right) \right), \quad (7.99a)$$

$$\lambda_2 \triangleq \gamma_\omega + \frac{\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi}{2r_6} + \frac{\epsilon_1 \gamma_\omega r_3}{2} + \frac{\beta_\omega + \gamma_\phi}{2r_7}, \quad (7.99b)$$

$$\lambda_3 \triangleq \eta_\omega c_\omega^2 - \epsilon_1 \left( \frac{16l^4}{\pi^4} + \frac{\eta_\omega c_\omega^2 r_1}{2} \right), \quad (7.99c)$$

$$\lambda_4 \triangleq \epsilon_2 c_\phi^2 - \frac{\epsilon_2 c_\phi^2 \eta_\phi}{2r_2} - \frac{4l^2}{\pi^2} \left( \frac{(\alpha_\omega + \epsilon_2 \gamma_\phi) r_6}{2} + \frac{\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi}{2r_8} + \frac{\epsilon_1 \alpha_\omega r_4}{2} + \epsilon_2 \alpha_\phi \right), \quad (7.99d)$$

$$\lambda_5 \triangleq \beta_\phi + \frac{(\beta_\omega + \gamma_\phi) r_7}{2} + \frac{(\alpha_\phi + \epsilon_2 \beta_\phi) r_8}{2} + \frac{\epsilon_1 \beta_\omega r_5}{2}, \quad (7.99e)$$

$$\lambda_6 \triangleq \eta_\phi c_\phi^2 - \epsilon_2 \left( \frac{4l^2}{\pi^2} + \frac{\eta_\phi c_\phi^2 r_2}{2} \right), \quad (7.99f)$$

vérifient  $\lambda_1, \dots, \lambda_6 > 0$ ,  $\pi^4 \lambda_3 / (16l^4) - \lambda_2 > 0$  et  $\pi^2 \lambda_6 / (4l^2) - \lambda_5 > 0$ .

Sur la base de l'Hypothèse 7.1, on obtient :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}}(t) &\leq -k_1(g(l, t) + \epsilon_1 f(l, t))^2 - k_2(z(l, t) + \epsilon_2 h(l, t))^2 \\ &\quad - \lambda_1 \int_0^l f''^2(y, t) dy + \lambda_2 \int_0^l g^2(y, t) dy - \lambda_3 \int_0^l g''^2(y, t) dy \\ &\quad - \lambda_4 \int_0^l h'^2(y, t) dy + \lambda_5 \int_0^l z^2(y, t) dy - \lambda_6 \int_0^l z'^2(y, t) dy \\ &\leq -k_1(g(l, t) + \epsilon_1 f(l, t))^2 - k_2(z(l, t) + \epsilon_2 h(l, t))^2 \\ &\quad - \lambda_1 \int_0^l f''^2(y, t) dy - \left( \frac{\pi^4 \lambda_3}{16l^4} - \lambda_2 \right) \int_0^l g^2(y, t) dy \\ &\quad - \lambda_4 \int_0^l h'^2(y, t) dy - \left( \frac{\pi^2 \lambda_6}{4l^2} - \lambda_5 \right) \int_0^l z^2(y, t) dy, \end{aligned} \quad (7.100)$$

où la seconde inégalité découle de l'inégalité de Poincaré. On introduit alors

$$\mu_m \triangleq 2 \min \left( \frac{\lambda_1}{c_\omega^2}, \frac{\pi^4 \lambda_3}{16l^4} - \lambda_2, \frac{\lambda_4}{c_\phi^2}, \frac{\pi^2 \lambda_6}{4l^2} - \lambda_5 \right) > 0, \quad (7.101)$$

ce qui fournit, basé sur (7.36),

$$\forall t \geq 0, \quad \dot{\mathcal{E}}(t) \leq -\frac{\mu_m}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^2 \leq -\frac{\Lambda}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},2}^2 = -\Lambda \mathcal{E}(t), \quad (7.102)$$

où  $\Lambda \triangleq \mu_m / (1 + \epsilon_m K_m) > 0$  est indépendant de la condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ . Puisque  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , on obtient après intégration que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \exp(-\Lambda t)$ . En

rappelant que  $\mathcal{E}(t) = \|X(t)\|_{\mathcal{H},2}^2/2$ , on obtient :

$$\forall X_0 \in D(\mathcal{A}), \quad \forall t \geq 0, \quad \|T(t)X_0\|_{\mathcal{H},2} \leq \|X_0\|_{\mathcal{H},2} \exp(-\Lambda t/2). \quad (7.103)$$

Cette inégalité peut être étendue à tout  $X_0 \in \mathcal{H}$  puisque pour tout  $t \geq 0$ ,  $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  et, en se basant sur le Corollaire 7.8,  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ . En d'autres termes,

$$\forall X_0 \in \mathcal{H}, \quad \forall t \geq 0, \quad \|T(t)X_0\|_{\mathcal{H},2} \leq \|X_0\|_{\mathcal{H},2} \exp(-\Lambda t/2). \quad (7.104)$$

On a ainsi montré que  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe tel que  $\|T(t)\|_{\mathcal{H},2} \leq \exp(-\Lambda t/2)$  pour tout  $t \geq 0$ . Ce résultat est résumé sous la forme du théorème suivant.

**Théorème 7.12** *Sous l'Hypothèse 7.1, l'énergie augmentée  $\mathcal{E}$  du système définie par (7.93) converge exponentiellement vers 0 dans le sens où il existe  $\Lambda \in \mathbb{R}_+^*$  tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad \mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0) \exp(-\Lambda t). \quad (7.105)$$

*De plus,  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe exponentiellement stable pour  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$ .*

De ce résultat découle la stabilité exponentielle de l'énergie du système  $E$  telle qu'originellement définie par (7.6).

**Corollaire 7.13** *Sous l'Hypothèse 7.1, l'énergie  $E$  du système définie par (7.6) converge exponentiellement vers 0. En particulier, il existe  $K_E \in \mathbb{R}_+^*$  tel que*

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \leq K_E E(0) \exp(-\Lambda t), \quad (7.106)$$

*où  $\Lambda > 0$  est celui fourni par le Théorème 7.12. De plus,  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe exponentiellement stable pour  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$ .*

**Démonstration.** Le résultat est immédiat avec  $K_E = (1 + K_m \epsilon_m)/(1 - K_m \epsilon_m) > 0$  puisque sur la base de l'équivalence des normes (7.36),

$$E(t) \leq \frac{1}{1 - K_m \epsilon_m} \mathcal{E}(t) \leq \frac{\mathcal{E}(0)}{1 - K_m \epsilon_m} \exp(-\Lambda t) \leq \frac{1 + K_m \epsilon_m}{1 - K_m \epsilon_m} E(0) \exp(-\Lambda t). \quad (7.107)$$

En suivant la même procédure que précédemment, on obtient le résultat puisque  $E(t) = \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^2/2$ , ce qui aboutit à  $\|T(t)\|_{\mathcal{H},1} \leq \sqrt{K_E} \exp(-\Lambda t/2)$  pour tout  $t \geq 0$ .  $\square$

### 7.3.2 Stabilité exponentielle uniforme des déplacements flexibles

On cherche à présent à établir la stabilité des déplacements en flexion et en torsion.

**Corollaire 7.14** *Sous l'Hypothèse 7.1, il existe  $K_\omega, K_{\omega_y}, K_\phi \in \mathbb{R}_+^*$  tels que pour toute condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$  et tout  $t \geq 0$ , la solution du problème de Cauchy (7.22) vérifie*

$$\|\omega(\cdot, t)\|_\infty \leq K_\omega \sqrt{E(0)} \exp(-\Lambda t/2), \quad (7.108a)$$

$$\|\omega_y(\cdot, t)\|_\infty \leq K_{\omega_y} \sqrt{E(0)} \exp(-\Lambda t/2), \quad (7.108b)$$

$$\|\phi(\cdot, t)\|_\infty \leq K_\phi \sqrt{E(0)} \exp(-\Lambda t/2), \quad (7.108c)$$

où  $\Lambda > 0$  est fourni par le Théorème 7.12 et  $E(0) = \|X_0\|_{\mathcal{H},1}^2/2$  représente l'énergie initiale du système.

**Démonstration.** Soit  $X(t) = T(t)X_0 = (f(\cdot, t), g(\cdot, t), h(\cdot, t), z(\cdot, t))$  la solution du problème de Cauchy (7.22) associée à la condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ . Puisque pour tout  $t \geq 0$ ,  $X(t) \in D(\mathcal{A})$ , on a  $h(\cdot, t) \in H^1(0, l)$  et  $h(0, t) = 0$ . En appliquant l'inégalité d'Agmon (cf. Lemma D.9) puis l'inégalité de Poincaré, on obtient

$$\|h(\cdot, t)\|_\infty^4 \leq 4 \int_0^l h^2(y, t) dy \int_0^l h'^2(y, t) dy \leq \frac{16l^2}{\pi^2} \left[ \int_0^l h'^2(y, t) dy \right]^2 \leq \frac{64l^2}{\pi^2 c_\phi^4} E(t)^2. \quad (7.109)$$

Ainsi, pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|h(\cdot, t)\|_\infty \leq \frac{2^{3/2}l^{1/2}}{\pi^{1/2}c_\phi} \sqrt{E(t)} \leq K_\phi \sqrt{E(0)} \exp(-\Lambda t/2), \quad (7.110)$$

avec

$$K_\phi = \frac{2^{3/2}l^{1/2}}{\pi^{1/2}c_\phi} \times \sqrt{\frac{1 + K_m \epsilon_m}{1 - K_m \epsilon_m}}. \quad (7.111)$$

En suivant la même procédure avec  $f'(\cdot, t) \in H^1(0, l)$  et  $f'(0, t) = 0$ ,  $K_{\omega_y} = K_\phi c_\phi / c_\omega$  est tel que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|f'(\cdot, t)\|_\infty \leq K_{\omega_y} \sqrt{E(0)} \exp(-\Lambda t/2). \quad (7.112)$$

Finalement, puisque pour tout  $t \geq 0$ ,  $f(\cdot, t), f'(\cdot, t) \in H^1(0, l)$  et  $f(0, t) = f'(0, t) = 0$ , on obtient que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\|f(\cdot, t)\|_\infty \leq \frac{2^{5/2}l^{3/2}}{\pi^{3/2}c_\omega} \sqrt{E(t)} \leq K_\omega \sqrt{E(0)} \exp(-\Lambda t/2), \quad (7.113)$$

avec

$$K_\omega = \frac{2^{5/2}l^{3/2}}{\pi^{3/2}C_\omega} \times \sqrt{\frac{1 + K_m\epsilon_m}{1 - K_m\epsilon_m}}. \quad (7.114)$$

La preuve est complète puisque  $f = \omega$ ,  $f' = \omega_y$  et  $h = \phi$ .  $\square$

## 7.4 Résultats de simulation

Le comportement du système bouclé est évalué en simulation. De manière à approximer le système d'EDP en un système d'EDO pouvant être résolu numériquement, une discrétisation basée sur la méthode de Galerkin (Brenner and Scott, 2007; Ciarlet, 2002) a été employée. Elle consiste dans le cas présent à choisir, en fonction des conditions à la frontière (7.2) et (7.3a-7.3b), deux familles libres de fonctions  $(f_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(h_j)_{0 \leq j \leq p}$  afin d'approximer les déplacements flexibles sous la forme suivante.

$$\omega(y, t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) f_i(y), \quad (7.115a)$$

$$\phi(y, t) = \sum_{j=0}^p b_j(t) h_j(y). \quad (7.115b)$$

En injectant ces expressions dans les EDP d'origine (7.1a-7.1b) et en tenant compte des entrées de contrôle (7.3a-7.3b), la projection de chacune de ces deux équations dans l'espace vectoriel engendré respectivement par  $(f_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(h_j)_{0 \leq j \leq p}$  permet d'obtenir un système d'EDO approximant le modèle d'origine et utilisable à des fins de simulation. Les détails de la discrétisation ainsi que le modèle EDO obtenu sont fournis en Annexe E.

Les conditions initiales sont fixées à :  $\omega(y, 0) = 0.15f_0(y)/l^2$  m et  $\phi(y, 0) = 16(h_0(y)/l + h_1(y)/l^2) = 8y^2/l^2$  deg. Le comportement du système en boucle ouverte est illustré à la Fig. 7.1. On observe que les déplacements en flexion et en torsion sont faiblement amortis, laissant apparaître de larges oscillations. Pour des gains de contrôle fixés à  $k_1 = k_2 = 1$ , le comportement du système bouclé tel qu'illustré à la Fig. 7.2 indique un meilleur amortissement du système avec des déplacements flexibles qui convergent rapidement vers zéro. Cette meilleure performance du système bouclé se confirme lorsque l'on compare les déplacements flexibles à l'extrémité de l'aile comme cela est montré à la Fig. 7.3(a). Finalement, l'effort de commande est illustré à la Fig. 7.3(b).

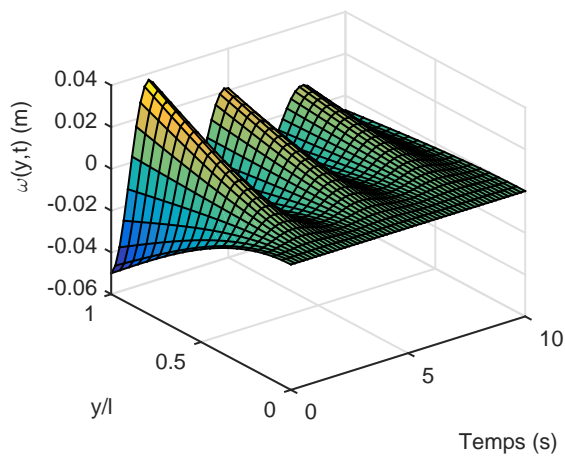
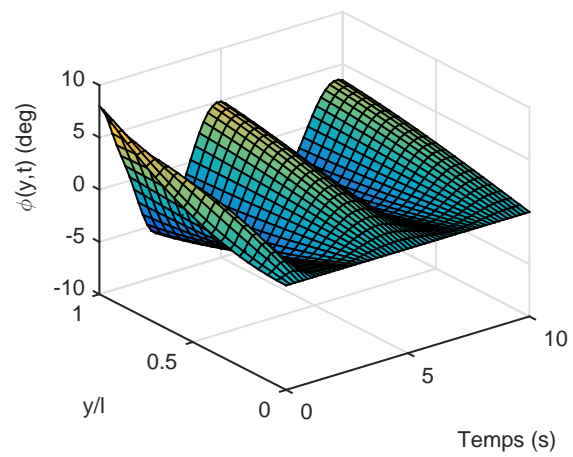
(a) Déplacement en flexion  $\omega(y,t)$ (b) Déplacement en torsion  $\phi(y,t)$ 

Figure 7.1 Réponse du système en boucle ouverte

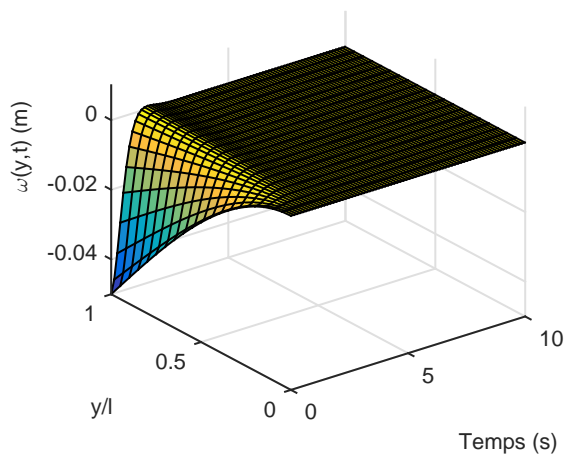
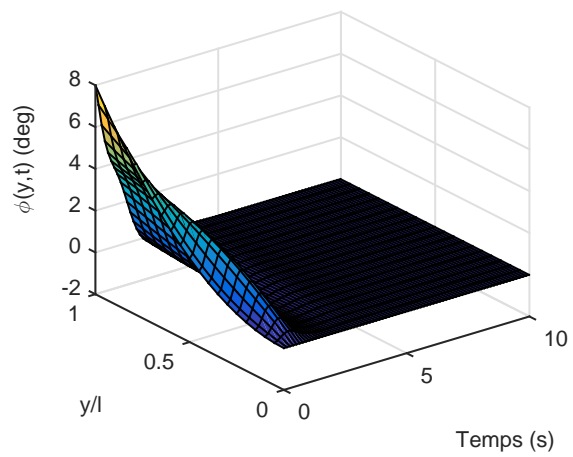
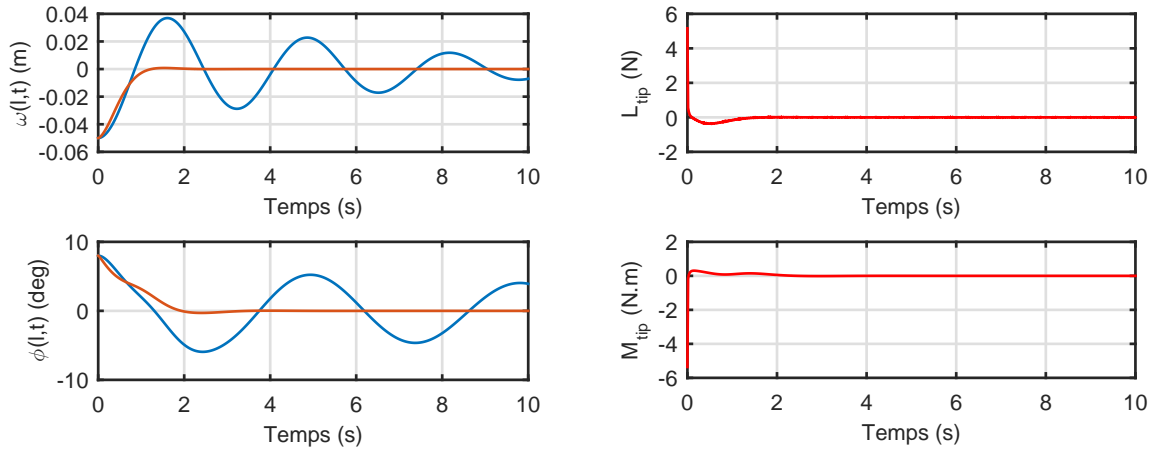
(a) Déplacement en flexion  $\omega(y,t)$ (b) Déplacement en torsion  $\phi(y,t)$ 

Figure 7.2 Réponse du système en boucle fermée





(a) Comparaison en boucle ouverte et en boucle fermée des déplacements flexibles à l'extrémité de l'aile

(b) Effort de commande  $M_{tip}$  et  $F_{tip}$

Figure 7.3 Comportement du système bouclé à l'extrémité de l'aile et effort de commande associé

En conclusion, on a donc démontré pour l'aile homogène l'existence et l'unicité des trajectoires du système en boucle fermée. De plus, sous réserve de l'Hypothèse 7.1, la décroissance exponentielle de l'énergie du système a été établie. Il en a été déduit la convergence exponentielle uniforme des déplacements en flexion et en torsion vers zéro.

## CHAPITRE 8    CONTRÔLE À LA FRONTIÈRE D'UNE AILE FLEXIBLE NON HOMOGÈNE

Le Chapitre 7 a permis de traiter le contrôle d'une aile flexible homogène décrite par un système de deux EDP couplées. Ce chapitre prolonge cette étude en étudiant le cas d'une aile flexible non homogène en présence de perturbations en entrée de commande. Cela conduit à reformuler le problème sous forme d'un problème de contrôle à la frontière sous forme abstraite tenant à la fois compte de la loi de commande imposée et des entrées de perturbation (Section 8.1). Une telle formulation conduit à étudier la *well-posedness* du problème en deux temps. Dans un premier temps, la génération d'un  $C_0$ -semi-groupe est investiguée, permettant de conclure la *well-posedness* en l'absence de perturbation. Dans un second temps, la *well-posedness* en présence de perturbations en entrée est démontrée via le concept de *boundary control system* (Section 8.2). L'étude de la stabilité du système bouclé est menée par une approche de type fonction de Lyapunov (Section 8.3). Finalement, une étude numérique est effectuée afin de valider la stratégie de commande en simulation (Section 8.4).

### 8.1    Modèle de l'aile homogène, loi de commande et forme abstraite

#### 8.1.1    Modèle de l'aile homogène et loi de commande

On considère le problème du contrôle du système d'EDP couplées à coefficients non constants<sup>1</sup> suivant :

$$\rho\omega_{tt} + (EI\omega_{yy} + \eta_\omega EI\omega_{tyy})_{yy} = \rho [\alpha_\omega\phi + \beta_\omega\phi_t + \gamma_\omega\omega_t], \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (8.1a)$$

$$I_w\phi_{tt} - (GJ\phi_y + \eta_\phi GJ\phi_{ty})_y = I_w [\alpha_\phi\phi + \beta_\phi\phi_t + \gamma_\phi\omega_t], \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+. \quad (8.1b)$$

Les conditions à la frontière sont données par :

$$\omega(0, t) = \omega_y(0, t) = \omega_{yy}(l, t) = \phi(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (8.2)$$

avec une commande à la frontière telle que :

$$L_{\text{tip}}(t) = -(EI\omega_{yy} + \eta_\omega EI\omega_{tyy})_y(l, t) + m_s\omega_{tt}(l, t), \quad t \geq 0, \quad (8.3a)$$

$$M_{\text{tip}}(t) = (GJ\phi_y + GJ\eta_\phi\phi_{ty})(l, t) + J_s\phi_{tt}(l, t), \quad t \geq 0. \quad (8.3b)$$

---

1. Contrairement au Chapitre 7,  $\rho, I_w, EI, GJ, \dots$  ne sont pas des constantes mais des fonctions de la variable spatiale  $y$  modélisant l'évolution des différents paramètres physiques le long de l'aile.

Les entrées de commande sont la portance  $F_{\text{tip}}(t)$  et le moment en torsion  $M_{\text{tip}}(t)$  générés à l'instant  $t \geq 0$  par les volets situés à l'extrémité de l'aile.

La stratégie de commande investiguée prend la forme de celle du Chapitre 7 en présence de deux entrées de perturbation  $d_1(t)$  et  $d_2(t)$  :

$$L_{\text{tip}}(t) = -k_1 [\omega_t(l, t) + \epsilon_1 \omega(l, t)] + m_s \omega_{tt}(l, t) + d_1(t), \quad t \geq 0, \quad (8.4a)$$

$$M_{\text{tip}}(t) = -k_2 [\phi_t(l, t) + \epsilon_2 \phi(l, t)] + J_s \phi_{tt}(l, t) + d_2(t), \quad t \geq 0, \quad (8.4b)$$

où  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}_+^*$  sont deux gains de contrôle et  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$  deux paramètres qui seront sélectionnés par la suite. De la sorte, en combinant (7.3a-7.3b) et (7.4a-7.4b), on obtient les deux conditions à la frontière suivantes :

$$(EI\omega_{yyy}(l, t) + \eta_\omega EI\omega_{tyyy}(l, t)) = k_1 (\omega_t(l, t) + \epsilon_1 \omega(l, t)) - d_1(t), \quad t \geq 0, \quad (8.5a)$$

$$(GJ\phi_y(l, t) + \eta_\phi \phi_{ty}(l, t)) = -k_2 (\phi_t(l, t) + \epsilon_2 \phi(l, t)) + d_2(t), \quad t \geq 0, \quad (8.5b)$$

Finalement, les conditions initiales, dont la régularité sera spécifiée plus tard, sont données par  $\omega(\cdot, 0) = \omega_0$ ,  $\omega_t(\cdot, 0) = \omega_{t0}$ ,  $\phi(\cdot, 0) = \phi_0$  et  $\phi_t(\cdot, 0) = \phi_{t0}$ .

Ce chapitre vise à démontrer le bien fondé de la stratégie de commande à la frontière (8.4a-8.4b). En définissant l'énergie du système comme suit :

$$\forall t \geq 0, \quad E(t) \triangleq \frac{1}{2} \int_0^l EI(y) \omega_{yy}^2(y, t) + \rho(y) \omega_t^2(y, t) + GJ(y) \phi_y^2(y, t) + I_w(y) \phi_t^2(y, t) \, dy, \quad (8.6)$$

l'objectif est de montrer qu'en l'absence de perturbations ( $d_1 = d_2 = 0$ ) on a convergence exponentielle de l'énergie  $E(t)$  du système bouclé vers 0, ainsi que celle des déplacements flexibles  $\omega$  et  $\phi$  de manière uniforme le long de l'aile. Dans un second temps, l'impact des perturbations  $d_1$  et  $d_2$  sur le comportement du système bouclé est analysé.

### 8.1.2 Reformulation du problème sous forme abstraite

Pour toute fonction mesurable  $f : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$ , on définit le supremum essentiel et l'infimum essentiel de  $f$  comme étant :

$$\overline{f} \triangleq \inf \left\{ M \in \mathbb{R} : \lambda(f^{-1}(M, +\infty)) = 0 \right\}, \quad (8.7a)$$

$$\underline{f} \triangleq \sup \left\{ m \in \mathbb{R} : \lambda(f^{-1}(-\infty, m)) = 0 \right\}, \quad (8.7b)$$

où  $\lambda$  représente la mesure de Lebesgue. L'ensemble des fonctions mesurables  $f : (0, l) \rightarrow \mathbb{R}$  qui sont essentiellement bornées, i.e., pour lesquelles  $\overline{|f|} < \infty$ , est notée  $L^\infty(0, l)$  et est muni de sa norme naturelle  $\|f\|_{L^\infty(0, l)} = \overline{|f|}$ . Pour l'ensemble des fonctions continues définies sur un compact donné, la norme uniforme est notée  $\|\cdot\|_\infty$ .

On suppose que les paramètres de l'aile sont tels que  $\rho, I_w, EI, GJ, \eta_\omega, \eta_\phi \in L^\infty(0, l)$  et que leur infimum essentiel est strictement positif, i.e.,  $\underline{\rho}, \underline{I_w}, \underline{EI}, \underline{GJ}, \underline{\eta_\omega}, \underline{\eta_\phi} > 0$ . On suppose également que les coefficients aérodynamiques sont tels que  $\alpha_\omega, \beta_\omega, \gamma_\omega, \alpha_\phi, \beta_\phi, \gamma_\phi \in L^\infty(0, l)$ .

De manière à analyser les propriétés du système bouclé composé de (8.1a-8.1b) avec les conditions aux frontières (8.2) et (8.5a-8.5b), on réécrit le problème sous forme abstraite. Pour cela, considérons le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel défini par :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = \{ & (f, g, h, z) \in H^2(0, l) \times L^2(0, l) \times H^1(0, l) \times L^2(0, l) : \\ & f(0) = f'(0) = 0, h(0) = 0, f, f', h \in \text{AC}[0, l] \} \end{aligned} \quad (8.8)$$

avec le produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}, 1}$  défini par<sup>2</sup> :

$$\begin{aligned} & \langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_{\mathcal{H}, 1} \\ & \triangleq \int_0^l [EI(y)f_1''(y)f_2''(y) + \rho(y)g_1(y)g_2(y) + GJ(y)h_1'(y)h_2'(y) + I_w(y)z_1(y)z_2(y)] dy. \end{aligned} \quad (8.9)$$

La norme associée est notée  $\|\cdot\|_{\mathcal{H}, 1}$ . Le choix de ce produit scalaire est motivé par le fait qu'à partir de la définition de l'énergie du système adoptée dans ce chapitre (8.6), on a

$$\forall t \geq 0, E(t) = \frac{1}{2} \|(\omega(\cdot, t), \omega_t(\cdot, t), \phi(\cdot, t), \phi_t(\cdot, t))\|_{\mathcal{H}, 1}^2. \quad (8.10)$$

Du fait que  $\rho, I_w, EI, GJ \in L^\infty(0, l)$  avec  $\underline{\rho}, \underline{I_w}, \underline{EI}, \underline{GJ} > 0$ , on peut montrer de manière analogue à ce qui a été fait au Chapitre 7 que l'espace  $\mathcal{H}$  doté de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H}, 1}$  est un espace de Hilbert.

Afin d'étudier la *well-posedness* du système bouclé en présence de perturbations en entrée de commande, on introduit :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_d : \quad D(\mathcal{A}_d) & \longrightarrow \mathcal{H} \\ (f, g, h, z) & \longrightarrow (g, \tilde{g}, z, \tilde{z}) \end{aligned} \quad (8.11)$$

---

2. L'indice « 1 » dans la notation du produit scalaire est utilisé pour le différencier du second produit scalaire introduit par la suite.

où

$$\tilde{g} \triangleq -\frac{1}{\rho}(EIF'' + \eta_\omega EIg'')'' + \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, \quad (8.12a)$$

$$\tilde{z} \triangleq \frac{1}{I_w}(GJh' + \eta_\phi GJz')' + \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g, \quad (8.12b)$$

sur le domaine  $D(\mathcal{A}_d) \subset \mathcal{H}$  défini par :

$$D(\mathcal{A}_d) \triangleq \{(f, g, h, z) \in \mathcal{H} :$$

$$g \in H^2(0, l), z \in H^1(0, l), EIF'' + \eta_\omega EIg'' \in H^2(0, l), GJh' + \eta_\phi GJz' \in H^1(0, l),$$

$$f(0) = f'(0) = 0, g(0) = g'(0) = 0, h(0) = 0, z(0) = 0, (EIF'' + \eta_\omega EIg'')(l) = 0,$$

$$f, f', g, g', h, z, (EIF'' + \eta_\omega EIg'') \in AC[0, l],$$

$$(EIF'' + \eta_\omega EIg'')', (GJh' + \eta_\phi GJz') \in AC[0, l]\}.$$

(8.13)

En munissant  $\mathbb{R}^2$  de la norme 2 usuelle, on introduit également l'opérateur à la frontière :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} : \quad D(\mathcal{B}) &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (f, g, h, z) &\longrightarrow (\tilde{u}_1, \tilde{u}_2) \end{aligned} \quad (8.14)$$

où

$$\tilde{u}_1 \triangleq -(EIF'' + \eta_\omega EIg'')'(l) + k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l)), \quad (8.15a)$$

$$\tilde{u}_2 \triangleq (GJh' + GJ\eta_\phi z')(l) + k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l)), \quad (8.15b)$$

sur le domaine  $D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{A}_d) \subset \mathcal{H}$ . Soit  $U = (u_1, u_2) \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$  l'entrée de perturbation. On obtient que le système d'EDP couplées (8.1a-8.1b) avec les conditions aux frontières (8.2) et (8.5a-8.5b) se reformule sous la forme du problème de contrôle à la frontière sous forme abstraite suivant :

$$\begin{cases} \frac{dX}{dt}(t) = \mathcal{A}_d X(t), \quad t > 0 \\ \mathcal{B}X(t) = U(t), \quad t \geq 0 \\ X(0) = X_0 \in D(\mathcal{A}_d) \quad \text{t.q.} \quad \mathcal{B}X_0 = U(0) \end{cases} \quad (8.16)$$

où  $X(t) = (\omega(\cdot, t), \omega_t(\cdot, t), \phi(\cdot, t), \phi_t(\cdot, t))$  est le vecteur d'état et  $X_0 = (\omega_0, \omega_{t0}, \phi_0, \phi_{t0})$  est la condition initiale. De manière à étudier les propriétés du problème de contrôle à la frontière (8.16), la question de sa *well-posedness* est investiguée dans la prochaine section.

## 8.2 *Well-posedness* du problème de contrôle à la frontière

Afin d'étudier la *well-posedness* du problème de contrôle à la frontière (8.16), il est utile de l'étudier d'abord en l'absence de perturbation, c'est-à-dire pour  $U = 0$ . À cette fin, on introduit l'opérateur  $\mathcal{A} \triangleq \mathcal{A}_d|_{D(\mathcal{A})}$  sur le domaine  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_d) \cap \ker(\mathcal{B})$ . De manière à faciliter les prochains développements, les deux opérateurs linéaires  $\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{H}$  et  $\mathcal{A}_2 : D(\mathcal{A}_2) \rightarrow \mathcal{H}$  sont introduits comme suit :

$$\mathcal{A}_1(f, g, h, z) \triangleq \left( g, -\frac{1}{\rho}(EIF'' + \eta_\omega E Ig'')'', z, \frac{1}{I_w}(GJh' + \eta_\phi GJz')' \right), \quad (8.17a)$$

$$\mathcal{A}_2(f, g, h, z) \triangleq (0, \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, 0, \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g), \quad (8.17b)$$

définis sur les domaines  $D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A})$  et  $D(\mathcal{A}_2) = \mathcal{H}$ . On vérifie que  $\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2$  sur  $D(\mathcal{A})$ .

### 8.2.1 Motivation et introduction d'un second produit scalaire

On souhaite dans un premier temps montrer que l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  génère un  $C_0$ -semi-groupe. Pour cela, on souhaite appliquer le théorème de Lümer-Phillips (Théorème 6.8). Cependant, comme dans le cas de l'aile homogène, on a le résultat suivant.

**Lemme 8.1**  $\mathcal{A}_1$  n'est pas un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)_{\mathcal{H},1}$ .

**Démonstration.** Pour  $X = (f, g, h, z) \in \mathcal{H}$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} &= \left\langle \left( g, -\frac{1}{\rho}(EIF'' + \eta_\omega E Ig'')'', z, \frac{1}{I_w}(GJh' + \eta_\phi GJz')' \right), (f, g, h, z) \right\rangle_{\mathcal{H},1} \\ &= \int_0^l EI(y)f''(y)g''(y)dy - \int_0^l (EIF'' + \eta_\omega E Ig'')''(y)g(y)dy \\ &\quad + \int_0^l GJ(y)h'(y)z'(y)dy + \int_0^l (GJh' + \eta_\phi GJz')'(y)z(y)dy. \end{aligned} \quad (8.18)$$

En intégrant par partie avec les conditions à la frontière (8.13) et  $X \in \ker(\mathcal{B})$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
& \int_0^l (EI f'' + \eta_\omega EI g'')''(y) g(y) dy \\
&= [(EI f'' + \eta_\omega EI g'')'(y) g(y)]_{y=0}^{y=l} - \int_0^l (EI f'' + \eta_\omega EI g'')'(y) g'(y) dy \\
&= k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l))g(l) - [(EI f'' + \eta_\omega EI g'')(y) g'(y)]_{y=0}^{y=l} \\
&\quad + \int_0^l (EI f'' + \eta_\omega EI g'')(y) g''(y) dy \\
&= k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l))g(l) + \int_0^l EI(y) f''(y) g''(y) dy + \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y) dy, \quad (8.19)
\end{aligned}$$

ainsi que :

$$\begin{aligned}
& \int_0^l (GJ h' + \eta_\phi GJ z')'(y) z(y) dy \\
&= [(GJ h' + \eta_\phi GJ z')(y) z(y)]_{y=0}^{y=l} - \int_0^l (GJ h' + \eta_\phi GJ z')(y) z'(y) dy \\
&= -k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l))z(l) - \int_0^l GJ(y) h'(y) z'(y) dy - \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y) dy. \quad (8.20)
\end{aligned}$$

On en déduit l'identité :

$$\begin{aligned}
\langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} &= -k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l))g(l) - \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y) dy \\
&\quad - k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l))z(l) - \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y) dy. \quad (8.21)
\end{aligned}$$

L'équation (8.21) permet de conclure que l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  n'est pas dissipatif relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$ . En effet, en considérant  $f = g = 0$  et, pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$h(y) = \int_0^y \frac{\kappa_1 \xi + \kappa_2}{GJ(\xi)} d\xi, \quad z(y) = \int_0^y \frac{\kappa_3}{\eta_\phi(\xi) GJ(\xi)} d\xi, \quad (8.22)$$

où<sup>3</sup>

$$\kappa_1 = \frac{1}{lI_1 - I_2} \left\{ \frac{1}{k_2 \epsilon_2} \left( 1 + k_2 + \frac{1}{I_3} \right) + I_1 \right\}, \quad \kappa_2 = \frac{-1}{lI_1 - I_2} \left\{ \frac{l}{k_2 \epsilon_2} \left( 1 + k_2 + \frac{1}{I_3} \right) + I_2 \right\}, \quad (8.23)$$

et  $\kappa_3 = 1/I_3$  avec

$$I_1 = \int_0^l \frac{d\xi}{GJ(\xi)}, \quad I_2 = \int_0^l \frac{\xi}{GJ(\xi)} d\xi, \quad I_3 = \int_0^l \frac{d\xi}{\eta_\phi(\xi) GJ(\xi)}, \quad (8.24)$$

---

3. Les constantes  $\kappa_1$  et  $\kappa_2$  sont bien définies car  $1/GJ(y) \geq 1/\overline{GJ}$  pour presque tout  $y \in [0, l]$ , ce qui implique  $lI_1 - I_2 \geq l^2/(2\overline{GJ}) > 0$ .

on a  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A})$  et, sur la base de (8.21), un calcul direct montre que l'on a  $\langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} = 1 > 0$ . Ainsi,  $\mathcal{A}_1$  n'est pas dissipatif relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$ . Le théorème de Lümer-Phillips (Théorème 6.8) permet de conclure que  $\mathcal{A}_1$  ne génère pas un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$ .  $\square$

Afin de statuer si  $\mathcal{A}_1$  génère sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$  un  $C_0$ -semi-groupe (qui ne serait donc pas de contraction d'après le résultat précédent), on cherche comme dans le cas de l'aile homogène à utiliser un second produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  sur  $\mathcal{H}$  vérifiant les trois conditions suivantes :

1.  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un espace de Hilbert ;
2.  $\mathcal{A}_1$  est dissipatif relativement à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  ;
3. les normes  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  sont équivalentes.

On introduit le candidat  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2} : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$  défini pour tout  $(f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \in \mathcal{H}$  par :

$$\begin{aligned} \langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_{\mathcal{H},2} &\triangleq \langle (f_1, g_1, h_1, z_1), (f_2, g_2, h_2, z_2) \rangle_{\mathcal{H},1} \\ &+ \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) [f_1(y)g_2(y) + g_1(y)f_2(y)] dy \\ &+ \epsilon_2 \int_0^l I_w(y) [h_1(y)z_2(y) + z_1(y)h_2(y)] dy, \end{aligned} \quad (8.25)$$

où les constantes  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$  sont celles utilisées dans la définition de l'opérateur  $\mathcal{B}$  (8.14) et découlant de la loi de contrôle (8.4a-8.4b). On introduit la constante  $K_m \in \mathbb{R}_+^*$  définie par :

$$K_m = \max \left( \sqrt{\bar{\rho}}, \frac{16l^4 \sqrt{\bar{\rho}}}{\pi^4 \underline{EI}}, \sqrt{\bar{I}_w}, \frac{4l^2 \sqrt{\bar{I}_w}}{\pi^2 \underline{GJ}} \right), \quad (8.26)$$

intervenant dans le lemme énoncé ci-dessous.

**Lemme 8.2** *Pour tout  $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1/K_m$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est un produit scalaire pour  $\mathcal{H}$ . De plus, la norme associée à ce produit scalaire, notée  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$ , est équivalente à  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$ .*

**Démonstration.** Il est aisé de voir que  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est bien définie (par application de l'inégalité de Cauchy-Schwartz), bilinéaire et symétrique. Pour tout  $X = (f, g, h, z) \in \mathcal{H}$ ,

$$\langle X, X \rangle_{\mathcal{H},2} = \|X\|_{\mathcal{H},1}^2 + 2\epsilon_1 \int_0^l \rho(y) f(y)g(y) dy + 2\epsilon_2 \int_0^l I_w(y) h(y)z(y) dy. \quad (8.27)$$



En appliquant dans un premier temps l'inégalité de Young et dans un second temps l'inégalité de Poincaré pour  $h \in H^1(0, l)$  avec  $h(0) = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l I_w(y) h(y) z(y) dy \right| &\leq \sqrt{I_w} \int_0^l |h(y)| \left| \sqrt{I_w(y)} z(y) \right| dy \\
&\leq \frac{\sqrt{I_w}}{2} \left[ \int_0^l h^2(y) dy + \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{I_w}}{2} \left[ \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l h'^2(y) dy + \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{I_w}}{2} \left[ \frac{4l^2}{\pi^2 \underline{GJ}} \int_0^l GJ(y) h'^2(y) dy + \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{I_w}}{2} \max \left( 1, \frac{4l^2}{\pi^2 \underline{GJ}} \right) \int_0^l GJ(y) h'^2(y) + I_w(y) z^2(y) dy. \quad (8.28)
\end{aligned}$$

De manière analogue, en appliquant l'inégalité de Young puis celle de Poincaré pour  $f, f' \in H^1(0, l)$  avec  $f(0) = f'(0) = 0$ ,

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l \rho(y) f(y) g(y) dy \right| &\leq \sqrt{\rho} \int_0^l |f(y)| \left| \sqrt{\rho(y)} g(y) \right| dy \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho}}{2} \left[ \int_0^l f^2(y) dy + \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho}}{2} \left[ \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l f'^2(y) dy + \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho}}{2} \left[ \frac{16l^4}{\pi^4} \int_0^l f''^2(y) dy + \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho}}{2} \left[ \frac{16l^4}{\pi^4 \underline{EI}} \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy + \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \right] \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho}}{2} \max \left( 1, \frac{16l^4}{\pi^4 \underline{EI}} \right) \int_0^l EI(y) f''^2(y) + \rho(y) g^2(y) dy. \quad (8.29)
\end{aligned}$$

On en déduit alors que pour tout  $X \in \mathcal{H}$ ,

$$(1 - \epsilon_m K_m) \|X\|_{\mathcal{H},1}^2 \leq \langle X, X \rangle_{\mathcal{H},2} \leq (1 + \epsilon_m K_m) \|X\|_{\mathcal{H},1}^2, \quad (8.30)$$

avec  $\epsilon_m = \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$ . Ainsi, pour  $0 < \epsilon_m < 1/K_m$ ,  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  est positif défini, et définit donc un produit scalaire sur  $\mathcal{H}$ . De plus, en notant  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  la norme associée, (8.30) implique que  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},2}$  et  $\|\cdot\|_{\mathcal{H},1}$  sont équivalentes.  $\square$

On déduit directement du lemme précédent le corollaire suivant.

**Corollaire 8.3**  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un espace de Hilbert.

Par la suite, on supposera toujours que  $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1/K_m$ , de telle sorte que le Lemme 7.3 s'applique.

### 8.2.2 $\mathcal{A}_1$ génère un $C_0$ -semi-groupe

On va chercher à tirer profit du second produit scalaire introduit en appliquant le théorème de Lümer-Phillips sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ . Pour cela, on investigate tout d'abord la condition de dissipativité. On introduit pour cela les deux constantes :

$$\epsilon_1^* = \frac{4\pi^4 \eta_\omega EI}{64l^4 \bar{\rho} + \pi^4 \bar{\eta}_\omega \eta_\omega EI}, \quad \epsilon_2^* = \frac{4\pi^2 \eta_\phi GJ}{16l^2 \bar{I}_w + \pi^2 \bar{\eta}_\phi \eta_\phi GJ}. \quad (8.31)$$

**Lemme 8.4** Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}_1 : D(\mathcal{A}_1) \rightarrow \mathcal{H}$  est dissipatif relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ .

**Démonstration.** Puisque  $0 < \epsilon_1, \epsilon_2 < 1/K_m$ , le Lemme 8.2 assure que  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$  est un espace de Hilbert. Soit  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1)$ . Sur la base de (8.21) et d'intégrations par partie,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &= \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},1} \\ &\quad + \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy - \epsilon_1 \int_0^l (EI f'' + \eta_\omega EI g'')''(y) f(y) dy \\ &\quad + \epsilon_2 \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy + \epsilon_2 \int_0^l (GJ h' + \eta_\phi GJ z')'(y) h(y) dy \\ &= -k_1(g(l) + \epsilon_1 f(l))^2 - k_2(z(l) + \epsilon_2 h(l))^2 \\ &\quad + \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy + \epsilon_2 \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy \\ &\quad - \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y) dy - \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y) dy \\ &\quad - \epsilon_1 \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy - \epsilon_1 \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) f''(y) g''(y) dy \\ &\quad - \epsilon_2 \int_0^l GJ(y) h'^2(y) dy - \epsilon_2 \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) h'(y) z'(y) dy. \end{aligned} \quad (8.32)$$

En appliquant l'inégalité de Young avec  $r_1, r_2 > 0$  arbitraires, on obtient les inégalités :

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) f''(y) g''(y) dy \right| &\leq \sqrt{\eta_\omega} \int_0^l \left| \sqrt{EI(y) f''(y)} \right| \left| \sqrt{\eta_\omega(y) EI(y) g''(y)} \right| dy \\ &\leq \frac{\sqrt{\eta_\omega}}{2r_1} \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy + \frac{\sqrt{\eta_\omega} r_1}{2} \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y) dy, \end{aligned} \quad (8.33a)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) h'(y) z'(y) dy \right| &\leq \sqrt{\eta_\phi} \int_0^l \left| \sqrt{GJ(y) h'(y)} \right| \left| \sqrt{\eta_\phi(y) GJ(y) z'(y)} \right| dy \\ &\leq \frac{\sqrt{\eta_\phi}}{2r_2} \int_0^l GJ(y) h'^2(y) dy + \frac{\sqrt{\eta_\phi} r_2}{2} \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y) dy. \end{aligned} \quad (8.33b)$$

En appliquant à présent l'inégalité de Poincaré ( $g, g', z \in AC[0, l]$  avec  $g(0) = g'(0) = z(0)$ ),

$$\begin{aligned} \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy &\leq \bar{\rho} \int_0^l g^2(y) dy \leq \bar{\rho} \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l g'^2(y) dy \leq \bar{\rho} \frac{16l^4}{\pi^4} \int_0^l g''^2(y) dy \\ &\leq \frac{16l^4}{\pi^4} \cdot \frac{\bar{\rho}}{\eta_\omega EI} \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y) dy, \end{aligned} \quad (8.34a)$$

$$\int_0^l I_w(y) z^2(y) dy \leq \bar{I}_w \int_0^l z^2(y) dy \leq \bar{I}_w \frac{4l^2}{\pi^2} \int_0^l z'^2(y) dy \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \cdot \frac{\bar{I}_w}{\eta_\phi GJ} \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y) dy. \quad (8.34b)$$

On en déduit que pour tout  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A})$  et tout  $r_1, r_2 > 0$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &\leq -k_1 (g(l) + \epsilon_1 f(l))^2 - k_2 (z(l) + \epsilon_2 h(l))^2 \\ &\quad - \left(1 - \frac{\epsilon_1}{\varphi_1(r_1)}\right) \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y) dy \\ &\quad - \left(1 - \frac{\epsilon_2}{\varphi_2(r_2)}\right) \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y) dy \\ &\quad - \epsilon_1 \left(1 - \frac{\sqrt{\eta_\omega}}{2r_1}\right) \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy \\ &\quad - \epsilon_2 \left(1 - \frac{\sqrt{\eta_\phi}}{2r_2}\right) \int_0^l GJ(y) h'^2(y) dy, \end{aligned} \quad (8.35)$$

où  $\varphi_1 : \mathbb{R}_+^* \ni x \rightarrow 2\pi^4 \eta_\omega EI / (32l^4 \bar{\rho} + \pi^4 \sqrt{\eta_\omega} \eta_\omega EI x)$  et  $\varphi_2 : \mathbb{R}_+^* \ni x \rightarrow 2\pi^2 \eta_\phi GJ / (8l^2 \bar{I}_w + \pi^2 \sqrt{\eta_\phi} \eta_\phi GJ x)$ . Puisque  $\varphi_1$  est une fonction continue et décroissante sur  $\mathbb{R}_+^*$  avec, par hypothèse,  $\epsilon_1 < \epsilon_1^* = \varphi_1(\sqrt{\eta_\omega}/2)$ , il existe  $r_1^* > \sqrt{\eta_\omega}/2$  tel que  $\epsilon_1 < \varphi_1(r_1^*) < \varphi_1(\sqrt{\eta_\omega}/2)$ . De manière analogue, il existe  $r_2^* > \sqrt{\eta_\phi}/2$  tel que  $\epsilon_2 < \varphi_2(r_2^*) < \varphi_2(\sqrt{\eta_\phi}/2) = \epsilon_2^*$ . Ainsi,

en prenant  $r_1 = r_1^*$  et  $r_2 = r_2^*$  dans l'équation (8.35), on obtient que pour tout  $X \in \mathcal{H}$ ,  $\langle \mathcal{A}_1 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} \leq 0$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{A}_1$  est dissipatif sur  $\mathcal{H}$  muni de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ .  $\square$

De manière à appliquer le théorème de Lümer-Phillips, on investigate à présent la condition de rang.

**Lemme 8.5** *L'opérateur  $\mathcal{A}_1^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(\mathcal{A}_1)$  existe et est borné, i.e.,  $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Ainsi  $0 \in \rho(\mathcal{A}_1)$  et  $\mathcal{A}_1$  est un opérateur fermé.*

**Proof.** On investigate dans un premier temps la surjectivité de  $\mathcal{A}_1$ . Soit  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$ . Alors avec  $f$  définie par

$$\begin{aligned} f(y) = & - \int_0^y (y - \xi) \eta_\omega(\xi) \tilde{f}''(\xi) d\xi - k_1 \int_0^y \frac{(y - \xi)(l - \xi)}{EI(\xi)} d\xi (\tilde{f}(l) + \epsilon_1 \alpha(\tilde{f}, \tilde{g})) \\ & - \int_0^y \frac{y - \xi_1}{EI(\xi_1)} \int_{\xi_1}^l (\xi_2 - \xi_1) \rho(\xi_2) \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \quad (8.36)$$

où<sup>4</sup>

$$\begin{aligned} \alpha(\tilde{f}, \tilde{g}) = & - \left\{ 1 + k_1 \epsilon_1 \int_0^l \frac{(l - \xi)^2}{EI(\xi)} d\xi \right\}^{-1} \\ & \times \left\{ \int_0^l (l - \xi) \eta_\omega(\xi) \tilde{f}''(\xi) d\xi + k_1 \int_0^l \frac{(l - \xi)^2}{EI(\xi)} d\xi \tilde{f}(l) \right. \\ & \left. + \int_0^l \frac{l - \xi_1}{EI(\xi_1)} \int_{\xi_1}^l (\xi_2 - \xi_1) \rho(\xi_2) \tilde{g}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right\}, \end{aligned} \quad (8.37)$$

$g = \tilde{f}$ ,  $h$  définie par

$$\begin{aligned} h(y) = & - \int_0^y \eta_\phi(\xi) \tilde{h}'(\xi) d\xi - k_2 \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)} (\tilde{h}(l) + \epsilon_2 \beta(\tilde{h}, \tilde{z})) \\ & - \int_0^y \frac{1}{GJ(\xi_1)} \int_{\xi_1}^l I_w(\xi_2) \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1, \end{aligned} \quad (8.38)$$

où<sup>5</sup>

$$\begin{aligned} \beta(\tilde{h}, \tilde{z}) = & - \left\{ 1 + k_2 \epsilon_2 \int_0^l \frac{d\xi}{GJ(\xi)} d\xi \right\}^{-1} \\ & \times \left\{ \int_0^l \eta_\phi(\xi) \tilde{h}'(\xi) d\xi + k_2 \int_0^l \frac{d\xi}{GJ(\xi)} \tilde{h}(l) + \int_0^l \frac{1}{GJ(\xi_1)} \int_{\xi_1}^l I_w(\xi_2) \tilde{z}(\xi_2) d\xi_2 d\xi_1 \right\}, \end{aligned} \quad (8.39)$$

---

4. Un calcul direct montre que  $f(l) = \alpha(\tilde{f}, \tilde{g})$ .

5. Un calcul direct montre que  $h(l) = \beta(\tilde{h}, \tilde{z})$ .

et  $z = \tilde{h}$ , on a  $(f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A})$  et  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) = \mathcal{A}_1(f, g, h, z)$ . Ainsi,  $\mathcal{A}_1$  est surjectif. De plus, puisque  $(f, g, h, z)$  dépend linéairement de  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$ , cela montre que  $\mathcal{A}_1$  est inversible à droite. Afin de conclure que  $\mathcal{A}_1$  est inversible, on étudie son injectivité. Soit  $(f, g, h, z) \in D(\mathcal{A}_1)$  tel que  $\mathcal{A}_1(f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0)$ . Alors  $g = z = 0$ , impliquant que  $(EIf'')'' = 0$  et  $(GJh')' = 0$  avec  $f(0) = f'(0) = (EIf'')(l) = 0$ ,  $(EIf'')(l) = k_1\epsilon_1 f(l)$ ,  $h(0) = 0$  et  $(GJh')(l) = -k_2\epsilon_2 h(l)$ . Ainsi, puisque  $(EIf'')', (EIf''), f', f \in AC[0, l]$ , on obtient par intégrations successives que pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$(EIf'')''(y) \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0 \quad (8.40a)$$

$$\Rightarrow (EIf'')(y) = (EIf'')(l) = k_1\epsilon_1 f(l) \quad (8.40b)$$

$$\Rightarrow (EIf'')(y) = \underbrace{(EIf'')(l)}_{=0} + k_1\epsilon_1(y-l)f(l) = k_1\epsilon_1(y-l)f(l) \quad (8.40c)$$

$$\Rightarrow f''(y) \stackrel{\text{p.p.}}{=} k_1\epsilon_1 \frac{(y-l)}{EI(y)} f(l) \quad (8.40d)$$

$$\Rightarrow f'(y) = \underbrace{f'(0)}_{=0} + k_1\epsilon_1 \int_0^y \frac{(\xi-l)}{EI(\xi)} d\xi f(l) = k_1\epsilon_1 \int_0^y \frac{(\xi-l)}{EI(\xi)} d\xi f(l) \quad (8.40e)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow f(y) &= \underbrace{f(0)}_{=0} + k_1\epsilon_1 \int_0^y \int_0^{\xi_1} \frac{(\xi_2-l)}{EI(\xi_2)} d\xi_2 d\xi_1 f(l) \\ &= -k_1\epsilon_1 \int_0^y \frac{(y-\xi)(l-\xi)}{EI(\xi)} d\xi f(l). \end{aligned} \quad (8.40f)$$

En évaluant ce résultat en  $y = l$ ,

$$\underbrace{\left(1 + k_1\epsilon_1 \int_0^l \frac{(l-\xi)^2}{EI(\xi)} d\xi\right)}_{>0} f(l) = 0 \Rightarrow f(l) = 0, \quad (8.41)$$

car  $k_1, \epsilon_1 \geq 0$  et  $EI > 0$ , impliquant que  $f = 0$ . De manière analogue, on a pour tout  $y \in [0, l]$ ,

$$(GJh')'(y) \stackrel{\text{p.p.}}{=} 0 \quad (8.42a)$$

$$\Rightarrow (GJh')(y) = (GJh')(l) = -k_2\epsilon_2 h(l) \quad (8.42b)$$

$$\Rightarrow h'(y) \stackrel{\text{p.p.}}{=} -\frac{k_2\epsilon_2}{GJ(y)} h(l) \quad (8.42c)$$

$$\Rightarrow h(y) = \underbrace{h(0)}_{=0} - k_2\epsilon_2 \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)} h(l) = -k_2\epsilon_2 \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)} h(l). \quad (8.42d)$$

En évaluant à nouveau en  $y = l$ , on obtient que

$$\underbrace{\left(1 + k_2 \epsilon_2 \int_0^l \frac{d\xi}{GJ(\xi)}\right)}_{>0} h(l) = 0 \Rightarrow h(l) = 0, \quad (8.43)$$

car  $k_2, \epsilon_2 \geq 0$  et  $\underline{GJ} > 0$ , impliquant que  $h = 0$ . On a ainsi montré que  $\mathcal{A}_1(f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0)$  si et seulement si  $(f, g, h, z) = (0, 0, 0, 0)$ , ce qui montre l'injectivité de  $\mathcal{A}_1$ .

On en déduit donc que  $\mathcal{A}_1^{-1} : \mathcal{H} \rightarrow D(\mathcal{A}_1)$  est bien défini avec pour tout  $(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) \in \mathcal{H}$ ,  $\mathcal{A}_1^{-1}(\tilde{f}, \tilde{g}, \tilde{h}, \tilde{z}) = (f, \tilde{f}, h, \tilde{h})$  où  $f$  et  $h$  sont respectivement données par (8.36) and (8.38). En recourant à l'inégalité de Poincaré, on montre de manière analogue à ce qui a été fait pour l'aile homogène que  $\mathcal{A}_1^{-1}$  est borné. Au bilan, on a donc bien  $\mathcal{A}_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  d'où  $0 \in \rho(\mathcal{A}_1)$  et  $\mathcal{A}_1$  est un opérateur fermé.  $\square$

On peut à présent introduire le résultat principal au regard de l'opérateur  $\mathcal{A}_1$ .

**Théorème 8.6** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}_1$  génère un  $C_0$ -semi-groupe de contraction sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .*

**Démonstration.** La démonstration est identique au cas de l'aile homogène traité dans le Chapitre 7 par le Théorème 7.7.  $\square$

On en déduit le corollaire suivant.

**Corollaire 8.7** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors  $D(\mathcal{A})$  est dense dans  $\mathcal{H}$  équipé de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  ou de  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ , i.e.,  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ .*

**Démonstration.** La démonstration est identique au cas de l'aile homogène traité dans le Chapitre 7 par le Corollaire 7.8.  $\square$

### 8.2.3 $\mathcal{A}$ génère un $C_0$ -semi-groupe

Le prochain lemme est une conséquence directe de la définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_2$ , des hypothèses portant sur les caractéristiques physiques du système<sup>6</sup> et de l'application des inégalités de Young et de Poincaré.

**Lemme 8.8** *L'opérateur  $\mathcal{A}_2$  est borné, i.e.,  $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ .*

---

6. En particulier que  $\rho, I_w, EI, GJ, \alpha_\omega, \beta_\omega, \gamma_\omega, \alpha_\phi, \beta_\phi, \gamma_\phi \in L^\infty(0, l)$  avec  $\rho, \underline{I_w}, \underline{EI}, \underline{GJ} > 0$ .

On peut alors introduire le résultat principal suivant.

**Théorème 8.9** *Soient  $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathbb{R}_+^*$  tels que  $\epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $\epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$ . Alors l'opérateur  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .*

**Démonstration.** Sur la base du Théorème 8.6 et du Lemme 8.8, le résultat annoncé est une conséquence directe de la théorie des perturbations via le Théorème 6.9.  $\square$

Le corollaire ci-dessous est la conséquence de l'équivalence des normes du Lemme 8.2 et de l'unicité d'un  $C_0$ -semi-groupe généré par un générateur infinitésimal (cf. Théorème 6.3).

**Corollaire 8.10** *Sous les hypothèses du Théorème 8.9,  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1})$  qui coïncide avec le  $C_0$ -semi-groupe généré par  $\mathcal{A}$  sur  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2})$ .*

#### 8.2.4 *Well-posedness* du problème de contrôle à la frontière

On vérifie que (8.16) satisfait la Définition 6.9 de « *boundary control system* ». Premièrement,  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_d) \cap \ker(\mathcal{B})$  et  $\mathcal{A}z = \mathcal{A}_d z$  pour tout  $z \in D(\mathcal{A})$ . Deuxièmement, on vérifie l'existence d'un opérateur  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H})$  tel que  $\text{Im}(B) \subset D(\mathcal{A}_d)$ ,  $\mathcal{A}_d B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H})$  et  $\mathcal{B}B = I_{\mathbb{R}^2}$ . On définit le candidat suivant :

$$\begin{aligned} B : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathcal{H} \\ (u_1, u_2) &\longrightarrow (f_{u_1}, 0, h_{u_2}, 0) \end{aligned} \quad (8.44)$$

où  $f_{u_1}$  et  $h_{u_2}$  sont définies pour tout  $y \in [0, l]$  par :

$$f_{u_1}(y) = \frac{u_1}{b_1} \int_0^y \frac{(y - \xi)(l - \xi)}{EI(\xi)} d\xi, \quad h_{u_2}(y) = \frac{u_2}{b_2} \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)}, \quad (8.45)$$

avec

$$b_1 = 1 + k_1 \epsilon_1 \int_0^l \frac{(l - \xi)^2}{EI(\xi)} d\xi, \quad b_2 = 1 + k_2 \epsilon_2 \int_0^l \frac{d\xi}{GJ(\xi)}. \quad (8.46)$$

On vérifie que  $B$  vérifie bien les conditions requises. Premièrement,  $B$  est clairement linéaire et satisfait :

$$\begin{aligned}
\forall U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|BU\|_{\mathcal{H},1}^2 &= \|(f_{u_1}, 0, h_{u_2}, 0)\|_{\mathcal{H},1}^2 \\
&= \int_0^l EI(y) f_{u_1}''^2(y) + GJ(y) h_{u_2}'^2(y) dy \\
&= \frac{u_1^2}{b_1^2} \int_0^l \frac{(l-y)^2}{EI(y)} dy + \frac{u_2^2}{b_2^2} \int_0^l \frac{dy}{GJ(y)} \\
&\leq \max \left( \frac{1}{b_1^2} \int_0^l \frac{(l-y)^2}{EI(y)} dy, \frac{1}{b_2^2} \int_0^l \frac{dy}{GJ(y)} \right) \|U\|_2^2, \quad (8.47)
\end{aligned}$$

où l'on a égalité lorsque  $U = (1, 0)$  si  $\frac{1}{b_1^2} \int_0^l \frac{(1-y/l)^2}{EI(y)} dy \geq \frac{1}{b_2^2} \int_0^l \frac{dy}{GJ(y)}$  et lorsque  $U = (0, 1)$  si  $\frac{1}{b_1^2} \int_0^l \frac{(1-y/l)^2}{EI(y)} dy \leq \frac{1}{b_2^2} \int_0^l \frac{dy}{GJ(y)}$ . Ainsi  $B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H})$  avec

$$\|B\| = \max \left( \frac{1}{b_1} \sqrt{\int_0^l \frac{(1-y/l)^2}{EI(y)} dy}, \frac{1}{b_2} \sqrt{\int_0^l \frac{dy}{GJ(y)}} \right). \quad (8.48)$$

De plus, un calcul direct montre que pour tout  $U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $BU \in D(\mathcal{A}_d)$  et

$$\mathcal{B}BU = \mathcal{B}(f_{u_1}, 0, h_{u_2}, 0) = (-(EI f_{u_1}'')'(l) + k_1 \varepsilon_1 f_{u_1}(l), (GJ h_{u_2}')'(l) + k_2 \varepsilon_2 h_{u_2}(l)) = U. \quad (8.49)$$

Ainsi on a bien  $\text{Im}(B) \subset D(\mathcal{A}_d)$  et  $\mathcal{B}B = I_{\mathbb{R}^2}$ . Finalement, pour tout  $U = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{A}_d BU\|_{\mathcal{H},1}^2 &= \|\mathcal{A}_d(f_{u_1}, 0, h_{u_2}, 0)\|_{\mathcal{H},1}^2 \\
&= \left\| \left( (0, -\frac{1}{\rho}(EI f_{u_1}'')'' + \alpha_w h_{u_2}, 0, \frac{1}{I_w}(GJ h_{u_2}')' + \alpha_\phi h_{u_2}, 0) \right) \right\|_{\mathcal{H},1}^2 \\
&= \|((0, \alpha_w h_{u_2}, 0, \alpha_\phi h_{u_2}, 0))\|_{\mathcal{H},1}^2 \\
&= \int_0^l \left( \rho(y) \alpha_w^2(y) + I_w(y) \alpha_\phi^2(y) \right) h_{u_2}^2(y) dy \\
&= \frac{u_2^2}{b_2^2} \int_0^l \left( \rho(y) \alpha_w^2(y) + I_w(y) \alpha_\phi^2(y) \right) \left( \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)} \right)^2 dy \\
&\leq \frac{1}{b_2^2} \int_0^l \left( \rho(y) \alpha_w^2(y) + I_w(y) \alpha_\phi^2(y) \right) \left( \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)} \right)^2 dy \|U\|_2^2, \quad (8.50)
\end{aligned}$$



où l'égalité est obtenue pour  $U = (0, 1)$ . On a donc bien  $\mathcal{A}_d B \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathcal{H})$  avec

$$\|\mathcal{U}B\| = \frac{1}{b_2} \sqrt{\int_0^l \left( \rho(y) \alpha_w^2(y) + I_w(y) \alpha_\phi^2(y) \right) \left( \int_0^y \frac{d\xi}{GJ(\xi)} \right)^2 dy}. \quad (8.51)$$

Puisque d'après le Théorème 8.9 et son Corollaire 8.10,  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe pour  $\epsilon_1, \epsilon_2 > 0$  d'amplitudes suffisamment faibles, on en déduit que pour tout  $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^2)$ , le problème de contrôle à la frontière sous forme abstraite (8.16) est bien posé (cf. Théorème 6.14). En particulier, il est possible de considérer l'équation différentielle homogène abstraite suivante :

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt}(t) = \mathcal{A}V(t) - B\dot{U}(t) + \mathcal{A}_d B U(t), & t > 0 \\ V(0) = V_0 \in D(\mathcal{A}) \end{cases} \quad (8.52)$$

Par le Théorème 6.14, en supposant que  $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}_+; \mathbb{R}^2)$ ,  $X_0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_d)$  et  $V_0 = X_0 - BU(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ , (8.16) et (8.52) admettant chacun une unique solution, notée respectivement  $X(t)$  et  $V(t)$ , qui sont liées par la relation  $V(t) = X(t) - BU(t)$  pour tout  $t \geq 0$ . Il est à noter que puisque  $D(\mathcal{A}) = D(\mathcal{A}_d) \cap \ker(\mathcal{B})$  et  $X_0, BU(0) \in D(\mathcal{A}_d)$ , la condition  $X_0 - BU(0) \in D(\mathcal{A})$  est équivalente à  $X_0 - BU(0) \in \ker(\mathcal{B})$ , i.e., en se basant sur l'identité  $\mathcal{B}\mathcal{B} = I_{\mathbb{R}^2}$ ,  $\mathcal{B}X_0 = U(0)$ . Ainsi, la condition  $X_0 - BU(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$  vise uniquement à ce que la condition à la frontière  $\mathcal{B}X(t) = U(t)$  de (8.16) soit satisfaite par la condition initiale  $X_0$  et l'entrée initiale  $U(0)$ . Soit  $T : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H})$  le  $C_0$ -semi-groupe généré par  $\mathcal{A}$  sur  $\mathcal{H}$  équipé de l'un des deux produits scalaires  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  ou  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ . Alors, l'unique solution de (8.52) est donnée, pour tout  $X_0 \in D(\mathcal{A}_d)$  tel que  $\mathcal{B}X(0) = U(0)$  et tout  $t \geq 0$  par (cf. Théorème 6.14 et l'Eq. (6.73)) :

$$X(t) = T(t)(X_0 - BU(0)) + BU(t) + \int_0^t T(t-s) \left( -B\dot{U}(s) + \mathcal{A}_d B U(s) \right) ds. \quad (8.53)$$

### 8.3 Analyses de stabilité

Afin d'analyser la stabilité du système bouclé, on analyse dans un premier temps la stabilité du  $C_0$ -semi-groupe, correspondant à l'étude de la stabilité du système en l'absence de perturbations en entrée. Dans un second temps, l'impact des perturbations sur le comportement temporel du système bouclé est étudié.

### 8.3.1 Stabilité exponentielle du $C_0$ -semi-groupe

On étudie la stabilité du système bouclé en l'absence de perturbations, i.e., pour  $U = 0$ . En se plaçant sous les hypothèses du Théorème 8.9,  $\mathcal{A}$  génère un  $C_0$ -semi-groupe  $T(t)$ . Ainsi,  $X(t) = T(t)X_0 \in D(\mathcal{A})$  est l'unique solution de  $(dX/dt)(t) = \mathcal{A}X(t)$  associée à la condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ . On définit alors l'énergie augmentée du système comme suit :

$$\forall t \geq 0, \mathcal{E}(t) \triangleq \frac{1}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},2}^2 = \frac{1}{2} \langle X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2}. \quad (8.54)$$

Puisque  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe, on a que  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  avec pour tout  $t \geq 0$  (confère Annexe D),

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2} = \langle \mathcal{A}X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2} = \langle \mathcal{A}_1 X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2} + \langle \mathcal{A}_2 X(t), X(t) \rangle_{\mathcal{H},2}. \quad (8.55)$$

Le premier terme du membre de droite de (8.55) a été majoré via (8.35) puisque pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{A}(t) \in D(\mathcal{A})$  et, par définition de l'opérateur  $\mathcal{A}_1$ ,  $D(\mathcal{A}_1) = D(\mathcal{A})$ . On se concentre donc sur l'évaluation du second terme. Pour tout  $X = (f, g, h, z) \in D(\mathcal{A})$ ,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_2 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} &= \langle (0, \alpha_\omega h + \beta_\omega z + \gamma_\omega g, 0, \alpha_\phi h + \beta_\phi z + \gamma_\phi g), (f, g, h, z) \rangle_{\mathcal{H},2} \\ &= \int_0^l \rho(y) [\alpha_\omega(y)h(y) + \beta_\omega(y)z(y) + \gamma_\omega(y)g(y)] g(y) dy \\ &\quad + \int_0^l I_w(y) [\alpha_\phi(y)h(y) + \beta_\phi(y)z(y) + \gamma_\phi(y)g(y)] z(y) dy \\ &\quad + \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) [\alpha_\omega(y)h(y) + \beta_\omega(y)z(y) + \gamma_\omega(y)g(y)] f(y) dy \\ &\quad + \epsilon_2 \int_0^l I_w(y) [\alpha_\phi(y)h(y) + \beta_\phi(y)z(y) + \gamma_\phi(y)g(y)] h(y) dy \\ &= \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) \gamma_\omega(y) f(y) g(y) dy + \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) \alpha_\omega(y) f(y) h(y) dy \\ &\quad + \epsilon_1 \int_0^l \rho(y) \beta_\omega(y) f(y) z(y) dy + \int_0^l \rho(y) \gamma_\omega(y) g^2(y) dy \\ &\quad + \int_0^l (\rho(y) \alpha_\omega(y) + \epsilon_2 I_w(y) \gamma_\phi(y)) g(y) h(y) dy \\ &\quad + \int_0^l (\rho(y) \beta_\omega(y) + I_w(y) \gamma_\phi(y)) g(y) z(y) dy + \epsilon_2 \int_0^l I_w(y) \alpha_\phi(y) h^2(y) dy \\ &\quad + \int_0^l I_w(y) (\alpha_\phi(y) + \epsilon_2 \beta_\phi(y)) h(y) z(y) dy + \int_0^l I_w(y) \beta_\phi(y) z^2(y) dy. \end{aligned} \quad (8.56)$$

En ayant une nouvelle fois recours aux inégalités de Young et de Poincaré (pour  $f, f', g, g', h, z \in$

AC[0, l] avec  $f(0) = f'(0) = g(0) = g'(0) = h(0) = z(0) = 0$ , on obtient pour  $r_3, \dots, r_5 > 0$  que :

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l \rho(y) \gamma_\omega(y) f(y) g(y) dy \right| &\leq \sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}| \int_0^l |f(y)| \left| \sqrt{\rho(y)} g(y) \right| dy \\
&\leq \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}|}{2r_3} \int_0^l f^2(y) dy + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}| r_3}{2} \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \\
&\leq \frac{8l^4 \sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}|}{\pi^4 r_3} \int_0^l f''^2(y) dy + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}| r_3}{2} \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \\
&\leq \frac{8l^4 \sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}|}{\pi^4 \underline{EI} r_3} \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\gamma_\omega}| r_3}{2} \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy,
\end{aligned} \tag{8.57a}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l \rho(y) \alpha_\omega(y) f(y) h(y) dy \right| &\leq \frac{\bar{\rho} |\overline{\alpha_\omega}|}{2r_4} \int_0^l f^2(y) dy + \frac{\bar{\rho} |\overline{\alpha_\omega}| r_4}{2} \int_0^l h^2(y) dy \\
&\leq \frac{8l^4 \bar{\rho} |\overline{\alpha_\omega}|}{\pi^4 r_4} \int_0^l f''^2(y) dy + \frac{2l^2 \bar{\rho} |\overline{\alpha_\omega}| r_4}{\pi^2} \int_0^l h'^2(y) dy \\
&\leq \frac{8l^4 \bar{\rho} |\overline{\alpha_\omega}|}{\pi^4 \underline{EI} r_4} \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy + \frac{2l^2 \bar{\rho} |\overline{\alpha_\omega}| r_4}{\pi^2 \underline{GJ}} \int_0^l GJ(y) h'^2(y) dy,
\end{aligned} \tag{8.57b}$$

$$\begin{aligned}
\left| \int_0^l \rho(y) \beta_\omega(y) f(y) z(y) dy \right| &\leq \frac{\bar{\rho} |\overline{\beta_\omega}|}{2r_5} \int_0^l f^2(y) dy + \frac{\bar{\rho} |\overline{\beta_\omega}| r_5}{2} \int_0^l z^2(y) dy \\
&\leq \frac{8l^4 \bar{\rho} |\overline{\beta_\omega}|}{\pi^4 r_5} \int_0^l f''^2(y) dy + \frac{\bar{\rho} |\overline{\beta_\omega}| r_5}{2} \int_0^l z^2(y) dy \\
&\leq \frac{8l^4 \bar{\rho} |\overline{\beta_\omega}|}{\pi^4 \underline{EI} r_5} \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy + \frac{\bar{\rho} |\overline{\beta_\omega}| r_5}{2 \underline{I_w}} \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy,
\end{aligned} \tag{8.57c}$$

$$\left| \int_0^l \rho(y) \gamma_\omega(y) g^2(y) dy \right| \leq |\overline{\gamma_\omega}| \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy. \tag{8.57d}$$

Similairement, on a pour  $r_6, \dots, r_8 > 0$  que :

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^l (\rho(y) \alpha_\omega(y) + \epsilon_2 I_w(y) \gamma_\phi(y)) g(y) h(y) dy \right| \\
&\leq \left( \sqrt{\bar{\rho}} |\overline{\alpha_\omega}| + \frac{\epsilon_2 \overline{I_w} |\overline{\gamma_\phi}|}{\sqrt{\bar{\rho}}} \right) \int_0^l \left| \sqrt{\rho(y)} g(y) \right| |h(y)| dy \\
&\leq \frac{\sqrt{\bar{\rho} \underline{\rho}} |\overline{\alpha_\omega}| + \epsilon_2 \overline{I_w} |\overline{\gamma_\phi}|}{2\sqrt{\bar{\rho}} r_6} \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy + \frac{(\sqrt{\bar{\rho} \underline{\rho}} |\overline{\alpha_\omega}| + \epsilon_2 \overline{I_w} |\overline{\gamma_\phi}|) r_6}{2\sqrt{\bar{\rho}}} \int_0^l h^2(y) dy
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq \frac{\sqrt{\rho\rho}|\alpha_\omega| + \epsilon_2\overline{I_w}|\gamma_\phi|}{2\sqrt{\rho}r_6} \int_0^l \rho(y)g^2(y)dy + \frac{2l^2(\sqrt{\rho\rho}|\alpha_\omega| + \epsilon_2\overline{I_w}|\gamma_\phi|)r_6}{\pi^2\sqrt{\rho}} \int_0^l h'^2(y)dy \\
&\leq \frac{\sqrt{\rho\rho}|\alpha_\omega| + \epsilon_2\overline{I_w}|\gamma_\phi|}{2\sqrt{\rho}r_6} \int_0^l \rho(y)g^2(y)dy + \frac{2l^2(\sqrt{\rho\rho}|\alpha_\omega| + \epsilon_2\overline{I_w}|\gamma_\phi|)r_6}{\pi^2\sqrt{\rho}\underline{GJ}} \int_0^l GJ(y)h'^2(y)dy,
\end{aligned} \tag{8.58a}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^l (\rho(y)\beta_\omega(y) + I_w(y)\gamma_\phi(y))g(y)z(y)dy \right| \\
&\leq \left( \frac{\sqrt{\rho}|\beta_\omega|}{\sqrt{I_w}} + \frac{\sqrt{I_w}|\gamma_\phi|}{\sqrt{\rho}} \right) \int_0^l \left| \sqrt{\rho(y)}g(y) \right| \left| \sqrt{I_w(y)}z(y) \right| dy \\
&\leq \frac{1}{2r_7} \left( \frac{\sqrt{\rho}|\beta_\omega|}{\sqrt{I_w}} + \frac{\sqrt{I_w}|\gamma_\phi|}{\sqrt{\rho}} \right) \int_0^l \rho(y)g^2(y)dy \\
&\quad + \frac{r_7}{2} \left( \frac{\sqrt{\rho}|\beta_\omega|}{\sqrt{I_w}} + \frac{\sqrt{I_w}|\gamma_\phi|}{\sqrt{\rho}} \right) \int_0^l I_w(y)z^2(y)dy,
\end{aligned} \tag{8.58b}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^l I_w(y)\alpha_\phi(y)h^2(y)dy \right| \\
&\leq \overline{I_w}|\alpha_\phi| \int_0^l h^2(y)dy \leq \frac{4l^2\overline{I_w}|\alpha_\phi|}{\pi^2} \int_0^l h'^2(y)dy \leq \frac{4l^2\overline{I_w}|\alpha_\phi|}{\pi^2\underline{GJ}} \int_0^l GJ(y)h'^2(y)dy,
\end{aligned} \tag{8.58c}$$

$$\begin{aligned}
&\left| \int_0^l I_w(y)(\alpha_\phi(y) + \epsilon_2\beta_\phi(y))h(y)z(y)dy \right| \\
&\leq \sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|) \int_0^l |h(y)| \left| \sqrt{I_w(y)}z(y) \right| dy \\
&\leq \frac{\sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|)}{2r_8} \int_0^l h^2(y)dy + \frac{\sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|)r_8}{2} \int_0^l I_w(y)z^2(y)dy \\
&\leq \frac{2l^2\sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|)}{\pi^2r_8} \int_0^l h'^2(y)dy + \frac{\sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|)r_8}{2} \int_0^l I_w(y)z^2(y)dy \\
&\leq \frac{2l^2\sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|)}{\pi^2\underline{GJ}r_8} \int_0^l GJ(y)h'^2(y)dy + \frac{\sqrt{I_w}(|\alpha_\phi| + \epsilon_2|\beta_\phi|)r_8}{2} \int_0^l I_w(y)z^2(y)dy.
\end{aligned} \tag{8.58d}$$

Finalement on a par majoration directe :

$$\left| \int_0^l I_w(y)\beta_\phi(y)z^2(y)dy \right| \leq |\beta_\phi| \int_0^l I_w(y)z^2(y)dy. \tag{8.59}$$

On déduit des inégalités précédentes la majoration suivante :

$$\begin{aligned}
& \langle \mathcal{A}_2 X, X \rangle_{\mathcal{H},2} \\
& \leq \frac{8\epsilon_1 l^4 \bar{\rho}}{\pi^4 \underline{EI}} \left( \frac{|\alpha_\omega|}{r_4} + \frac{|\beta_\omega|}{r_5} + \frac{|\gamma_\omega|}{\sqrt{\bar{\rho}} r_3} \right) \int_0^l EI(y) f''^2(y) dy \\
& \quad + \left( \frac{|\gamma_\omega|}{|\gamma_\omega|} + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\alpha_\omega| + \epsilon_2 \bar{I}_w |\gamma_\phi|}{2\sqrt{\bar{\rho}} r_6} + \frac{\epsilon_1 \sqrt{\bar{\rho}} |\gamma_\omega| r_3}{2} + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\beta_\omega| / \sqrt{\bar{I}_w} + \sqrt{\bar{I}_w} |\gamma_\phi| / \sqrt{\bar{\rho}}}{2r_7} \right) \\
& \quad \times \int_0^l \rho(y) g^2(y) dy \\
& \quad + \frac{4l^2}{\pi^2 \underline{GJ}} \left( \frac{(\sqrt{\bar{\rho}} |\alpha_\omega| + \epsilon_2 \bar{I}_w |\gamma_\phi|) r_6}{2\sqrt{\bar{\rho}}} + \frac{\sqrt{\bar{I}_w} (|\alpha_\phi| + \epsilon_2 |\beta_\phi|)}{2r_8} + \frac{\epsilon_1 \bar{\rho} |\alpha_\omega| r_4}{2} + \epsilon_2 \bar{I}_w |\alpha_\phi| \right) \\
& \quad \times \int_0^l GJ(y) h'^2(y) dy \\
& \quad + \left( \frac{|\beta_\phi|}{|\beta_\phi|} + \frac{(\sqrt{\bar{\rho}} |\beta_\omega| / \sqrt{\bar{I}_w} + \sqrt{\bar{I}_w} |\gamma_\phi| / \sqrt{\bar{\rho}}) r_7}{2} + \frac{\sqrt{\bar{I}_w} (|\alpha_\phi| + \epsilon_2 |\beta_\phi|) r_8}{2} + \frac{\epsilon_1 \bar{\rho} |\beta_\omega| r_5}{2\bar{I}_w} \right) \\
& \quad \times \int_0^l I_w(y) z^2(y) dy.
\end{aligned} \tag{8.60}$$

En combinant cette inégalité avec (8.35) et en notant  $X(t) = (f(\cdot, t), g(\cdot, t), h(\cdot, t), z(\cdot, t))$ , l'équation (8.55) donne lieu à la majoration :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}(t) & \leq -k_1 (g(l, t) + \epsilon_1 f(l, t))^2 - k_2 (z(l, t) + \epsilon_2 h(l, t))^2 \\
& \quad - \lambda_1 \int_0^l EI(y) f''^2(y, t) dy + \lambda_2 \int_0^l \rho(y) g^2(y, t) dy - \lambda_3 \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y, t) dy \\
& \quad - \lambda_4 \int_0^l GJ(y) h'^2(y, t) dy + \lambda_5 \int_0^l I_w(y) z^2(y, t) dy - \lambda_6 \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y, t) dy,
\end{aligned} \tag{8.61}$$

où

$$\lambda_1 \triangleq \epsilon_1 \left( 1 - \frac{\sqrt{\bar{\eta}_\omega}}{2r_1} - \frac{8l^4 \bar{\rho}}{\pi^4 \underline{EI}} \left( \frac{|\alpha_\omega|}{r_4} + \frac{|\beta_\omega|}{r_5} + \frac{|\gamma_\omega|}{\sqrt{\bar{\rho}} r_3} \right) \right), \tag{8.62a}$$

$$\lambda_2 \triangleq \frac{|\gamma_\omega|}{|\gamma_\omega|} + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\alpha_\omega| + \epsilon_2 \bar{I}_w |\gamma_\phi|}{2\sqrt{\bar{\rho}} r_6} + \frac{\epsilon_1 \sqrt{\bar{\rho}} |\gamma_\omega| r_3}{2} + \frac{\sqrt{\bar{\rho}} |\beta_\omega| / \sqrt{\bar{I}_w} + \sqrt{\bar{I}_w} |\gamma_\phi| / \sqrt{\bar{\rho}}}{2r_7}, \tag{8.62b}$$

$$\lambda_3 \triangleq 1 - \epsilon_1 \left( \frac{16l^4 \bar{\rho}}{\pi^4 \underline{\eta}_\omega EI} + \frac{\sqrt{\bar{\eta}_\omega} r_1}{2} \right), \tag{8.62c}$$

$$\lambda_4 \triangleq \epsilon_2 \left( 1 - \frac{\sqrt{\bar{\eta}_\phi}}{2r_2} \right) \tag{8.62d}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{4l^2}{\pi^2 \underline{GJ}} \left( \frac{(\sqrt{\bar{\rho}} |\alpha_\omega| + \epsilon_2 \bar{I}_w |\gamma_\phi|) r_6}{2\sqrt{\bar{\rho}}} + \frac{\sqrt{\bar{I}_w} (|\alpha_\phi| + \epsilon_2 |\beta_\phi|)}{2r_8} + \frac{\epsilon_1 \bar{\rho} |\alpha_\omega| r_4}{2} + \epsilon_2 \bar{I}_w |\alpha_\phi| \right), \\
\lambda_5 & \triangleq \overline{|\beta_\phi|} + \frac{(\sqrt{\bar{\rho}} |\beta_\omega| / \sqrt{\bar{I}_w} + \sqrt{\bar{I}_w} |\gamma_\phi| / \sqrt{\bar{\rho}}) r_7}{2} + \frac{\sqrt{\bar{I}_w} (|\alpha_\phi| + \epsilon_2 |\beta_\phi|) r_8}{2} + \frac{\epsilon_1 \bar{\rho} |\beta_\omega| r_5}{2\bar{I}_w}, \quad (8.62e)
\end{aligned}$$

$$\lambda_6 \triangleq 1 - \epsilon_2 \left( \frac{4l^2 \bar{I}_w}{\pi^2 \eta_\phi \underline{GJ}} + \frac{\sqrt{\eta_\phi} r_2}{2} \right). \quad (8.62f)$$

On émet alors l'hypothèse suivante.

**Hypothèse 8.1** *On suppose que les constantes du problème intervenant dans (8.1a-8.1b) sont telles qu'il existe  $r_1, r_2, \dots, r_8 > 0$  avec  $0 < \epsilon_1 < \min(\epsilon_1^*, 1/K_m)$  et  $0 < \epsilon_2 < \min(\epsilon_2^*, 1/K_m)$  tels que  $\lambda_1, \dots, \lambda_6 > 0$ ,  $\pi^4 \eta_\omega \underline{EI} \lambda_3 / (16l^4 \bar{\rho}) - \lambda_2 > 0$  et  $\pi^2 \eta_\phi \underline{GJ} \lambda_6 / (4l^2 \bar{I}_w) - \lambda_5 > 0$ .*

Sous réserve de satisfaction de l'Hypothèse 8.1, on a d'après l'inégalité de Poincaré les deux majoration suivantes :

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_0^l \rho(y) g^2(y, t) dy & \leq \bar{\rho} \int_0^l g^2(y, t) dy \leq \left( \frac{4l^2}{\pi^2} \right)^2 \bar{\rho} \int_0^l g''^2(y, t) dy \\
& \leq \frac{16l^4 \bar{\rho}}{\pi^4 \eta_\omega \underline{EI}} \int_0^l \eta_\omega(y) EI(y) g''^2(y, t) dy, \quad (8.63a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_0^l I_w(y) z^2(y, t) dy & \leq \bar{I}_w \int_0^l z^2(y, t) dy \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \bar{I}_w \int_0^l z'^2(y, t) dy \\
& \leq \frac{4l^2 \bar{I}_w}{\pi^2 \eta_\phi \underline{GJ}} \int_0^l \eta_\phi(y) GJ(y) z'^2(y, t) dy. \quad (8.63b)
\end{aligned}$$

En injectant ces deux inégalités dans (8.61), on obtient :

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}(t) & \leq -k_1(g(l, t) + \epsilon_1 f(l, t))^2 - k_2(z(l, t) + \epsilon_2 h(l, t))^2 \\
& - \lambda_1 \int_0^l EI(y) f''^2(y, t) dy - \lambda_4 \int_0^l GJ(y) h'^2(y, t) dy \\
& - \left( \frac{\pi^4 \eta_\omega \underline{EI} \lambda_3}{16l^4 \bar{\rho}} - \lambda_2 \right) \int_0^l \rho(y) g^2(y, t) dy - \left( \frac{\pi^2 \eta_\phi \underline{GJ} \lambda_6}{4l^2 \bar{I}_w} - \lambda_5 \right) \int_0^l I_w(y) z^2(y, t) dy.
\end{aligned} \quad (8.64)$$

En introduisant alors

$$\mu_m \triangleq 2 \min \left( \lambda_1, \frac{\pi^4 \eta_\omega \underline{EI} \lambda_3}{16l^4 \bar{\rho}} - \lambda_2, \lambda_4, \frac{\pi^2 \eta_\phi \underline{GJ} \lambda_6}{4l^2 \bar{I}_w} - \lambda_5 \right) > 0, \quad (8.65)$$

et en rappelant que  $k_1, k_2 \geq 0$ , on obtient par l'équivalence des normes (8.30) :

$$\forall t \geq 0, \dot{\mathcal{E}}(t) \leq -\frac{\mu_m}{2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^2 \leq -\Lambda \mathcal{E}(t), \quad (8.66)$$

où  $\Lambda \triangleq \mu_m/(1 + \epsilon_m K_m) > 0$  est indépendant de la condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ . Ainsi, puisque  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ , on obtient après intégration de l'inégalité que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{E}(t) \leq \mathcal{E}(0)e^{-\Lambda t}$ . En rappelant que par définition  $\mathcal{E}(t) = \|X(t)\|_{\mathcal{H},2}^2/2$ , on obtient :

$$\forall X_0 \in D(\mathcal{A}), \forall t \geq 0, \|T(t)X_0\|_{\mathcal{H},2} \leq \|X_0\|_{\mathcal{H},2} e^{-\Lambda t/2}. \quad (8.67)$$

Étant donné que  $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$  pour tout  $t \geq 0$  et  $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$ , l'inégalité précédente est valable pour tout  $X_0 \in \mathcal{H}$ . On en déduit donc que  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe de contraction exponentiellement stable relativement au produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$  avec  $\|T(t)\|_{\mathcal{H},2} \leq e^{-\Lambda t/2}$  pour tout  $t \geq 0$ . En invoquant une nouvelle fois l'équivalence des normes (8.30), on obtient que  $\|T(t)\|_{\mathcal{H},1} \leq K_E e^{-\Lambda t/2}$  pour tout  $t \geq 0$  avec  $K_E = \sqrt{(1 + K_m \epsilon_m)/(1 - K_m \epsilon_m)}$ . En particulier, le taux de croissance  $\omega_0(T)$  de  $T(t)$  est tel que  $\omega_0(T) \leq -\Lambda/2 < 0$ . Ces résultats sont résumés dans le prochain théorème.

**Théorème 8.11** *Sous l'Hypothèse 8.1,  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe exponentiellement stable relativement à  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},1}$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{H},2}$ .*

### 8.3.2 Analyse de la stabilité pour des entrées de perturbation bornées

Soit  $X(t) = T(t)X_0 = (f(\cdot, t), g(\cdot, t), h(\cdot, t), z(\cdot, t))$  la solution du problème de contrôle à la frontière (8.16) associée à la condition initiale  $X_0 \in D(\mathcal{A}_d)$ . Sous réserve de l'hypothèse 8.1, on obtient de (8.53) que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1} &\leq K_E \|X_0 - BU(0)\|_{\mathcal{H},1} e^{-\Lambda t/2} + \|B\| \|U(t)\|_2 \\ &\quad + K_E \|\mathcal{A}_d B\| \int_0^t e^{-\Lambda(t-s)/2} \|U(s)\|_2 ds + K_E \|B\| \int_0^t e^{-\Lambda(t-s)/2} \|\dot{U}(s)\|_2 ds. \end{aligned} \quad (8.68)$$

#### 8.3.2.1 Perturbations bornées

Supposons que  $U$  et  $\dot{U}$  sont bornées. On obtient alors que :

$$\begin{aligned} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1} &\leq K_E \|X_0 - BU(0)\|_{\mathcal{H},1} e^{-\Lambda t/2} + \left( \|B\| + \frac{2K_E}{\Lambda} \|\mathcal{A}_d B\| \right) \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|U(s)\|_2 \\ &\quad + \frac{2K_E}{\Lambda} \|B\| \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|\dot{U}(s)\|_2. \end{aligned} \quad (8.69)$$

Ainsi, l'énergie du système  $E(t) = \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^2 / 2$  est bornée et, lorsque  $t$  tend vers l'infini, on a :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1} \leq \left( \|B\| + \frac{2K_E}{\Lambda} \|\mathcal{A}_d B\| \right) \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|U(s)\|_2 + \frac{2K_E}{\Lambda} \|B\| \sup_{s \in \mathbb{R}_+} \|\dot{U}(s)\|_2. \quad (8.70)$$

En particulier, on observe que la contribution de la condition initiale décroît de manière exponentielle. En utilisant les inégalités d'Agmon et de Poincaré, on obtient :

$$\|f(\cdot, t)\|_{\infty}^4 \leq \frac{256l^6}{\pi^6} \|f''(\cdot, t)\|_{L^2(0,l)}^4 \leq \frac{256l^6}{\pi^6 \underline{EI}^2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^4, \quad (8.71a)$$

$$\|f'(\cdot, t)\|_{\infty}^4 \leq \frac{16l^2}{\pi^2} \|f''(\cdot, t)\|_{L^2(0,l)}^4 \leq \frac{16l^2}{\pi^2 \underline{EI}^2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^4, \quad (8.71b)$$

$$\|h(\cdot, t)\|_{\infty}^4 \leq \frac{16l^2}{\pi^2} \|h'(\cdot, t)\|_{L^2(0,l)}^4 \leq \frac{16l^2}{\pi^2 \underline{GJ}^2} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1}^4. \quad (8.71c)$$

En l'absence de perturbations ( $U = 0$ ), on obtient donc la convergence exponentielle et uniforme le long de l'aile vers zéro des déplacements en flexion  $\omega = f$  et  $\omega_y = f'$ , et en torsion  $\phi = h$ . En présence d'une perturbation bornée, les déplacements flexibles sont bornés de manière uniforme le long de l'aile et l'on a :

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|f(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \frac{4l^{3/2}}{\pi^{3/2} \underline{EI}^{1/2}} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1} < +\infty, \quad (8.72a)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|f'(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \frac{2l^{1/2}}{\pi^{1/2} \underline{EI}^{1/2}} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1} < +\infty, \quad (8.72b)$$

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \|h(\cdot, t)\|_{\infty} \leq \frac{2l^{1/2}}{\pi^{1/2} \underline{GJ}^{1/2}} \limsup_{t \rightarrow +\infty} \|X(t)\|_{\mathcal{H},1} < +\infty. \quad (8.72c)$$

Les majorations ainsi obtenues portant sur l'énergie du système ainsi que les déplacements flexibles sont fonction de  $\|B\|$  et  $\|\mathcal{A}_d B\|$  respectivement donnés par (8.48) and (8.51). On retrouve alors le fait qu'un accroissement de la rigidité de l'aile a pour conséquence de réduire l'impact des perturbations sur le comportement du système bouclé.

### 8.3.2.2 Perturbations convergeant vers zéro

Supposons que les perturbations sont telles que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|U(t)\|_2 = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|\dot{U}(t)\|_2 = 0. \quad (8.73)$$



Alors,  $\|X(t)\|_{\mathcal{H},1}$  converge vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Pour le démontrer, il suffit d'établir que les deux intégrales intervenant dans (8.68) convergent vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . Pour cela, fixons un  $\epsilon > 0$  arbitraire. De par (8.73), il existe  $T \geq 0$  tel que pour tout  $t \geq T$ ,  $\|U(t)\|_2 \leq \Lambda\epsilon/2$ . En fixant la valeur d'un tel  $T \geq 0$ , on a pour tout  $t \geq T$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^t e^{-\Lambda(t-s)/2} \|U(s)\|_2 ds &= e^{-\Lambda t/2} \int_0^T e^{\Lambda s/2} \|U(s)\|_2 ds + \int_T^t e^{-\Lambda(t-s)/2} \|U(s)\|_2 ds \\ &\leq e^{-\Lambda t/2} \int_0^T e^{\Lambda s/2} \|U(s)\|_2 ds + \epsilon, \end{aligned} \quad (8.74)$$

dont on déduit que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\Lambda(t-s)/2} \|U(s)\|_2 ds \leq \epsilon. \quad (8.75)$$

Cette inégalité étant vérifiée pour tout  $\epsilon > 0$ , la positivité de l'intégrale implique alors que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_0^t e^{-\Lambda(t-s)/2} \|U(s)\|_2 ds = 0. \quad (8.76)$$

Le même argument montre que la seconde intégrale de (8.68) converge également vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ . On a donc montré que  $\|X(t)\|_{\mathcal{H},1} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} 0$ . On déduit donc de cette que :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|f(\cdot, t)\|_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|f'(\cdot, t)\|_\infty = \lim_{t \rightarrow +\infty} \|h(\cdot, t)\|_\infty = 0. \quad (8.77)$$

En d'autres termes, les déplacements en flexion  $\omega = f$  et  $\omega_y = f'$ , et en torsion  $\phi = h$ , convergent uniformément le long de l'aile vers zéro lorsque  $t \rightarrow +\infty$ .

#### 8.4 Résultats de simulation

Le comportement du système bouclé est évalué en simulation (cf. Annexe E pour les détails sur la discrétisation du modèle). La condition initiale est sélectionnée comme étant  $\omega_0(y) = y^2(y - 3l)/(40l^2)$ ,  $\omega_{t0}(y) = 0$ ,  $\phi_0(y) = 2\pi y^2/(45l^2)$  et  $\phi_{t0}(y) = 0$ . Les résultats sont illustrés à la Fig. 8.1. En fixant les gains du contrôleur à  $k_1 = 10$  et  $k_2 = 4$ , le comportement du système bouclé est illustré à la Fig. 8.2 pour une perturbation en entrée sélectionnée comme suit :

$$u_1(t) = 3 \cos(0.2\pi t) \sin(\pi t) \cos(3\pi t), \quad (8.78a)$$

$$u_2(t) = \sin(0.2\pi t) \cos(\pi t) \sin(3\pi t). \quad (8.78b)$$

On observe une rapide atténuation des déplacements flexibles même en présence de perturbations en entrée. Finalement, les déplacements flexibles à l'extrémité de l'aile du système

bouclé sont donnés à la Fig. 8.3(a) tandis que l'effort de commande est illustré à la Fig. 8.3(b).

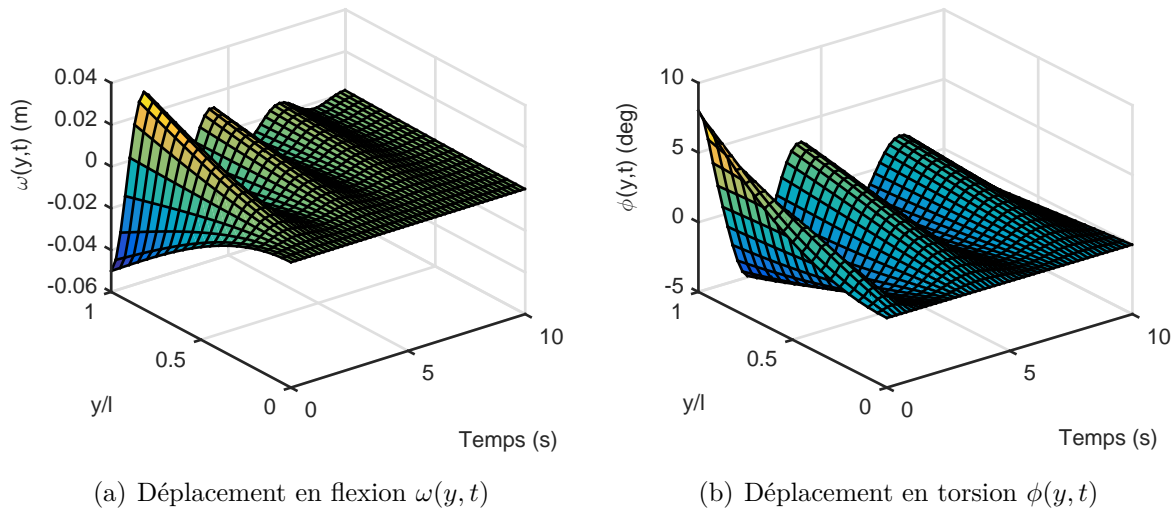


Figure 8.1 Réponse du système en boucle ouverte

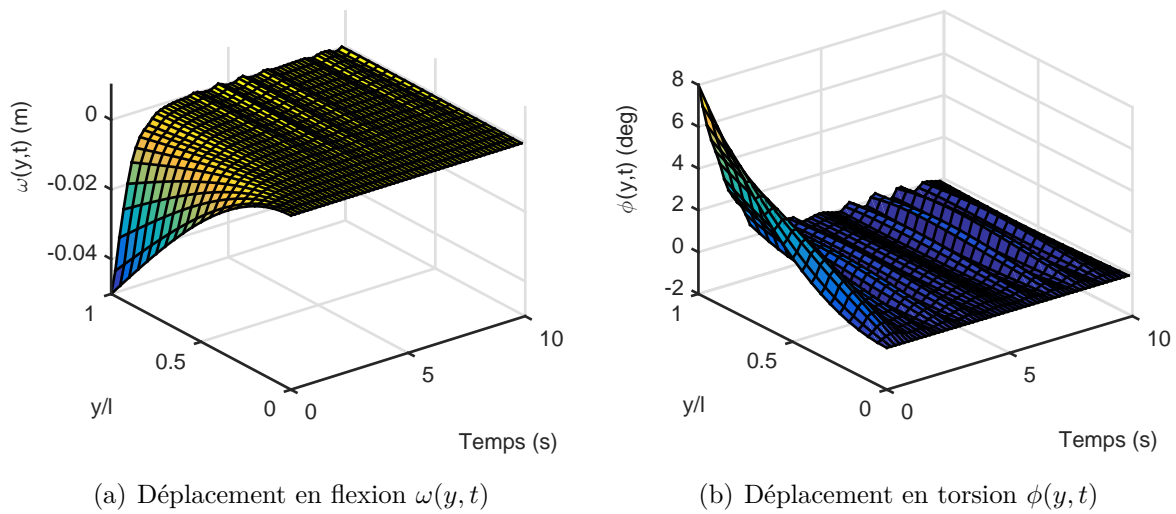


Figure 8.2 Réponse du système en boucle fermée

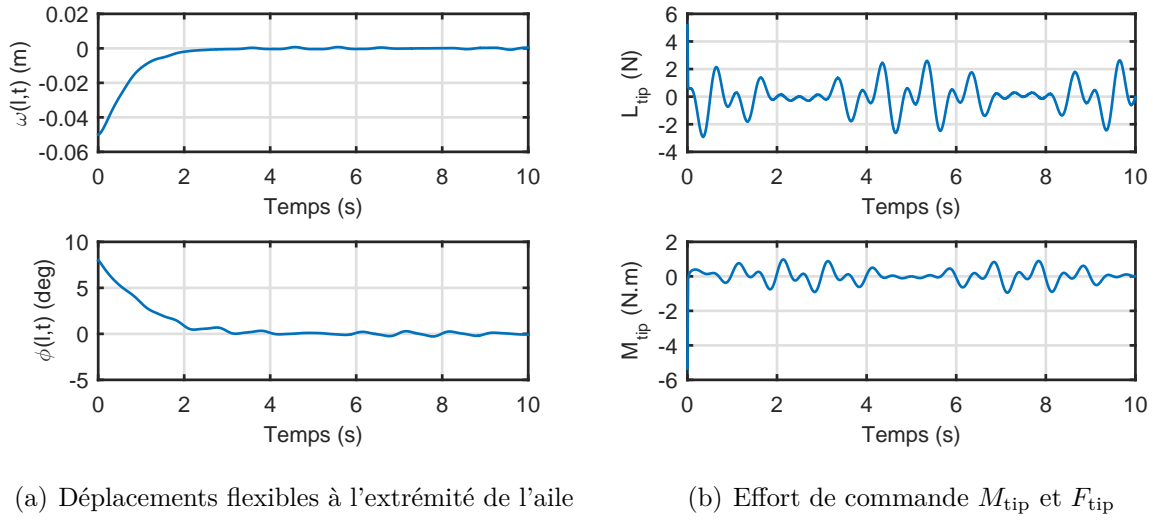


Figure 8.3 Comportement du système bouclé à l'extrémité de l'aile et effort de commande associé

En conclusion, on a donc démontré pour l'aile non homogène l'existence et l'unicité des trajectoires du système en boucle fermée en la présence de perturbations en entrée de commande suffisamment régulières. Sous réserve de l'Hypothèse 8.1, il a été montré qu'en la présence de perturbations bornées (en amplitude et en vitesse), l'énergie du système ainsi que les déplacements en flexion et en torsion demeurent bornés.

## CHAPITRE 9 CONCLUSION

### 9.1 Contributions des travaux de recherche

Cette thèse s'inscrivait dans le cadre général de la commande des systèmes aérospatiaux. Cette thématique générale s'est scindée en deux parties. La première partie constituée des Chapitres 3 à 5 portait sur la commande des systèmes non linéaires par la méthode du séquençement des gains (*gain-scheduling*). La seconde partie traitée dans les Chapitres 6 à 8 a quant à elle abordé le problème de la commande des ailes d'avions flexibles modélisées par des systèmes à paramètres distribués.

La première partie portant sur la méthode du séquençement des gains s'est plus spécifiquement attachée à étudier le problème des termes de couplage cachés (TCC). Après avoir détaillé la problématique ainsi que les limitations des solutions existantes pour la traiter dans le Chapitre 3, les solutions alternatives proposées dans le cadre de cette thèse ont été présentées dans les Chapitres 4 et 5. Ces deux chapitres correspondent à deux approches distinctes pour traiter le problème des TCC.

Dans le Chapitre 4, l'approche adoptée réside dans l'intégration explicite de la contribution des TCC dans la phase de synthèse grâce à des méthodes d'autoséquençement des gains. En effet, il a été montré qu'un choix *a priori* des formules de séquençement des gains permet de calculer de manière explicite les TCC et de les intégrer dans le processus de synthèse. Au-delà du développement de cette idée générale, sa mise en œuvre a été effectuée via trois méthodes de synthèse distinctes. La première tire profit de la synthèse  $H_\infty$  structurée dont les capacités multimodèle permettent la synthèse directe de contrôleurs autoséquencés. La seconde, offrant une mise en application plus simple, repose sur le placement de structure propre. Finalement, une approche itérative générique pouvant être couplée à une méthode de synthèse LTI quelconque a été développée. Ces différentes approches ont été appliquées pour la commande en tangage d'un missile et le contrôle des déplacements flexibles du BACT, une section d'aile à deux degrés de liberté présentant le premier mode des déplacements en flexion et en torsion. L'ensemble des résultats numériques obtenus viennent confirmer les bénéfices de l'incorporation explicite des TCC dans le processus de synthèse.

*A contrario*, le Chapitre 5 a investigué la problématique de gestion des TCC, non pas dans la phase de synthèse des gains du contrôleur séquencé, mais dans la phase d'implémentation de la famille de contrôleurs LTI. L'objectif était de proposer une solution générique d'implémentation de contrôleurs séquencés visant à éviter l'apparition des TCC. L'avantage

d'une telle implémentation est que la famille de contrôleurs LTI peut dès lors être obtenue par n'importe quelle méthode de synthèse existante, sans se soucier de la contribution des TCC dans la phase de synthèse. Bien qu'une solution de ce type existe dans la littérature, à savoir la *velocity-based implementation*, elle nécessite de disposer de la dérivée temporelle de la mesure du système, limitant fortement sa mise en œuvre pratique. La solution qui a été proposée dans cette thèse permet de lever cette limitation. En outre, des analyses théoriques ont permis de confirmer sa validité en assurant que l'implémentation permet de préserver le comportement entrée-sortie des contrôleurs locaux tout en préservant leurs propriétés de stabilité interne du point de vue des modes non commandables et non observables. L'application de cette stratégie d'implémentation sur le missile et le BACT est venu confirmer, autant pour un simple retour de sortie statique qu'un contrôleur dynamique, la pertinence de l'approche proposée.

La seconde partie a abordé le problème de la commande des ailes d'avions flexibles modélisées par des systèmes à paramètres distribués. Le modèle employé était composé de deux EDP couplées décrivant les déplacements en flexion et en torsion de l'aile sous l'effet d'efforts aérodynamiques quasi-stationnaires. Il en résulte le système à paramètres distribués introduit dans le Chapitre 6. Les études reportées dans la littérature sur un tel modèle font en général un certain nombre d'hypothèses portant sur l'existence et la régularité des trajectoires du système. De telles hypothèses se motivent sur la base d'intuitions physiques mais représentent d'un point de vue mathématiques des hypothèses *had hoc* sans fondement rigoureux. En particulier, elles balayent la question fondamentale de la *well-posedness* du système. L'un des objectifs de cette thèse était d'éviter le recours à de telles hypothèses en traitant le problème dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes dont les résultats fondamentaux ont été rappelés dans le Chapitre 6.

La cas de l'aile homogène a été traité dans le Chapitre 7. La loi de commande proposée consiste en un retour de sortie se basant sur la position, la vitesse et l'accélération des déplacements en flexion et en torsion à l'extrémité de l'aile. Le système en boucle fermée ainsi obtenu a été analysé. Dans un premier temps, l'existence et l'unicité des trajectoires du système ont été prouvées à travers le concept de *well-posedness* en démontrant que l'opérateur sous-jacent est le générateur d'un  $C_0$ -semi-groupe. Fort de ce résultat, l'analyse de la stabilité du système a été effectuée dans le cadre des méthodes des multiplicateurs d'énergie à travers le recours à une fonction de Lyapunov. Il s'en dégage un ensemble de contraintes, analogues à celles reportées dans la littérature sur des problèmes de commande similaires, sous lesquelles la stabilité exponentielle de l'énergie du système bouclé est garantie. Il fut dès lors possible de démontrer la stabilité exponentielle uniforme le long de l'aile des déplacements flexibles en flexion et en torsion. Des simulations numériques sont venues confirmer la validité de la

stratégie de commande.

Cette étude a finalement été étendue dans le Chapitre 8 au cas de l'aile non homogène en présence de perturbations en entrée de commande. La présence de perturbations a conduit à considérer une reformulation du problème sous la forme d'un problème de contrôle à la frontière sous forme abstraite. Après avoir démontré de manière analogue au cas de l'aile homogène la *well-posedness* du système bouclé en l'absence de perturbation, l'existence et l'unicité des trajectoires du système perturbé a pu être établie. S'en est suivi une analyse de la stabilité du système bouclé ayant montré que les déplacements flexibles demeurent uniformément bornés le long de l'aile en présence de perturbations bornées.

## 9.2 Perspectives

Les approches développées dans cette thèse sur la problématique de gestion des TCC permettent de venir compléter l'éventail des solutions disponibles dans la littérature. Un des atouts majeurs des solutions proposées dans cette thèse est qu'elles sont applicables pour des contrôleurs à architecture fixe, les rendant pertinentes dans le cadre de l'industrie aérospatiale et ouvrant la perspective de leur mise en œuvre pratique. Notons que les résultats obtenus l'ont été pour des fonctions de séquençement qui sont différentiables. Or, la majorité des contrôleurs séquencés employés à l'heure actuelle repose sur une interpolation linéaire par morceaux de tables (communément appelées *look-up tables*). Il en résulte l'existence de points de fonctionnement pour lesquels les gains séquencés ne sont pas différentiables. Les TCC faisant intervenir de manière intrinsèque les dérivées partielles des gains séquencés, cela est à même d'introduire un certain nombre de difficultés théoriques qui devront être étudiées. De plus, les aspects traités dans cette thèse ont porté exclusivement sur l'intégration de l'impact des TCC dans le processus de synthèse. Les aspects de validation portant sur la stabilité et les performances à travers le domaine d'opération restent à investiguer.

Au détour de la problématique des TCC s'est posé la question de la généralisation de la première méthode de Lyapunov au cas de champs de vecteurs non continûment différentiables. Les premiers résultats ont été obtenus dans le cadre de champs de vecteurs admettant des dérivées directionnelles comme reportés dans l'Annexe B. L'approfondissement de ces résultats ainsi que leur extension à des hypothèses affaiblies est une des pistes de travail possibles.

Pour ce qui est du second thème abordé dans cette thèse portant sur la commande d'ailes d'avions flexibles modélisées par des systèmes distribués, il reste beaucoup à faire. Les travaux reportés dans la littérature pour la commande de tels systèmes en est à ses balbutiements et de nombreux progrès restent à effectuer. Parmi les axes potentiels mentionnons le recours à un

modèle dont le couplage entre les dynamiques en flexion et en torsion est accru, l'inclusion de la dynamique des actionneurs, le couplage avec la dynamique de l'avion, l'inclusion de phénomènes aérodynamiques instationnaires modélisés en dimension finie et le couplage avec des EDP décrivant l'écoulement du flux d'air le long de l'aile.

## RÉFÉRENCES

- L. K. Abbas, Q. Chen, P. Marzocca, et A. Milanese, “Non-linear aeroelastic investigations of store(s)-induced limit cycle oscillations”, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part G : Journal of Aerospace Engineering*, vol. 222, no. 1, pp. 63–80, 2008.
- D. H. Allen, *Introduction to the Mechanics of Deformable Solids : Bars and Beams*. Springer, 2012.
- J. D. Anderson, *Fundamentals of aerodynamics*. New York : McGraw-Hill, 2011.
- Y. Aoustin, M. Fliess, H. Mounier, P. Rouchon, et J. Rudolph, “Theory and practice in the motion planning and control of a flexible robot arm using mikusiński operators”, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 30, no. 20, pp. 267–273, 1997.
- P. Apkarian, D. Noll, et A. Rondepierre, “Mixed  $H_2/H_\infty$  control via nonsmooth optimization”, dans *Joint 48th IEEE Conference on Decision and Control and 28th Chinese Control Conference*, vol. 47, 2009, Conference Proceedings, pp. 6460–6465.
- P. Apkarian et D. Noll, “IQC analysis and synthesis via nonsmooth optimization”, *Systems & Control Letters*, vol. 55, no. 12, pp. 971–981, 2006.
- , “Nonsmooth optimization for multiband frequency domain control design”, *Automatica*, vol. 43, no. 4, pp. 724–731, 2007.
- P. Apkarian, D. Noll, et H. Duong Tuan, “Fixed-order  $H_\infty$  control design via a partially augmented lagrangian method”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 13, no. 12, pp. 1137–1148, 2003.
- A. Bacciotti et L. Rosier, *Liapunov Functions and Stability in Control Theory*. Springer Science & Business Media, 2006.
- J. Backas, R. Ghabcheloo, et K. Huhtala, “Gain scheduled state feedback velocity control of hydrostatic drive transmissions”, *Control Engineering Practice*, vol. 58, pp. 214–224, 2017.
- J. Baker et P. D. Christofides, “Finite-dimensional approximation and control of non-linear parabolic PDE systems”, *International Journal of Control*, vol. 73, no. 5, pp. 439–456, 2000.
- M. J. Balas, “Active control of flexible systems”, *Journal of Optimization theory and Applications*, vol. 25, no. 3, pp. 415–436, 1978.



- J. M. Barker, G. J. Balas, et P. A. Blue, "Gain-scheduled linear fractional control for active flutter suppression", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 22, no. 4, pp. 507–512, 1999.
- J. M. Barker et G. J. Balas, "Comparing linear parameter-varying gain-scheduled control techniques for active flutter suppression", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp. 948–955, 2000.
- A. Behal, P. Marzocca, V. M. Rao, et A. Gnann, "Nonlinear adaptive control of an aeroelastic two-dimensional lifting surface", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 29, no. 2, pp. 382–390, 2006.
- A. Behal, V. M. Rao, P. Marzocca, et M. Kamaludeen, "Adaptive control for a nonlinear wing section with multiple flaps", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 29, no. 3, pp. 744–749, 2006.
- R. M. Bennett, R. C. Scott, et C. D. Wieseman, "Computational test cases for the benchmark active controls model", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp. 922–929, 2000.
- R. M. Bennett, C. V. Eckstrom, J. A. Rivera Jr, B. E. Dansberry, M. G. Farmer, et M. H. Durham, "The benchmark aeroelastic models program : Description and highlights of initial results", NASA TM-104180,, Report, 1992.
- A. Bensoussan, G. Da Prato, M. C. Delfour, et S. K. Mitter, *Representation and control of infinite dimensional systems*. Birkhäuser Boston, 1993, vol. 1.
- R. E. Benton et D. Smith, "Static output feedback stabilization with prescribed degree of stability", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 43, no. 10, pp. 1493–1496, 1998.
- J. Beranek, N. Nicolai, M. Buonanno, E. Burnett, C. Atkinson, et B. Holm-Hansen, "Conceptual design of a multi-utility aeroelastic demonstrator", p. 9350, 2010.
- D. Berggren, Kth, Flygteknik, et I. Tidigare, "Investigation of limit cycle oscillations for a wing section with nonlinear stiffness", *Aerospace Science and Technology*, vol. 8, no. 1, pp. 27–34, 2004.
- J. J. Bertin et R. M. Cummings, *Aerodynamics for engineers*. Upper Saddle River, N.J : Pearson Prentice Hall, 2009.

N. Bhoir et S. N. Singh, “Control of unsteady aeroelastic system via state-dependent riccati equation method”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 28, no. 1, pp. 78–84, 2005.

——, “Output feedback modular adaptive control of a nonlinear prototypical wing section”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 37, no. 4, pp. 357–373, 2004.

——, “Output feedback nonlinear control of an aeroelastic system with unsteady aerodynamics”, *Aerospace Science and Technology*, vol. 8, no. 3, pp. 195–205, 2004.

B. Bialy, *Lyapunov-based control of limit cycle oscillations in uncertain aircraft systems*. University of Florida, 2014.

B. J. Bialy, I. Chakraborty, S. C. Cekic, et W. E. Dixon, “Adaptive boundary control of store induced oscillations in a flexible aircraft wing”, *Automatica*, vol. 70, pp. 230–238, 2016.

J.-M. Biannic et P. Apkarian, “Missile autopilot design via a modified LPV synthesis technique”, *Aerospace Science and Technology*, vol. 3, no. 3, pp. 153–160, 1999.

J. J. Block et T. W. Strganac, “Applied active control for a nonlinear aeroelastic structure”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 21, no. 6, pp. 838–845, 1998.

V. Blondel, M. Gevers, et A. Lindquist, “Survey on the state of systems and control”, *European Journal of Control*, vol. 1, no. 1, pp. pp. 5–23, 1995.

J. Bontsema et R. F. Curtain, “A note on spillover and robustness for flexible systems”, *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 33, no. 6, pp. 567–569, 1988.

M. Braun et M. Golubitsky, *Differential Equations and their Applications*. Springer, 1983, vol. 4.

S. Brenner et R. Scott, *The mathematical theory of finite element methods*. Springer Science & Business Media, 2007, vol. 15.

H. Brezis, *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2010.

R. W. Bunton et C. M. Denegri, “Limit cycle oscillation characteristics of fighter aircraft”, *Journal of Aircraft*, vol. 37, no. 5, pp. 916–918, 2000.

- J. V. Burke et M. L. Overton, “Differential properties of the spectral abscissa and the spectral radius for analytic matrix-valued mappings”, *Nonlinear Analysis : Theory, Methods & Applications*, vol. 23, no. 4, pp. 467–488, 1994.
- J. V. Burke, D. Henrion, A. S. Lewis, et M. L. Overton, “HIFOO-A MATLAB package for fixed-order controller design and  $H_\infty$  optimization”, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 39, no. 9, pp. 339–344, 2006.
- Y.-Y. Cao et Y.-X. Sun, “Static output feedback simultaneous stabilization : Ilmi approach”, *International journal of control*, vol. 70, no. 5, pp. 803–814, 1998.
- M. Cassaro, M. Battipede, P. Marzocca, et A. Behal, “Comparison of adaptive control architectures for flutter suppression”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, pp. 1–9, 2014.
- R. E. Castillo et H. Rafeiro, *An introductory course in Lebesgue spaces*. Springer, 2016.
- P. C. Chen, D. Sarhaddi, et D. D. Liu, “Limit cycle oscillation studies of a fighter with external stores”, *AIAA paper*, vol. 1727, 1998.
- O. Christensen, *An introduction to frames and Riesz bases*. Springer, 2003, vol. 7.
- P. D. Christofides et P. Daoutidis, “Finite-dimensional control of parabolic PDE systems using approximate inertial manifolds”, dans *Decision and Control, 1997., Proceedings of the 36th IEEE Conference on*, vol. 2. IEEE, 1997, Conference Proceedings, pp. 1068–1073.
- P. G. Ciarlet, *The finite element method for elliptic problems*. SIAM, 2002.
- F. Clarke, *Functional analysis, calculus of variations and optimal control*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 264.
- F. H. Clarke, Y. S. Ledyaev, R. J. Stern, et P. R. Wolenski, *Nonsmooth analysis and control theory*. Springer Science & Business Media, 2008, vol. 178.
- R. F. Curtain et H. Zwart, *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 21.
- K. S. Dawson et D. L. Maxwell, “Limit-cycle oscillation flight-test results for asymmetric store configurations”, *Journal of Aircraft*, vol. 42, no. 6, p. 1589, 2005.

- M. S. De Queiroz et C. D. Rahn, “Boundary control of vibration and noise in distributed parameter systems : an overview”, *Mechanical Systems and Signal Processing*, vol. 16, no. 1, pp. 19–38, 2002.
- M. S. De Queiroz, D. M. Dawson, S. P. Nagarkatti, et F. Zhang, *Lyapunov-based control of mechanical systems*. Springer Science & Business Media, 2012.
- C. M. Denegri, “Limit cycle oscillation flight test results of a fighter with external stores”, *Journal of Aircraft*, vol. 37, no. 5, pp. 761–769, 2000.
- F. Di Meglio, R. Vazquez, et M. Krstic, “Stabilization of a system of  $n+1$  coupled first-order hyperbolic linear PDEs with a single boundary input”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 58, no. 12, pp. 3097–3111, 2013.
- R. C. do Valle, L. L. Menegaldo, et A. M. Simões, “Smoothly gain-scheduled control of a tri-turbofan airship”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2014.
- C. Döll, Y. Le Gorrec, G. Ferreres, et J. Magni, “A robust self-scheduled missile autopilot : design by multi-model eigenstructure assignment”, *Control Engineering Practice*, vol. 9, no. 10, pp. 1067–1078, 2001.
- J. Dong et G.-H. Yang, “Robust static output feedback control synthesis for linear continuous systems with polytopic uncertainties”, *Automatica*, vol. 49, no. 6, pp. 1821–1829, 2013.
- R. C. Dorf et R. H. Bishop, *Modern control systems (12th edition)*. Prentice Hall, 2010.
- R. C. Dorf, *Modern Control Systems*. Addison-Wesley Longman Publishing Co., Inc., 1995.
- E. H. Dowell, *A Modern Course in Aeroelasticity*. Dordrecht : Kluwer Academic Publishers, 2005, vol. 116.
- E. H. Dowell, J. P. Thomas, et K. C. Hall, “Transonic limit cycle oscillation analysis using reduced order aerodynamic models”, *Journal of Fluids and Structures*, vol. 19, no. 1, pp. 17–27, 2004.
- E. H. Dowell, J. P. Thomas, K. C. Hall, et C. M. Denegri, “Theoretical predictions of F-16 fighter limit cycle oscillations for flight flutter testing”, *Journal of Aircraft*, vol. 46, no. 5, pp. 1667–1672, 2009.

- J. Doyle, “Analysis of feedback systems with structured uncertainties”, dans *IEE Proceedings, Part D*, vol. 129. IET, 1982, Conference Proceedings, pp. 242–250.
- J. C. Doyle, K. Glover, P. Khargonekar, et B. A. Francis, “State-space solutions to standard  $H_2$  and  $H_\infty$  control problems”, *IEEE Transactions on Automatic control*, vol. 34, no. 8, pp. 831–847, 1989.
- Y. Ebihara, K. Tokuyama, et T. Hagiwara, “Structured controller synthesis using lmi and alternating projection method”, *International Journal of Control*, vol. 77, no. 12, pp. 1137–1147, 2004.
- M. R. Elhami et M. F. Narab, “Comparison of SDRE and SMC control approaches for flutter suppression in a nonlinear wing section”, pp. 6148–6153, 2012.
- L. C. Evans, “Partial differential equations and monge-kantorovich mass transfer”, *Current developments in mathematics*, vol. 1997, no. 1, pp. 65–126, 1997.
- S. A. Fazelzadeh, A. Mazidi, et H. Kalantari, “Bending-torsional flutter of wings with an attached mass subjected to a follower force”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 323, no. 1, pp. 148–162, 2009.
- B. Friedland, *Control system design : an introduction to state-space methods*. Courier Corporation, 2012.
- P. P. Friedmann, D. Guillot, et E. Presente, “Adaptive control of aeroelastic instabilities in transonic flow and its scaling”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 20, no. 6, pp. 1190–1199, 1997.
- P. Gahinet et A. P, “A linear matrix inequality approach to  $H_\infty$  control”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 4, no. 4, pp. 421–448, 1994.
- P. Gahinet et P. Apkarian, “Decentralized and fixed-structure  $H_\infty$  control in matlab”, dans *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*. IEEE, 2011, pp. 8205–8210.
- D. R. Gaukroger, E. W. C. Chapple, et A. Milln, “Wind-tunnel tests on the symmetric and antisymmetric flutter of swept-back wings”, Aeronautical Research Council, Report, 1950.
- T. T. Georgiou, “On the computation of the gap metric”, *Systems & Control Letters*, vol. 11, no. 4, pp. 253–257, 1988.

- M. G. Goman et M. N. Demenkov, “Computation of controllability regions for unstable aircraft dynamics”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 27, no. 4, pp. 647–656, 2004.
- S. Gujjula, S. N. Singh, et W. Yim, “Limit cycles and domain of stability in unsteady aeroelastic system”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 27, no. 4, pp. 728–732, 2004.
- Ü. Gülçat, *Fundamentals of Modern Unsteady Aerodynamics*. Springer, 2010.
- J. Hadamard, “Sur les problèmes aux dérivées partielles et leur signification physique”, *Princeton university bulletin*, pp. 49–52, 1902.
- W. M. Haddad et V. Chellaboina, *Nonlinear Dynamical Systems and Control : a Lyapunov-Based Approach*. Princeton University Press, 2008.
- G. Hagen et I. Mezic, “Control spillover in dissipative evolution equations”, dans *American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000*, vol. 6. IEEE, 2000, Conference Proceedings, pp. 3783–3787.
- G. H. Hardy, J. E. Littlewood, et G. Pólya, *Inequalities*. Cambridge university press, 1952.
- W. He et S. Zhang, “Control design for nonlinear flexible wings of a robotic aircraft”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 25, no. 1, pp. 351–357, 2017.
- J. Henikl, W. Kemmetmüller, T. Meurer, et A. Kugi, “Infinite-dimensional decentralized damping control of large-scale manipulators with hydraulic actuation”, *automatica*, vol. 63, pp. 101–115, 2016.
- D. H. Hodges et G. A. Pierce, *Introduction to Structural Dynamics and Aeroelasticity*. Cambridge University Press, 2011, vol. 15.
- R. P. Ignatov et D. A. Lawrence, “Gain scheduling via control signal interpolation : the ball and beam example”, dans *System Theory, 2001. Proceedings of the 33rd Southeastern Symposium on*. IEEE, 2001, pp. 419–423.
- P. A. Ioannou et J. Sun, *Robust Adaptive Control*. Courier Dover Publications, 2012.
- S. B. Jacobson, R. T. Britt, D. R. Dreim, et P. D. Kelly, “Residual pitch oscillation (rpo) flight test and analysis on the B-2 bomber”, *AIAA paper*, no. 98-1805, 1998.

- C. Jones, M. Lowenberg, et T. Richardson, "Tailored dynamic gain-scheduled control", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 29, no. 6, pp. 1271–1281, 2006.
- I. Kaminer, A. M. Pascoal, P. P. Khargonekar, et E. E. Coleman, "A velocity algorithm for the implementation of gain-scheduled controllers", *Automatica*, vol. 31, no. 8, pp. 1185–1191, 1995.
- I. Karafyllis et Z.-P. Jiang, *Stability and Stabilization of Nonlinear Systems*. Springer Science & Business Media, 2011.
- T. Kato, *Perturbation theory for linear operators*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 132.
- A. G. Kelkar et S. M. Joshi, "Passivity-based robust control with application to benchmark active controls technology wing", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp. 938–947, 2000.
- H. K. Khalil, *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, New Jersey, 1996.
- H. K. Khalil et J. W. Grizzle, *Nonlinear Systems*. Prentice hall Upper Saddle River, 2002, vol. 3.
- V. Kharitonov, "Distribution of the roots of the characteristic polynomial of an autonomous system", *Automation and Remote Control*, vol. 42, no. 5, pp. pp. 589–593, 1981.
- S.-J. Kim, Y.-H. Moon, et S. Kwon, "Solving rank-constrained lmi problems with application to reduced-order output feedback stabilization", *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 52, no. 9, pp. 1737–1741, 2007.
- J. Ko, A. J. Kurdila, et T. W. Strganac, "Nonlinear control of a prototypical wing section with torsional nonlinearity", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 20, no. 6, pp. 1181–1189, 1997.
- J. W. Ko, T. W. Strganac, et A. J. Kurdila, "Stability and control of a structurally nonlinear aeroelastic system", *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 21, no. 5, pp. 718–725, 1998.
- J. Ko, T. W. Strganac, et A. J. Kurdila, "Adaptive feedback linearization for the control of a typical wing section with structural nonlinearity", *Nonlinear Dynamics*, vol. 18, no. 3, pp. 289–301, 1999.

- P. Kokotović, H. K. Khalil, et J. O'reilly, *Singular perturbation methods in control : analysis and design*. SIAM, 1999.
- V. Kolmanovskii et A. Myshkis, *Introduction to the Theory and Applications of Functional Differential Equations*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 463.
- M. Krstic et A. Smyshlyaev, *Boundary control of PDEs : A course on backstepping designs*. Siam, 2008, vol. 16.
- I. Lasiecka et R. Triggiani, *Control theory for partial differential equations : Volume 1, Abstract parabolic systems : Continuous and approximation theories*. Cambridge University Press, 2000, vol. 1.
- A. Lasota et A. Strauss, "Asymptotic behavior for differential equations which cannot be locally linearized", *Journal of Differential Equations*, vol. 10, no. 1, pp. 152–172, 1971.
- D. Lawrence, W. J. Rugh *et al.*, "On a stability theorem for nonlinear systems with slowly varying inputs", *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 35, no. 7, pp. 860–864, 1990.
- D. A. Lawrence, "Analysis and design of gain scheduled sampled-data control systems", *Automatica*, vol. 37, no. 7, pp. 1041–1048, 2001.
- , "Gain scheduled controllers with guaranteed linearization properties", dans *American Control Conference, 2001. Proceedings of the 2001*, vol. 5. IEEE, 2001, pp. 4128–4133.
- D. A. Lawrence et W. J. Rugh, "Gain scheduling dynamic linear controllers for a nonlinear plant", dans *Decision and Control, 1993., Proceedings of the 32nd IEEE Conference on*. IEEE, 1993, pp. 1024–1029.
- D. A. Lawrence et M. Sznaier, "Nonlinear compensator synthesis via linear parameter-varying control", dans *American Control Conference, 2004. Proceedings of the 2004*, vol. 2. IEEE, 2004, pp. 1356–1361.
- Y. Le Gorrec, J.-F. Magni, C. Doll, et C. Chiappa, "Modal multimodel control design approach applied to aircraft autopilot design", *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 21, no. 1, pp. 77–83, 1998.
- D.-H. Lee et P. Chen, "Studies of aerodynamic influence of under-wing stores on flutter characteristics of F-16", dans *50th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference*, Conference Proceedings.



K. W. Lee et S. N. Singh, “Immersion- and invariance-based adaptive control of a nonlinear aeroelastic system”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 32, no. 4, pp. 1100–1110, 2009.

———, “Adaptive control of multi-input aeroelastic system with constrained inputs”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 2015.

D. Leith et W. Leithead, “Gain-scheduled and nonlinear systems : dynamic analysis by velocity-based linearization families”, *International Journal of Control*, vol. 70, no. 2, pp. 289–317, 1998.

———, “Counter-example to a common LPV gain-scheduling design approach”, dans *Proceedings of the UKACC International Control Conference*, 2000.

D. J. Leith et W. E. Leithead, “Survey of gain-scheduling analysis and design”, *International journal of control*, vol. 73, no. 11, pp. 1001–1025, 2000.

H. Lhachemi, D. Saussié, et G. Zhu, “A robust and self-scheduled longitudinal flight control system : a multi-model and structured  $H_\infty$  approach”, dans *AIAA Scitech Guidance Navigation and Control Conference 2014*, 2014, p. 0601.

———, “Performance enhancement of a self-scheduled longitudinal flight control system via multi-objective optimization”, dans *American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2014, pp. 1377–1383.

———, “A structured  $H_\infty$ -based optimization approach for integrated plant and self-scheduled flight control system design”, *Aerospace Science and Technology*, vol. 45, pp. 30 – 38, 2015.

———, “Gain-scheduling control design in the presence of hidden coupling terms”, *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, vol. 39, no. 8, pp. 1872–1880, 2016.

———, “Hidden coupling terms inclusion in gain-scheduling control design : Extension of an eigenstructure assignment-based technique”, *IFAC-PapersOnLine*, vol. 49, no. 17, pp. 403–408, 2016.

———, “Gain-scheduling control design in the presence of hidden coupling terms via eigenstructure assignment : Application to a pitch-axis missile autopilot”, dans *American Control Conference (ACC)*. IEEE, 2016, pp. 4041–4046.

H. Lhachemi, Y. Chu, D. Saussié, et G. Zhu, “Flutter suppression for underactuated aeroelastic wing section : Nonlinear gain-scheduling approach”, *Journal of Guidance, Control,*

*and Dynamics*, vol. 40, no. 8, pp. 2102–2109, 2017.

H. Lhachemi, D. Saussié, et G. Zhu, “Explicit hidden coupling terms handling in gain-scheduling control design via eigenstructure assignment”, *Control Engineering Practice*, vol. 58, pp. 1–11, 2017.

——, “Flutter suppression for a two degree of freedom aeroelastic wing section : a structured  $H_\infty$ -based gain-scheduling approach with explicit hidden coupling terms handling”, dans *AIAA Scitech Guidance Navigation and Control Conference 2017*, 2017, p. 1735.

——, “An enhanced velocity-based algorithm for safe implementations of gain-scheduled controllers”, *International Journal of Control*, vol. 90, no. 9, pp. 1973–1989, 2017.

H. Lhachemi, “Synthèse et validation d’un système de commandes de vol robuste et auto-séquenté”, Thèse de doctorat, École Polytechnique de Montréal, 2013.

H. Lhachemi, D. Saussié, et G. Zhu, “Handling hidden coupling terms in gain-scheduling control design : Application to a pitch-axis missile autopilot”, dans *AIAA guidance, navigation, and control conference*, 2016, p. 0365.

H. Lhachemi, D. Saussie, et G. Zhu, “An extension of Lyapunov’s first method to nonlinear systems with non-continuously differentiable vector fields”, *IEEE Control Systems Letters*, vol. 1, no. 1, pp. 74–79, 2017.

W.-Q. Li et Z.-Q. Zheng, “Robust gain-scheduling controller to LPV system using gap metric”, dans *Information and Automation, 2008. ICIA 2008. International Conference on*. IEEE, 2008, pp. 514–518.

L. Librescu, S. Na, P. Marzocca, C. Chung, et M. K. Kwak, “Active aeroelastic control of 2-D wing-flap systems operating in an incompressible flowfield and impacted by a blast pulse”, *Journal of Sound and Vibration*, vol. 283, no. 3, pp. 685–706, 2005.

C. M. Lin et W. L. Chin, “Adaptive decoupled fuzzy sliding-mode control of a nonlinear aeroelastic system”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 29, no. 1, pp. 206–209, 2006.

Y. Lin, E. D. Sontag, et Y. Wang, “A smooth converse Lyapunov theorem for robust stability”, *SIAM Journal on Control and Optimization*, vol. 34, no. 1, pp. 124–160, 1996.

E. Livne et T. A. Weisshaar, “Aeroelasticity of nonconventional airplane configurations-past and future”, *Journal of Aircraft*, vol. 40, no. 6, pp. 1047–1065, 2003.

- Z.-H. Luo, B.-Z. Guo, et Ö. Morgül, *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*. Springer Science & Business Media, 2012.
- J.-F. Magni, “Multimodel eigenstructure assignment in flight-control design”, *Aerospace science and technology*, vol. 3, no. 3, pp. 141–151, 1999.
- L. Meirovitch et H. Baruh, “On the problem of observation spillover in self-adjoint distributed-parameter systems”, *Journal of Optimization Theory and Applications*, vol. 39, no. 2, pp. 269–291, 1983.
- T. Meurer, *Control of Higher-Dimensional PDEs : Flatness and Backstepping Designs*. Springer Science & Business Media, 2012.
- C. P. Mracek et J. R. Cloutier, “Control designs for the nonlinear benchmark problem via the state-dependent riccati equation method”, *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 8, no. 4-5, pp. 401–433, 1998.
- V. Mukhopadhyay, “Transonic flutter suppression control law design and wind-tunnel test results”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp. 930–937, 2000.
- , “Historical perspective on analysis and control of aeroelastic responses”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 26, no. 5, pp. 673–684, 2003.
- M. F. M. Naser, “Nonsmooth Lyapunov stability of differential equations”, *Applied Math. Sci.*, vol. 11, no. 18, pp. 887–895, 2017.
- R. C. Nelson, *Flight Stability and Automatic Control*. WCB/McGraw Hill, 1998, vol. 2.
- R. A. Nichols, R. T. Reichert, et W. J. Rugh, “Gain scheduling for H-infinity controllers : A flight control example”, *IEEE Transactions on Control systems technology*, vol. 1, no. 2, pp. 69–79, 1993.
- T. O’Neil, H. Gilliat, et T. W. Strganac, “Investigations of aeroelastic response for a system with continuous structural nonlinearities”, *AIAA paper*, pp. 96–1390, 1996.
- J. M. Ortega, *Numerical analysis : a second course*. SIAM, 1990.
- A. A. Paranjape, S.-J. Chung, et M. S. Selig, “Flight mechanics of a tailless articulated wing aircraft”, *Bioinspiration & biomimetics*, vol. 6, no. 2, p. 026005, 2011.
- A. A. Paranjape, S.-J. Chung, et M. Krsticz, “PDE boundary control for flexible articulated aircraft wings”, p. 6486, 2011.

- A. A. Paranjape, S.-J. Chung, et J. Kim, “Novel dihedral-based control of flapping-wing aircraft with application to perching”, *Robotics, IEEE Transactions on*, vol. 29, no. 5, pp. 1071–1084, 2013.
- A. A. Paranjape, J. Guan, S.-J. Chung, et M. Krstic, “PDE boundary control for flexible articulated wings on a robotic aircraft”, *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 29, no. 3, pp. 625–640, 2013.
- G. H. Parker, R. C. Maple, et P. S. Beran, “Computational aeroelastic analysis of store-induced limit-cycle oscillation”, *Journal of Aircraft*, vol. 44, no. 1, pp. 48–59, 2007.
- M. J. Patil, D. H. Hodges, et C. E. S. Cesnik, “Limit-cycle oscillations in high-aspect-ratio wings”, *Journal of Fluids and Structures*, vol. 15, no. 1, pp. 107–107, 2001.
- M. J. Patil, “Limit cycle oscillations of aircraft due to flutter-induced drag”, 2002.
- , “From fluttering wings to flapping flight : The energy connection”, *Journal of Aircraft*, vol. 40, no. 2, pp. 270–276, 2003.
- M. J. Patil, D. H. Hodges, et C. E. S. Cesnik, “Limit cycle oscillations of a complete aircraft”, 2000.
- , “Nonlinear aeroelasticity and flight dynamics of high-altitude long-endurance aircraft”, *Journal of Aircraft*, vol. 38, no. 1, pp. 88–94, 2001.
- N. Paulino, C. Silvestre, et R. Cunha, “Affine parameter-dependent preview control for rotorcraft terrain following flight”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 29, no. 6, p. 1350, 2006.
- A. Pazy, *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. Springer Science & Business Media, 2012, vol. 44.
- P. Pepe, “On control Lyapunov-Razumikhin functions, nonconstant delays, nonsmooth feedbacks, and nonlinear sampled-data stabilization”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2017.
- L. Perko, *Differential equations and dynamical systems*. Springer Science & Business Media, 2013, vol. 7.
- R. S. Phillips et E. Hille, *Functional analysis and semi-groups*. RI, 1957.

G. Platanitis et T. W. Strganac, “Control of a nonlinear wing section using leading- and trailing-edge surfaces”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 27, no. 1, pp. 52–58, 2004.

———, “Suppression of control reversal using leading- and trailing-edge control surfaces”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 28, no. 3, pp. 452–460, 2005.

S. J. Price, H. Alighanbari, et B. H. K. Lee, “The aeroelastic response of a two-dimensional airfoil with bilinear and cubic structural nonlinearities”, *Journal of Fluids and Structures*, vol. 9, no. 2, pp. 175–193, 1995.

C. D. Rahn et C. Rahn, *Mechatronic control of distributed noise and vibration*. Springer, 2001.

K. K. Reddy, J. Chen, A. Behal, et P. Marzocca, “Multi-input/multi-output adaptive output feedback control design for aeroelastic vibration suppression”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 30, no. 4, pp. 1040–1048, 2007.

R. T. Reichert, “Dynamic scheduling of modern-robust-control autopilot designs for missiles”, *IEEE Control Systems*, vol. 12, no. 5, pp. 35–42, 1992.

Q. Rong, S. F. McLoone, et G. W. Irwin, “On hidden coupling in multiple model based PID controller networks”, *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 35, no. 1, pp. 229–234, 2002.

W. Rudin, “Functional analysis. international series in pure and applied mathematics”, 1991.

W. J. Rugh, *Linear System Theory*. Prentice-Hall, Inc., 1996.

W. J. Rugh et J. S. Shamma, “Research on gain scheduling”, *Automatica*, vol. 36, no. 10, pp. 1401–1425, 2000.

M. S. Sadabadi et D. Peaucelle, “From static output feedback to structured robust static output feedback : A survey”, *Annual Reviews in Control*, vol. 42, pp. 11–26, 2016.

M. G. Safonov, K.-C. Goh, et J. Ly, “Control system synthesis via bilinear matrix inequalities”, dans *American Control Conference, 1994*, vol. 1. IEEE, 1994, pp. 45–49.

D. Saussié, L. Saydy, O. Akhrif, et Bérard, “Gain-scheduling with guardian maps for longitudinal flight control”, *Journal of Guidance, Control and Dynamics*, vol. 34, no. 4, pp. 1045–1059, 2011.

- L. Saydy, A. Tits, et E. Abed, “Guardian maps and the generalized stability of parametrized families of matrices and polynomials”, *Mathematics of Control, Signal and Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 345–371, 1990.
- G. Scorletti, V. Fromion, et S. De Hillerin, “Toward nonlinear tracking and rejection using LPV control”, *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 26, pp. 13–18, 2015.
- R. C. Scott, S. T. Hoadley, C. D. Wieseman, et M. H. Durham, “Benchmark active controls technology model aerodynamic data”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 5, pp. 914–921, 2000.
- J. S. Shamma et M. Athans, “Guaranteed properties of gain scheduled control for linear parameter-varying plants”, *Automatica*, vol. 27, no. 3, pp. 559–564, 1991.
- , “Gain scheduling : Potential hazards and possible remedies”, *IEEE Control Systems*, vol. 12, no. 3, pp. 101–107, 1992.
- A. Shawky, A. Ordys, et M. J. Grimble, “End-point control of a flexible-link manipulator using  $H_\infty$  nonlinear control via a state-dependent riccati equation”, dans *Control Applications, 2002. Proceedings of the 2002 International Conference on*, vol. 1. IEEE, 2002, pp. 501–506.
- C. M. Shearer et C. E. S. Cesnik, “Nonlinear flight dynamics of very flexible aircraft”, *Journal of Aircraft*, vol. 44, no. 5, pp. 1528–1545, 2007.
- D. Shevitz et B. Paden, “Lyapunov stability theory of nonsmooth systems”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 39, no. 9, pp. 1910–1914, 1994.
- S. N. Singh et M. Brenner, “Modular adaptive control of a nonlinear aeroelastic system”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 26, no. 3, pp. 443–451, 2003.
- S. N. Singh et L. Wang, “Output feedback form and adaptive stabilization of a nonlinear aeroelastic system”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 25, no. 4, pp. 725–732, 2002.
- S. Skogestad et I. Postlethwaite, *Multivariable Feedback Control : Analysis and Design*. Wiley New York, 2007, vol. 2.
- A. Smyshlyaev, B.-Z. Guo, et M. Krstic, “Arbitrary decay rate for euler-bernoulli beam by backstepping boundary feedback”, *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 54, no. 5, pp. 1134–1140, 2009.

- E. M. Stein et G. Weiss, *Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces (PMS-32)*. Princeton university press, 2016, vol. 32.
- B. L. Stevens et F. L. Lewis, *Aircraft Control and Simulation*. John Wiley & Sons, 2003.
- D. J. Stilwell et W. J. Rugh, “Interpolation of observer state feedback controllers for gain scheduling”, *IEEE transactions on automatic control*, vol. 44, no. 6, pp. 1225–1229, 1999.
- , “Stability preserving interpolation methods for the synthesis of gain scheduled controllers”, *Automatica*, vol. 36, no. 5, pp. 665–671, 2000.
- T. W. Strganac, J. Ko, D. E. Thompson, et A. J. Kurdila, “Identification and control of limit cycle oscillations in aeroelastic systems”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 6, pp. 1127–1133, 2000.
- W. Su et C. E. S. Cesnik, “Dynamic response of highly flexible flying wings”, *AIAA journal*, vol. 49, no. 2, pp. 324–339, 2011.
- W. Su et C. E. S. Cesnik, “Nonlinear aeroelasticity of a very flexible blended-wing-body aircraft”, *Journal of Aircraft*, vol. 47, no. 5, pp. 1539–1553, 2010.
- V. L. Syrmos, C. T. Abdallah, P. Dorato, et K. Grigoriadis, “Static output feedback - a survey”, *Automatica*, vol. 33, no. 2, pp. pp. 125–137, 1997.
- M. Tadi, “State-dependent riccati equation for control of aeroelastic flutter”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 26, no. 6, pp. 914–917, 2003.
- T. Theodorsen et W. Mutchler, “General theory of aerodynamic instability and the mechanism of flutter”, NACA Rept. 496, Report, 1935.
- S. Theodoulis et G. Duc, “Missile autopilot design : gain-scheduling and the gap metric”, *Journal of guidance, control, and dynamics*, vol. 32, no. 3, pp. 986–996, 2009.
- D. E. Thompson et T. W. Strganac, “Store-induced limit cycle oscillations and internal resonance in aeroelastic systems”, p. 2000, 2000.
- D. E. Thompson Jr et T. W. Strganac, “Nonlinear analysis of store-induced limit cycle oscillations”, *Nonlinear Dynamics*, vol. 39, no. 1, pp. 159–178, 2005.
- O. Toker et H. Ozbay, “On the NP-hardness of solving bilinear matrix inequalities and simultaneous stabilization with static output feedback”, dans *American Control Conference, Proceedings of the 1995*, vol. 4. IEEE, 1995, pp. 2525–2526.

- R. Toscano, *Structured controllers for uncertain systems*. Springer, 2013.
- I. Tuzcu, “On the stability of flexible aircraft”, *Aerospace Science and Technology*, vol. 12, no. 5, pp. 376–384, 2008.
- V. Upadhyay, S. Gupta, A. Dubey, M. Rao, P. Siddhartha, V. Gupta, S. George, R. Bobba, R. Sirikonda, A. Maloo *et al.*, “Design and motion control of autonomous underwater vehicle”, dans *Underwater Technology (UT), 2015 IEEE*. IEEE, 2015, pp. 1–9.
- R. Vazquez et M. Krstic, “Marcum q-functions and explicit kernels for stabilization of  $2 \times 2$  linear hyperbolic systems with constant coefficients”, *Systems & Control Letters*, vol. 68, pp. 33–42, 2014.
- R. Vazquez, J.-M. Coron, M. Krstic, et G. Bastin, “Local exponential  $H_2$  stabilization of a  $2 \times 2$  quasilinear hyperbolic system using backstepping”, dans *Decision and Control and European Control Conference (CDC-ECC), 2011 50th IEEE Conference on*. IEEE, 2011, pp. 1329–1334.
- V. Veselý et A. Ilka, “Gain-scheduled PID controller design”, *Journal of process control*, vol. 23, no. 8, pp. 1141–1148, 2013.
- J. S. Vipperman, J. M. Barker, R. L. Clark, et G. J. Balas, “Comparison of  $\mu$ - and  $H_2$  synthesis controllers on an experimental typical section”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 22, no. 2, pp. 278–285, 1999.
- Z. Wang, A. Behal, et P. Marzocca, “Continuous robust control for two-dimensional airfoils with leading- and trailing-edge flaps”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 35, no. 2, pp. 510–519, 2012.
- M. R. Waszak, “Robust multivariable flutter suppression for benchmark active control technology wind-tunnel model”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 24, no. 1, pp. 147–153, 2001.
- , “Modeling the benchmark active control technology wind-tunnel model for application to flutter suppression”, 1996.
- F. Wu, A. Packard, et G. Balas, “LPV control design for pitch-axis missile autopilots”, dans *Decision and Control, 1995., Proceedings of the 34th IEEE Conference on*, vol. 1. IEEE, 1995, pp. 188–193.



F. Wu, X. H. Yang, A. Packard, et G. Becker, “Induced  $L_2$ -norm control for LPV systems with bounded parameter variation rates”, dans *IEEE conference on Decision and Control*, 1997.

F. Wu, X. Song, et Z. Ren, “A nonlinear gain-scheduling compensation approach using parameter-dependent Lyapunov functions”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 138, no. 1, p. 011007, 2016.

W. H. Xing et S. N. Singh, “Adaptive output feedback control of a nonlinear aeroelastic structure”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 23, no. 6, pp. 1109–1116, 2000.

W. Yang, M. Hammoudi, G. Herrmann, M. Lowenberg, et X. Chen, “Two-state dynamic gain scheduling control applied to an F16 aircraft model”, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, vol. 47, no. 10, pp. 1116–1123, 2012.

W. Yang, G. Herrmann, M. Lowenberg, et X. Chen, “Dynamic gain scheduled control in a multi-variable control framework”, dans *Decision and Control (CDC), 2010 49th IEEE Conference on.* IEEE, 2010, pp. 7081–7086.

W. Yang, N. Hammoudi, G. Herrmann, M. Lowenberg, et X. Chen, “Dynamic gain-scheduled control and extended linearisation : extensions, explicit formulae and stability”, *International Journal of Control*, vol. 88, no. 1, pp. 163–179, 2015.

G. Zames, “Feedback and optimal sensitivity : Model reference transformations, multiplicative seminorms, and approximate inverses”, *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 26, no. 2, pp. 301–320, 1981.

R. Zhang et S. N. Singh, “Adaptive output feedback control of an aeroelastic system with unstructured uncertainties”, *Journal of Guidance Control and Dynamics*, vol. 24, no. 3, pp. 502–509, 2001.

X. Zhang, W. Xu, S. S. Nair, et V. Chellaboina, “PDE modeling and control of a flexible two-link manipulator”, *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 13, no. 2, pp. 301–312, 2005.

K. Zhou, J. C. Doyle, et K. Glover, *Robust and Optimal Control*. Prentice Hall New Jersey, 1996, vol. 40.

M. Y. Ziabari et B. Ghadiri, “Vibration analysis of elastic uniform cantilever rotor blades in unsteady aerodynamics modeling”, *Journal of Aircraft*, vol. 47, no. 4, pp. 1431–1435, 2010.

## ANNEXE A ÉTUDE DE LA RÉGULARITÉ D'UNE FONCTION

Soient  $\Theta = [-1, 1]^s$  et  $K_i^*, \psi \in \mathcal{C}^1(\Theta; \mathbb{R})$  avec  $K_i^*$  ne s'annulant pas. Considérons l'équation différentielle en  $f$  donnée par :

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} + [1 - \alpha(y_1, \mathbf{w}_m)y_1] f(y_1, \mathbf{w}_m) = \psi(y_1, \mathbf{w}_m), \quad (\text{A.1})$$

où  $\alpha = \frac{1}{K_i^*} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1}$ ,  $y_1 \in [-1, 1]$  et  $\mathbf{w}_m \in \Theta_w \triangleq [-1, 1]^{s-1}$ . Un calcul direct montre que la fonction  $f$  définie par

$$\forall (y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w), \quad f(y_1, \mathbf{w}_m) = \frac{1}{y_1} K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi, \quad (\text{A.2})$$

vérifie l'équation (A.1) sur le domaine restreint  $\Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w)$ . L'objectif est de démontrer que la fonction  $f$  ainsi définie peut se prolonger en une fonction continue qui 1) admet une dérivée partielle  $\partial f / \partial y_1 \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$ ; 2) soit solution de (A.1) sur  $\Theta$ .

### A.1 Prolongement par continuité en $y_1 = 0$

La fonction  $f$  donnée par (A.2) étant continue en tout point  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w)$ , on va étudier la possibilité de la prolonger en une fonction continue sur  $\Theta$ . Pour  $\mathbf{w}_0 \in \Theta_w$  fixé arbitrairement, le théorème fondamental de l'analyse montre que :

$$\lim_{0 < |y_1| \rightarrow 0} f(y_1, \mathbf{w}_0) = \psi(0, \mathbf{w}_0). \quad (\text{A.3})$$

Ainsi, on peut prolonger par continuité la fonction  $y_1 \rightarrow f(y_1, \mathbf{w}_0)$  en  $y_1 = 0$  en posant<sup>1</sup>  $f(0, \mathbf{w}_0) = \psi(0, \mathbf{w}_0)$ . Il reste donc à démontrer que ce prolongement rend la fonction  $f$  continue sur  $\Theta$ . Soit  $\mathbf{w}_0 \in \Theta_w$  fixé. Pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w)$ ,

$$\begin{aligned} |f(y_1, \mathbf{w}_m) - \psi(0, \mathbf{w}_0)| &= \left| \frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1} \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi - \frac{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)}{y_1} \int_0^{y_1} \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} d\xi \right| \\ &\leq \frac{1}{|y_1|} \left| K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi - \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \int_0^{y_1} d\xi \right| \\ &\quad + \frac{1}{|y_1|} \left| [K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) - K_i^*(0, \mathbf{w}_m)] \int_0^{y_1} \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} d\xi \right| \end{aligned}$$

---

1. Avec un léger abus de notation, on note également  $f$  le prolongement ainsi obtenu.

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{|y_1|} |K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)| \int_0^{|y_1|} \left| \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} - \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \right| d\xi \\ &\quad + \frac{1}{|y_1|} |K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) - K_i^*(0, \mathbf{w}_m)| \int_0^{|y_1|} \left| \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \right| d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Soit  $\epsilon > 0$  fixé. Puisque  $K_i^*, \psi/K_i^* \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$  avec  $\Theta$  compact, il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta$ ,  $|K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)| \leq M$  et  $|\psi(y_1, \mathbf{w}_m)/K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)| \leq M$ . De plus, par continuité, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $|y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$ , les inégalités suivantes sont vérifiées :

$$\left| \frac{\psi(y_1, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)} - \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \right| < \frac{\epsilon}{2M}, \quad |K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) - K_i^*(0, \mathbf{w}_m)| < \frac{\epsilon}{2M}. \quad (\text{A.5})$$

On en déduit que pour tout  $0 < |y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$ ,

$$|f(y_1, \mathbf{w}_m) - \psi(0, \mathbf{w}_0)| < \frac{M}{|y_1|} \int_0^{|y_1|} \frac{\epsilon}{2M} d\xi + \frac{\epsilon}{2M|y_1|} \int_0^{|y_1|} M d\xi \leq \epsilon. \quad (\text{A.6})$$

De plus, puisque la fonction  $\psi$  est continue sur  $\Theta$ , il existe  $\eta' > 0$  tel que  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta'$  implique que  $|\psi(0, \mathbf{w}) - \psi(0, \mathbf{w}_0)| < \epsilon$ . Ainsi, en prenant  $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ ,  $|y_1| < \eta''$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta''$  implique que  $|f(y_1, \mathbf{w}) - f(0, \mathbf{w}_0)| < \epsilon$ . On a ainsi démontré que :

$$\lim_{(y_1, \mathbf{w}) \rightarrow (0, \mathbf{w}_0)} f(y_1, \mathbf{w}) = \psi(0, \mathbf{w}_0). \quad (\text{A.7})$$

La fonction  $f$  prolongée en  $y_1 = 0$  par  $f(0, \mathbf{w}_0) = \psi(0, \mathbf{w}_0)$  est donc continue sur  $\Theta$ .

## A.2 Existence et continuité de $\partial f / \partial y_1$

On va à présent s'attacher à établir l'existence et la continuité de la dérivée partielle  $\partial f / \partial y_1$  sur  $\Theta$ . On déduit de la continuité de  $f$  et de l'équation différentielle (A.1) que  $\partial f / \partial y_1$  est continue sur  $\Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w)$ . Il s'agit donc d'étudier le cas  $y_1 = 0$ . À partir de (A.1-A.2) on a pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta \setminus (\{0\} \times \Theta_w)$ ,

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} = \frac{1}{y_1} \left( \alpha(y_1, \mathbf{w}_m) - \frac{1}{y_1} \right) K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi + \frac{\psi(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1}. \quad (\text{A.8})$$

Sur la base d'un développement limité à  $\mathbf{w}_0 \in \Theta_w$  fixé, un candidat quant à la valeur prise par  $\partial f / \partial y_1$  en  $(0, \mathbf{w}_0)$  est identifié comme étant :

$$\frac{1}{2} \left[ \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right]. \quad (\text{A.9})$$

On va démontrer de manière rigoureuse ce résultat tout en établissant la continuité de  $\partial f / \partial y_1$ . Notons pour cela que les fonctions  $\psi$ ,  $\partial \psi / \partial y_1$ ,  $K_i^*$  et  $\partial K_i^* / \partial y_1$  étant continue sur  $\Theta$ , il existe  $M \in \mathbb{R}_+^*$  tel que pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta$ ,

$$|K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)| \leq M, \quad (\text{A.10a})$$

$$\left| \frac{1}{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} \right| \leq M, \quad (\text{A.10b})$$

$$\left| \frac{\psi(y_1, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} \right| \leq M. \quad (\text{A.10c})$$

Fixons  $\mathbf{w}_0 \in \Theta_w$  et  $\epsilon > 0$ . Par continuité des fonctions  $f$ ,  $\alpha$ ,  $\psi$ ,  $\partial \psi / \partial y_1$ ,  $K_i^*$  et  $\partial K_i^* / \partial y_1$ , il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout  $|y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$ ,

$$|\alpha(y_1, \mathbf{w}_m) f(y_1, \mathbf{w}_m) - \alpha(0, \mathbf{w}_0) f(0, \mathbf{w}_0)| < \epsilon/3, \quad (\text{A.11a})$$

$$|K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) - K_i^*(0, \mathbf{w}_0)| < \epsilon/(3M), \quad (\text{A.11b})$$

$$\left| \frac{1}{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} - \frac{1}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| < \epsilon/(3M), \quad (\text{A.11c})$$

$$\left| \frac{\psi(y_1, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} - \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{[K_i^*(0, \mathbf{w}_0)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| < \epsilon/(3M). \quad (\text{A.11d})$$

Pour  $0 < |y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$ , une première majoration est donnée par :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\alpha(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1} K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)} d\xi - \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) \right| \\ &= |\alpha(y_1, \mathbf{w}_m) f(y_1, \mathbf{w}_m) - \alpha(0, \mathbf{w}_0) f(0, \mathbf{w}_0)| \\ &< \epsilon/3. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Par intégration par partie, on a que pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta$ ,

$$\begin{aligned} \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi &= \frac{\psi(y_1, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)} y_1 - \int_0^{y_1} \frac{1}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi \\ &\quad + \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

On en déduit que pour  $y_1 \neq 0$ ,

$$\begin{aligned} &\left| \left( -\frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} d\xi + \frac{\psi(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1} \right) - \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} - \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) \right] \right| \\ &\leq \left| \frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{1}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| \\ &\quad + \left| -\frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi + \frac{1}{2} \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) \right|. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Intéressons nous au premier terme du membre de droite de l'inégalité. Lorsque  $0 < |y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$  on obtient la majoration suivante :

$$\begin{aligned} &\left| \frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{1}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi - \frac{1}{2} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| \\ &= \left| \frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{1}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi - \frac{1}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \xi d\xi \right| \\ &= \frac{1}{y_1^2} \left| K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{1}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi - K_i^*(0, \mathbf{w}_0) \int_0^{y_1} \frac{1}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \xi d\xi \right| \\ &\leq \frac{|K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)|}{y_1^2} \int_0^{|y_1|} \left| \frac{1}{K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} - \frac{1}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| |\xi| d\xi \\ &\quad + \frac{1}{y_1^2} |K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) - K_i^*(0, \mathbf{w}_0)| \int_0^{|y_1|} \left| \frac{1}{K_i^*(0, \mathbf{w}_0)} \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| |\xi| d\xi \\ &< \frac{2\epsilon}{3y_1^2} \int_0^{|y_1|} \xi d\xi \\ &\leq \epsilon/3. \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Le second terme vérifie quant à lui pour tout  $0 < |y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$  :

$$\begin{aligned}
& \left| -\frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi + \frac{1}{2} \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) \right| \\
&= \left| \frac{K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)}{y_1^2} \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi - \frac{1}{y_1^2} \int_0^{y_1} \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) \xi d\xi \right| \\
&= \frac{1}{y_1^2} \left| K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) \int_0^{y_1} \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} \xi d\xi - K_i^*(0, \mathbf{w}_0) \int_0^{y_1} \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{[K_i^*(0, \mathbf{w}_0)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \xi d\xi \right| \\
&\leq \frac{|K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m)|}{y_1^2} \int_0^{|y_1|} \left| \frac{\psi(\xi, \mathbf{w}_m)}{[K_i^*(\xi, \mathbf{w}_m)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(\xi, \mathbf{w}_m)} - \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{[K_i^*(0, \mathbf{w}_0)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| |\xi| d\xi \\
&\quad + \frac{1}{y_1^2} |K_i^*(y_1, \mathbf{w}_m) - K_i^*(0, \mathbf{w}_0)| \int_0^{|y_1|} \left| \frac{\psi(0, \mathbf{w}_0)}{[K_i^*(0, \mathbf{w}_0)]^2} \frac{\partial K_i^*}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right| |\xi| d\xi \\
&< \frac{2\epsilon}{3y_1^2} \int_0^{|y_1|} |\xi| d\xi \\
&\leq \epsilon/3
\end{aligned} \tag{A.16}$$

À partir de l'identité (A.8) et en combinant les trois inégalités (A.12-A.16), il découle que pour tout  $0 < |y_1| < \eta$  et  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta$ ,

$$\left| \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w}_m)} - \frac{1}{2} \left[ \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right] \right| < \epsilon. \tag{A.17}$$

Le théorème de prolongement d'une dérivée permet de conclure que  $\partial f / \partial y_1$  existe pour tout  $\mathbf{w}_0 \in \Theta_w$  en  $y_1 = 0$  et est donnée par :

$$\forall \mathbf{w}_0 \in \Theta_w, \quad \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} = \frac{1}{2} \left[ \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right]. \tag{A.18}$$

De plus, en  $y_1 = 0$  on a par continuité des fonctions  $\alpha$ ,  $\psi$  et  $\partial \psi / \partial y_1$  qu'il existe  $\eta' > 0$  tel

que  $\|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta'$  implique :

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_m)} - \frac{1}{2} \left[ \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right] \right| \\ &= \frac{1}{2} \left| \left[ \psi(0, \mathbf{w}_m) \alpha(0, \mathbf{w}_m) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_m)} \right] - \left[ \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right] \right| \\ &< \epsilon. \end{aligned} \tag{A.19}$$

En posant  $\eta'' = \min(\eta, \eta')$ , on obtient que pour tout  $(y_1, \mathbf{w}_m) \in \Theta$ ,

$$|y_1| < \eta'', \|\mathbf{w}_m - \mathbf{w}_0\|_\infty < \eta'' \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y_1} \Big|_{(y_1, \mathbf{w})} - \frac{1}{2} \left[ \psi(0, \mathbf{w}_0) \alpha(0, \mathbf{w}_0) + \frac{\partial \psi}{\partial y_1} \Big|_{(0, \mathbf{w}_0)} \right] \right| < \epsilon. \tag{A.20}$$

On a démontré que  $\partial f / \partial y_1$  est continue en tout point  $(0, \mathbf{w}_0) \in \Theta$  et donc  $\partial f / \partial y_1 \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$ .

### A.3 Bilan

Il a été démontré que la fonction  $f$  définie par (A.2) et prolongée en  $y_1 = 0$  par  $f(0, \mathbf{w}_0) = \phi(0, \mathbf{w}_0)$  est continue sur  $\Theta$  et admet une dérivée partielle  $\partial f / \partial y_1 \in \mathcal{C}^0(\Theta; \mathbb{R})$ . Sur cette base, il est possible de directement vérifier que la fonction  $f$  ainsi prolongée satisfait l'équation différentielle (A.1) sur  $\Theta$  tout entier.

## ANNEXE B    EXTENSION DE LA PREMIÈRE MÉTHODE DE LYAPUNOV AU CAS DES CHAMPS DE VECTEURS NON CONTINUÛMENT DIFFÉRENTIABLES

Les Chapitres 4 et 5 ont porté sur l’emploi de la méthode du séquençement des gains. En particulier, de manière à tirer profit des propriétés de symétrie de la dynamique en tangage du missile et de quasi-symétrie de la dynamique du BACT, on a recouru à l’utilisation de la valeur absolue dans les formules de séquençement. Il en résulte un système bouclé dont le champ de vecteurs n’est pas continûment différentiable. Or, le fondement même des méthodes de séquençement repose sur le fait que le théorème dit de la première méthode de Lyapunov garantit que la stabilité exponentielle locale d’un système est assurée, lorsque le champ de vecteurs sous-jacent est de classe  $\mathcal{C}^1$ , si et seulement si la matrice Jacobienne évaluée au point d’équilibre est Hurwitz, i.e., que la dynamique du linéarisé tangent au point d’équilibre étudié est elle-même exponentiellement stable (Khalil, 1996)[Théorème 4.15, page 165]. Dès lors, le recours à la valeur absolue dans la formule de séquençement pose problème puisqu’elle ne permet pas de recourir directement au théorème de la première méthode de Lyapunov.

Comme cela sera vu plus en détails par la suite, la nécessité de l’hypothèse de régularité  $\mathcal{C}^1$  dans la démonstration de la première méthode de Lyapunov est double. Dans un premier temps, elle permet d’assurer que le champ de vecteurs est localement lipschitzien, garantissant en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz (Khalil, 1996) l’existence et l’unicité de solutions de l’EDO associée. Dans un second temps, elle fournit un développement de Taylor à l’ordre un du champ de vecteurs au point d’équilibre étudié, permettant de faire le lien entre les propriétés de stabilité du système linéarisé avec le système non linéaire d’origine.

Dans le cadre de l’analyse non-lisse (Clarke et al., 2008; Clarke, 2013), de nombreux résultats ont été reportés quant à l’application de la seconde méthode de Lyapunov<sup>1</sup> pour l’analyse de systèmes non lisses par le recours à des fonctions de Lyapunov qui ne sont elles-mêmes pas de classe  $\mathcal{C}^1$  (Bacciotti and Rosier, 2006; Shevitz and Paden, 1994; Naser, 2017; Kolmanovskii and Myshkis, 2013; Pepe, 2017). Une alternative possible est d’effectuer l’analyse de stabilité dans le cadre d’approches de type stabilité robuste en plongeant le problème d’origine en un problème de stabilité vis-à-vis de paramètres incertains variant dans le temps (Lin et al., 1996; Karafyllis and Jiang, 2011). Cependant, l’étape de plongement introduit en général un certain conservatisme au regard du système d’origine. Très peu de résultats ont été reportés

---

1. La seconde méthode de Lyapunov correspond à la recherche explicite de fonctions de Lyapunov pour établir la stabilité d’un système (Khalil, 1996; Haddad and Chellaboina, 2008).



dans la littérature concernant une extension de la première méthode de Lyapunov au cas de champs de vecteurs non  $\mathcal{C}^1$ . Dans ce domaine, le résultat le plus significatif est celui de Lasota and Strauss (1971). Il est montré que la stabilité exponentielle locale d'une EDO dont le champ de vecteurs n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$  (mais lipschitzien au point d'équilibre) peut être déduite d'une inclusion différentielle<sup>2</sup> découlant du champ de vecteurs d'origine. Cette dernière se réduit à la linéarisation usuelle basée sur la matrice Jacobienne lorsque le champ de vecteurs est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Cependant, afin d'appliquer le résultat de Lasota and Strauss (1971), il est nécessaire de prouver que toutes les solutions de l'inclusion différentielle découlant du problème d'origine convergent vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ .

L'objectif de cette annexe est double. Dans un premier temps, il est montré que si l'hypothèse de régularité  $\mathcal{C}^1$  n'est pas satisfaite, la nature Hurwitz de la matrice Jacobienne, lorsqu'elle existe, ne garantit pas en général la stabilité du système non linéaire d'origine. Afin de fournir des critères généralisant la première méthode de Lyapunov, on étudie le cas de champs de vecteurs admettent des dérivées directionnelles (Clarke et al., 2008; Clarke, 2013). Contrairement à l'approche développée dans (Lasota and Strauss, 1971), les critères proposés se réduisent à vérifier qu'un certain supremum sur un ensemble compact est strictement négatif. On s'intéresse également au cas d'une famille de champs de vecteurs qui ne sont pas de classe  $\mathcal{C}^1$  mais dont la stabilité exponentielle locale peut néanmoins être obtenue sur la base de l'étude de la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre. Ces résultats ont fait l'objet d'une publication dans le journal *IEEE Control Systems Letters* (Lhachemi et al., 2017a).

Cette Annexe est organisée comme suit. La Section B procède à un rappel des résultats généraux portant sur l'existence et l'unicité de solutions d'une EDO ainsi que sur la première méthode de Lyapunov. La section B montre dans un premier temps par l'intermédiaire d'un contre-exemple que la première méthode de Lyapunov ne peut être directement transposée lorsque le champ de vecteurs n'est pas de classe  $\mathcal{C}^1$ . Est présentée dans un second temps la méthode proposée dans (Lasota and Strauss, 1971) pour analyser de tels systèmes. La méthode développée dans le cadre de cette thèse est introduite à la Section B puis appliquée sur divers exemples. Finalement, le cas de champs de vecteurs qui ne sont pas de classe  $\mathcal{C}^1$  mais qui admettent néanmoins un développement de Taylor à l'ordre un au point d'équilibre étudié est étudié dans la Section B.

Dans ce chapitre, pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathbb{S}^{n-1}$  dénote l'hypersphère unité de  $\mathbb{R}^n$ , i.e.,  $\mathbb{S}^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$  avec  $\|x\|_2 \triangleq \sqrt{x^\top x}$ . Les ensembles  $\mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ,  $\mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  et  $\mathcal{S}_n^{-*}(\mathbb{R})$  sont les sous-ensembles des matrices symétriques à coefficients réels  $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  qui sont respectivement

---

2. Une inclusion différentielle est une équation du type  $\dot{x}(t) \in F(x(t))$  où  $F : U \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$  avec  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et où l'inconnue est la fonction  $x : I \rightarrow \mathbb{R}^n$  avec  $I$  un intervalle non vide de  $\mathbb{R}$ .

semi-définies positives, définies positives et semi-définies négatives. Étant donnée une norme  $\|\cdot\|$  sur  $\mathbb{R}^n$  et pour tout  $a \in \mathbb{R}^n$  et  $r > 0$ ,  $D_{\|\cdot\|}(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| < r\}$ , simplement noté  $D(a, r)$  lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme employée. De manière analogue,  $D_{\|\cdot\|}(a, r] = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\| \leq r\}$ . Les symboles  $o$  et  $\mathcal{O}$  correspondent aux notations classiques de Bachmann-Landau.

## B.1 Existence de solutions, stabilité et première méthode de Lyapunov

On présente dans cette première section les outils usuels sur l'analyse des systèmes décrits par l'EDO autonome suivante :

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad (\text{B.1a})$$

$$x(0) = x_0, \quad (\text{B.1b})$$

où  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine, i.e., un sous-ensemble ouvert et connexe de  $\mathbb{R}^n$ . On rappelle dans un premier temps le théorème assurant l'existence et l'unicité des solutions de (B.1a-B.1b). Dans un second temps, on introduit la notion de stabilité au sens de Lyapunov et la première méthode de Lyapunov qui en découle.

### B.1.1 Théorème de Cauchy-Lipschitz

La question fondamentale, avant toute autre considération, qui se pose lors de l'étude de (B.1a-B.1b) est celle de l'existence de solutions. La question fondamentale auxiliaire est celle de l'unicité des solutions pour une condition initiale donnée. Pour y répondre, on introduit le concept de fonction localement lipschitzienne. On dit que  $f$  est localement lipschitzienne si pour tout  $a \in U$ , il existe  $\eta > 0$  avec  $D(a, \eta) \subset U$  et il existe  $K > 0$  tels que pour tout  $x, y \in D(a, \eta)$ ,  $\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|$ . Dans le cadre des champs de vecteur localement lipschitziens, les réponses aux deux questions fondamentales précédemment énoncées sont données par le théorème de Cauchy-Lipschitz.

**Théorème B.1 (Théorème de Cauchy-Lipschitz)** *(Perko, 2013)[Théorème en page 73]*  
 Soient  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ . Supposons que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit localement lipschitzienne. Alors, il existe  $a > 0$  tel que (B.1a-B.1b) admet une unique solution sur l'intervalle  $(-a, a)$ .

Le théorème de Cauchy-Lipschitz assure ainsi, localement, l'existence et l'unicité de solutions pour (B.1a-B.1b). Il permet également d'assurer l'existence et l'unicité de solutions maximales, comme cela est résumé dans le prochain théorème.

**Théorème B.2 (Solution maximale)** (*Perko, 2013*)[Théorème 1 en page 88] Soient  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$  et  $x_0 \in D$ . Supposons que  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  soit localement lipschitzienne. Alors il existe un intervalle ouvert maximal  $(\alpha, \beta)$  sur lequel (B.1a-B.1b) admet une unique solution  $x(t)$ , i.e., si  $y(t)$  est une solution de (B.1a-B.1b) sur un intervalle  $I$ , alors  $I \subset (\alpha, \beta)$  et  $y(t) = x(t)$  pour tout  $t \in I$ .

Lorsque  $\alpha$  et ou  $\beta$  sont finis, on observe alors le phénomène dit « d'explosion en temps fini » de la solution.

**Théorème B.3 (Explosion en temps fini)** (*Perko, 2013*)[Théorème 1 en page 89] Soient  $D$  un domaine de  $\mathbb{R}^n$ ,  $x_0 \in D$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne. Considérons l'intervalle maximal  $(\alpha, \beta)$  d'existence de la solution  $x(t)$  du problème (B.1a-B.1b). Si  $\beta < +\infty$  (respectivement  $\alpha > -\infty$ ), alors pour tout compact  $K \subset D$ , il existe  $t \in (\alpha, \beta)$  tel que  $x(t) \notin K$ .

Il est à noter que dans (*Perko, 2013*), les théorèmes précédents sont énoncés non pas sous l'hypothèse «  $f$  localement lipschitzienne » mais pour «  $f$  de classe  $\mathcal{C}^1$  ». Néanmoins, l'utilité de l'hypothèse que le champ de vecteurs  $f$  soit de classe  $\mathcal{C}^1$  réside uniquement dans le fait qu'il en découle que  $f$  est une fonction localement lipschitzienne sur  $U$  (*Perko, 2013*)[Page 71]. Ainsi, les démonstrations des énoncés précédents tels que proposées dans (*Perko, 2013*) demeurent inchangées par cette substitution d'hypothèses (confère également (*Khalil, 1996*) dans le cadre de systèmes non autonomes).

Finalement, lorsque le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est (globalement) lipschitzien, i.e., il existe  $M > 0$  tel que pour tout  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ ,  $\|f(x_1) - f(x_2)\| \leq M \|x_1 - x_2\|$ , on a le résultat suivant portant sur l'existence de solutions globales.

**Théorème B.4 (Existence de solutions globales)** (*Khalil, 1996*)[Théorème 3.2, page 96] Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  une fonction (globalement) lipschitzienne. Alors (B.1a-B.1b) admet pour toute condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  une unique solution maximale  $x(t)$  qui est définie pour tout  $t \in \mathbb{R}$ . Une telle solution est dite globale.

Les résultats précédents amènent à définir la notion de flot de (B.1a).

**Définition B.1 (Flot)** Soient  $U$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  localement lipschitzienne. Pour toute condition initiale  $x_0 \in D$ , notons  $x(t; x_0)$  la solution de (B.1a-B.1b) définie sur son intervalle d'existence maximal  $I(x_0)$ . Pour tout  $t \in I(x_0)$ , la fonction  $\phi_t : U \rightarrow D$  définie par

$$\phi_t(x_0) = x(t; x_0), \quad (\text{B.2})$$

est appelé le flot de l'équation différentielle (B.1a).

### B.1.2 Stabilité et première méthode de Lyapunov

Au delà de l'existence de solutions pour (B.1a-B.1b) se pose la question de la notion de point d'équilibre et de stabilité des solutions. Cela amène à introduire la notion de stabilité au sens de Lyapunov ainsi qu'entre autres (on se focalisera uniquement sur ce point en vu des prochains développements) sur la première méthode de Lyapunov.

#### B.1.2.1 Définition de la stabilité au sens de Lyapunov

On s'intéresse à étudier le comportement des solutions de (B.1a-B.1b) au voisinage d'un point d'équilibre dont la définition est rappelée ci-dessous.

**Définition B.2 (Point d'équilibre)** *Un point  $x_e \in D$  est appelé point d'équilibre de (B.1a) si  $f(x_e) = 0$ .*

Il est aisé de voir sur la base des éléments précédents que pour tout point d'équilibre  $x_e \in D$ , l'unique solution de (B.1a-B.1b) associée à la condition initiale  $x_0 = x_e$  est une solution globale donnée par  $x(t) = x_e$ , i.e.,  $\phi_t(x_e) = x_e$ . Quitte à effectuer un changement de variable, on suppose que le point d'équilibre étudié est localisé en  $x_e = 0$ , i.e.,  $0 \in D$  et  $f(0) = 0$ . On introduit alors les différentes notions de stabilité au sens de Lyapunov.

**Définition B.3 (Stabilité au sens de Lyapunov)** *(Khalil, 1996) Le point d'équilibre 0 du système (B.1a) est dit :*

- (localement) stable si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute condition initiale  $\|x_0\| < \delta$ , le flot  $\phi_t(x_0)$  est bien défini pour tout  $t \geq 0$  et  $\|\phi_t(x_0)\| < \varepsilon$  pour tout  $t \geq 0$  ;
- instable s'il n'est pas stable ;
- (localement) asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe  $\eta > 0$  tel que pour toute condition initiale  $\|x_0\| < \eta$ ,  $\phi_t(x_0) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$  ;
- (localement) exponentiellement stable s'il existe  $\alpha, \beta, \gamma > 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$ , et  $\|x_0\| < \eta$ ,  $\|\phi_t(x_0)\| \leq \alpha \|x_0\| e^{-\beta t}$ .

Il est évident que la stabilité exponentielle implique la stabilité asymptotique, impliquant elle même la stabilité. De nombreuses méthodes, essentiellement basées sur le concept de fonctions de Lyapunov, ont été développées afin de pouvoir établir les propriétés de stabilité d'un système sous la forme (B.1a-B.1b) sans avoir à résoudre de manière explicite l'équation différentielle (ce qui, dans la large majorité des cas, n'est pas possible de manière analytique). Ces méthodes s'inscrivent majoritairement dans ce qui est appelé la seconde méthode de

Lyapunov. On renvoie le lecteur pour plus de détails à, e.g., (Khalil, 1996; Haddad and Chellaboina, 2008; Bacciotti and Rosier, 2006; Naser, 2017; Kolmanovskii and Myshkis, 2013). Dans le cadre de ce chapitre, on se focalise non pas sur la recherche de fonctions de Lyapunov mais sur le recours au linéarisé tangent du champ de vecteurs afin d'en déduire les propriétés de stabilité de (B.1a). Cette approche est dite de la première méthode de Lyapunov.

### B.1.2.2 Première méthode de Lyapunov

L'idée motivant la première méthode de Lyapunov réside dans la remarque heuristique suivante. Si  $x_0 = 0$  est un point d'équilibre du champ de vecteurs  $f$  et en supposant que ce dernier est suffisamment régulier, son développement de Taylor en 0 prend la forme :

$$f(x) = \underbrace{f(0)}_{=0} + Df_0(x) + \frac{1}{2}D^2f_0(x, x) + \dots = Df_0(x) + O(\|x\|^2), \quad (\text{B.3})$$

où  $Df_0$  et  $D^2f_0$  représentent les différentielles d'ordre 1 et 2 de  $f$  en 0. Il est alors raisonnable de penser que pour  $x$  suffisamment proche de 0, l'essentiel du comportement de  $f(x)$  est capturé par le terme linéaire  $Df_0(x)$ . On est alors en mesure d'attendre qu'au voisinage de 0, les solutions de  $\dot{x} = f(x)$  et  $\dot{x} = Df_0(x)$  présentent des comportements analogues. Cette intuition est le fondement même de la première méthode de Lyapunov telle qu'énoncée ci-dessous. On rappelle qu'une matrice carrée est dite Hurwitz si l'ensemble de ses valeurs propres sont à partie réelle strictement négative.

**Théorème B.5 (Première méthode de Lyapunov)** (*Khalil, 1996*) [Théorème 4.7, page 139] Soit  $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine. Soit  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  tel que  $f(0) = 0$ . Notons  $A = J(f)_0 \triangleq \partial f / \partial x|_0$  la matrice Jacobienne de  $f$  évaluée en 0. Alors le point d'équilibre 0 de (B.1a) est localement asymptotiquement stable si  $J(f)_0$  est Hurwitz.

Une nouvelle fois, l'hypothèse  $f \in \mathcal{C}^1(D; \mathbb{R}^n)$  peut être raffinée (confère, e.g., (Braun and Golubitsky, 1983)). En effet, la première méthode de Lyapunov demeure valable en supposant que  $f$  est localement lipschitzienne et qu'elle admet un développement de Taylor à l'ordre un en 0. Bien que classique, la démonstration est ici détaillée (pour les deux hypothèses plus faibles énoncées précédemment) car l'idée sous-jacente sera ré-exploitée ultérieurement dans cette annexe.

**Démonstration.** (*Khalil, 1996*) [Théorème 4.7, page 139] Soit  $Q \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ , i.e., une matrice symétrique définie positive. Puisque la matrice  $A$  est Hurwitz, on sait que  $P = \int_0^\infty e^{A^\top t} Q e^{At} dt \in \mathbb{R}^{n \times n}$  vérifie l'équation de Lyapunov  $PA + A^\top P = -Q$  (cf. (*Khalil, 1996*) [Théorème 4.6, page 135]). On introduit alors la fonction de Lyapunov candidate  $V(x) = x^\top P x$ . En prenant le

développement de Taylor au premier ordre  $f(x) = Ax + h(x)$  où  $h(x) = o(\|x\|)$ , la dérivée de Lie de  $V$  le long des trajectoires du système est donnée par :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_f V(x) &= x^\top P f(x) + f(x)^\top P x \\
 &= x^\top P [Ax + h(x)] + [Ax + h(x)]^\top P x \\
 &= x^\top (PA + A^\top P)x + 2x^\top P h(x) \\
 &= -x^\top Qx + 2x^\top P h(x).
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Puisque  $D$  est ouvert, il existe  $r > 0$  tel que  $D(0, r) \subset D$ . Posons  $\varepsilon \in (0, \lambda_{\min}(Q)/(2\|P\|))$ . Puisque  $h(x) = o(\|x\|_2)$ , il existe  $r > 0$  tel que  $\|x\|_2 < \eta$  implique  $\|h(x)\|_2 < \varepsilon \|x\|_2$ . Ainsi, pour tout  $x \in D(0, \eta)$ ,

$$\mathcal{L}_f V(x) \leq - \underbrace{(\lambda_{\min}(Q) - 2\|P\|_2 \varepsilon)}_{>0} \|x\|_2^2. \tag{B.5}$$

Les arguments standards sur les fonctions de Lyapunov permettent dès lors de conclure la stabilité asymptotique (locale) du point d'équilibre 0.  $\square$

Il est en réalité possible de déduire de (B.5) la stabilité exponentielle du point d'équilibre. En effet pour tout  $x \in D(0, \eta)$ ,

$$\mathcal{L}_f V(x) \leq - \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\|P\|_2 \varepsilon}{\lambda_{\max}(P)} V(x). \tag{B.6}$$

## B.2 Cas d'un champ de vecteurs non continûment différentiable

On s'intéresse à présent au cas de figure où le champ de vecteurs n'est pas continûment différentiable. Plus spécifiquement, on cherche à étudier le cas où le champ de vecteurs est localement lipschitzien<sup>3</sup>, mais non continûment différentiable au voisinage du point d'équilibre.

### B.2.1 Exemple illustratif

Pour tout  $\alpha, \beta > 0$ , on introduit le champ de vecteurs  $f_{\alpha, \beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f_{\alpha, \beta}(x) = \begin{bmatrix} -\alpha x_1 + \phi(x) \\ -\beta x_2 - \phi(x) \end{bmatrix}, \tag{B.7}$$

---

3. Permet d'assurer l'existence et l'unicité des solutions en vertu du théorème de Cauchy-Lipschitz.

où la fonction  $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée par

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(x_1, x_2) = \begin{cases} \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}, & \text{if } (x_1, x_2) \neq (0, 0); \\ 0, & \text{if } (x_1, x_2) = (0, 0). \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

L'objectif de cet exemple est de déterminer les valeurs de  $\alpha, \beta > 0$  tels que le point d'équilibre  $(0, 0)$  de l'EDO suivante est localement stable

$$\dot{x} = f_{\alpha, \beta}(x). \quad (\text{B.9})$$

### B.2.1.1 Propriétés de $\phi$

Afin d'analyser la stabilité de (B.9), les propriétés de la fonction  $\phi$  sont dans un premier temps étudiées. La restriction de  $\phi$  à l'ouvert  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$  étant une fraction rationnelle dont le dénominateur ne s'annule pas, on a alors  $\phi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ . Puisque

$$\forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \quad |\phi(x_1, x_2) - \phi(0, 0)| = \left| \frac{x_1 x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} \right| \leq \frac{|x_2|}{2} \leq \frac{1}{2} \|(x_1, x_2)\|_2, \quad (\text{B.10})$$

on en déduit que  $\phi$  est continue en 0 et donc que  $\phi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^2)$ . De plus, de  $\phi(x_1, 0) = \phi(0, x_2) = 0$ , on déduit que  $\phi$  admet des dérivées partielles en 0 qui sont telles que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0, 0) = \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(0, 0) = 0. \quad (\text{B.11})$$

Cependant,  $\phi$  n'est pas différentiable en 0. Pour montrer cela, posons  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $u(x) = (x, x)$ . Si  $\phi$  était différentiable, on aurait que

$$d\phi_{(0,0)} = \frac{\partial \phi}{\partial x_1}(0, 0)dx_1 + \frac{\partial \phi}{\partial x_2}(0, 0)dx_2 = 0. \quad (\text{B.12})$$

Puisque  $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^2)$ , on en déduit donc que  $d(\phi \circ u)_0 = d\phi_{u(0)} \circ du_0 = 0$ . Or par calcul direct  $\phi(u(x)) = x/2$  et donc  $d(\phi \circ u)_0 = (1/2)dx$ . De cette contradiction on déduit bien que  $\phi$  n'est pas différentiable en 0. Elle n'admet donc pas, par définition, de développement de Taylor à l'ordre un en 0.

Finalement, montrons que  $\phi$  est globalement lipschitzienne<sup>4</sup>. Pour  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ , on a

$$\nabla \phi(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} \frac{x_2^2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2^2 \times 2x_1}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{2x_1x_2(x_1^2 + x_2^2) - x_1x_2^2 \times 2x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_2^2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \\ \frac{2x_1^3x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} \end{bmatrix}. \quad (\text{B.13})$$

Ainsi, pour  $(h, k) \in \mathbb{R}^2$ ,

$$\begin{aligned} |\mathrm{d}\phi_{(x_1, x_2)}(h, k)| &= \left| x_2^2 \frac{x_2^2 - x_1^2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} h + \frac{2x_1^3x_2}{(x_1^2 + x_2^2)^2} k \right| \\ &\leq x_2^2 \frac{|x_2^2 - x_1^2|}{(x_1^2 + x_2^2)^2} |h| + \frac{x_1^2 \times 2|x_1x_2|}{(x_1^2 + x_2^2)^2} |k| \\ &\leq \frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2} |h| + \frac{2|x_1x_2|}{x_1^2 + x_2^2} |k| \\ &\leq |h| + |k| \\ &\leq 2 \|(h, k)\|_2. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

On en déduit donc que pour  $(x_1, x_2) \neq 0$ ,  $\|\mathrm{d}\phi_{(x_1, x_2)}\| \leq 2$ . Dès lors, pour tout  $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(0, 0) \notin [(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ , l'inégalité des accroissements finis garantit que

$$(0, 0) \notin [(x_1, x_2), (y_1, y_2)] \Rightarrow |\phi(y_1, y_2) - \phi(x_1, x_2)| \leq 2 \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\|_2. \quad (\text{B.15})$$

Dans le cas où  $(0, 0) \in [(x_1, x_2), (y_1, y_2)]$ , on a  $\|(y_1, y_2)\|_2 + \|(x_1, x_2)\|_2 = \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\|_2$  et donc

$$\begin{aligned} |\phi(y_1, y_2) - \phi(x_1, x_2)| &\leq |\phi(y_1, y_2)| + |\phi(x_1, x_2)| \\ &\leq \frac{1}{2} (\|(y_1, y_2)\|_2 + \|(x_1, x_2)\|_2) \\ &\leq \frac{1}{2} \|(y_1, y_2) - (x_1, x_2)\|_2. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

On en déduit que  $\phi$  est globalement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^2$ . Il est alors aisé de montrer que la fonction  $f_{\alpha, \beta}$  est également globalement lipschitzienne. Cela garantit l'existence et l'unicité, pour tout condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}^2$  donnée, d'une solution globale (i.e., définie pour tout

---

4. Puisque  $\phi|_{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$ , le théorème portant sur l'inégalité des accroissements finis garantit déjà que  $\phi$  est localement lipschitzienne sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ .



$t \in \mathbb{R}_+$ ) de l'équation différentielle (B.9).

### B.2.1.2 Étude de la stabilité du Système non linéaire

La fonction  $\phi$  admettant des dérivées partielles nulles en 0, les composantes de  $f_{\alpha,\beta} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  admettent également des dérivées partielles en 0, ce qui permet de calculer sa matrice Jacobienne :

$$A_{\alpha,\beta} \triangleq J(f_{\alpha,\beta})_0 = \begin{bmatrix} -\alpha & 0 \\ 0 & -\beta \end{bmatrix}. \quad (\text{B.17})$$

La matrice  $A_{\alpha,\beta}$  étant Hurwitz, on en déduit la stabilité du système linéarisé pour tout  $\alpha, \beta > 0$ . Il est alors habituellement possible de conclure quant à la stabilité du système non linéaire d'origine (B.9) via le Théorème B.5. Néanmoins, les conditions d'application du théorème ne sont pas réunies puisque le champ de vecteurs  $f_{\alpha,\beta}$  n'admet pas un développement de Taylor à l'ordre un au voisinage de 0. L'étude du paragraphe suivant va démontrer que la nature Hurwitz de  $A_{\alpha,\beta}$  ne permet pas de garantir la stabilité du système non linéaire au voisinage du point d'équilibre 0.

On se place dans le cas particulier où  $\alpha = \beta > 0$  et on se fixe une valeur non nulle  $\xi_0 \in \mathbb{R}^*$  arbitraire. On va alors chercher à analyser la solution de l'équation :

$$\dot{x} = f_{\alpha,\alpha}(x) \quad (\text{B.18a})$$

$$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_0 \\ -\xi_0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.18b})$$

Le résultat de simulation de ce problème pour  $\alpha = \beta = 0.45$  et  $\xi_0 = -10^{-6}$  est illustré à la Fig. B.1. Un résultat analogue est observé pour  $\xi_0$  choisi arbitrairement proche de zéro. Cela semble indiquer que le point d'équilibre  $(0,0)$  pour la configuration  $\alpha = \beta = 0.45$  est instable.

De manière à confirmer cette observation numérique, analysons l'équation différentielle étudiée. Soit  $x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix}^\top : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^2$  la solution globale de (B.18a-B.18b) pour  $\xi_0 \in \mathbb{R}^*$ . Posons alors  $s \triangleq x_1 + x_2 : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  qui vérifie  $\dot{s} = -\alpha s$  avec la condition initiale  $s(0) = 0$ . On en déduit donc que  $s \equiv 0$  d'où  $x_2 \equiv -x_1$ . On obtient alors :

$$\dot{x}_1 = -\alpha x_1 + \phi(x_1, -x_1) = \left(\frac{1}{2} - \alpha\right) x_1 \quad (\text{B.19a})$$

$$x_1(0) = \xi_0 \quad (\text{B.19b})$$

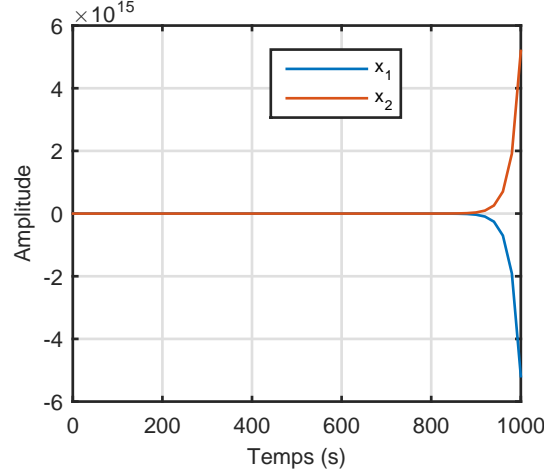


Figure B.1 Simulation de la solution de l'équation différentielle  $\dot{x} = f_{0.45,0.45}(x)$  pour les conditions initiales  $x_1(0) = -10^{-6}$  et  $x_2(0) = 10^{-6}$

et donc pour tout  $t \in [0, +\infty)$ ,

$$x_1(t) = \exp((1/2 - \alpha)t) \xi_0, \quad x_2(t) = -\exp((1/2 - \alpha)t) \xi_0. \quad (\text{B.20})$$

Ainsi, pour  $\alpha \in (0, 1/2)$ ,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} x_1(t) = \text{sgn}(\xi_0)\infty, \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} x_2(t) = -\text{sgn}(\xi_0)\infty. \quad (\text{B.21})$$

Puisque  $\xi_0 \in \mathbb{R}^*$  est arbitraire,  $(\xi_0, -\xi_0)$  peut être choisi arbitrairement proche du point d'équilibre  $(0, 0)$ . On en déduit donc que ce dernier est instable lorsque  $\alpha = \beta \in (0, 1/2)$ .

Bien que la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre soit Hurwitz, le système non linéaire est instable. Cet exemple démontre bien le caractère essentiel de l'existence d'un développement de Taylor à l'ordre un dans la démonstration du théorème de la première méthode de Lyapunov.

### B.2.2 Résultats existants dans la littérature

Comme mentionné en introduction, très peu de résultats portant sur une extension de la première méthode de Lyapunov sont reportés dans la littérature. La contribution la plus significative dans ce domaine est celle reportée dans (Lasota and Strauss, 1971) dont on relate ici les principaux résultats. Pour cela, on introduit la notion de différentielle homogène.

**Définition B.4 (Différentielle homogène)** Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ . On dit que  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  est une différentielle homogène de  $f$  (en 0) si :

1.  $h$  est continue ;
2.  $h$  est homogène, i.e.,  $h(\lambda x) = \lambda h(x)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  et  $\lambda > 0$  ;
3.  $\|f(x) - h(x)\|_2 / \|x\|_2 \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow 0} 0$  .

La notion de différentielle homogène étend la notion de différentielle usuelle puisque si  $f$  est différentiable en 0 (au sens usuel de Fréchet), alors par définition même  $h(x) = Jf_0 x$  et une différentielle homogène de  $f$ . On a en particulier les propriétés suivantes (Lasota and Strauss, 1971) :

1. Unicité de la différentielle homogène : si  $h_1$  et  $h_2$  sont des différentielles homogènes d'une même fonction  $f$  alors  $h_1 = h_2$ .
2. Si  $f$  est homogène alors elle est sa propre différentielle homogène.
3. Si  $f$  présente une différentielle homogène qui est non linéaire, alors  $f$  n'est pas différentiable au sens de Fréchet.
4. Si  $f$  est homogène et est différentiable au sens de Fréchet en 0, alors  $f$  est linéaire.

On peut alors introduire la version simplifiée du résultat présenté dans (Lasota and Strauss, 1971) sous la forme suivante.

**Théorème B.6** (Lasota and Strauss, 1971) Soit  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  dont on suppose 1) qu'elle est continue ; 2) qu'il existe  $L, \eta > 0$  tels que pour tout  $\|x\| < \eta$ ,  $\|f(x)\|_2 \leq L \|x\|_2$  ; 3) qu'elle admet une différentielle homogène  $h$ . Si toutes les solutions de  $\dot{z} = h(z)$  convergent vers zéro lorsque  $t$  tend vers  $+\infty$ , alors l'origine de  $\dot{x} = f(x)$  est (localement) exponentiellement stable.

Il est présenté dans (Lasota and Strauss, 1971) une version plus générale du théorème pour laquelle l'existence d'une différentielle homogène  $h$  n'est pas requise. Dans cette version, l'EDO  $\dot{z} = h(z)$  est alors remplacée par une inclusion différentielle  $\dot{z} \in D_f(z)$  où, pour tout  $z \in \mathbb{R}^n$ ,  $D_f(z)$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^n$  venant généraliser la notion de différentielle. Lorsque  $f$  admet une différentielle homogène  $h$ , on a  $D_f(z) = \{h(z)\}$ , retrouvant la configuration du Théorème B.6. Lorsque  $f$  est différentiable en 0, on a  $D_f(z) = \{J(f)_0 z\}$ . Dans ce dernier cas, on retombe sur la configuration usuelle découlant de la première méthode de Lyapunov.

En guise d'application du Théorème B.6, considérons l'exemple suivant.

**Exemple B.1** (Lasota and Strauss, 1971) Considérons le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $f(0) = 0$  et

$$\forall x = (x_1, x_2) \neq 0, \quad f(x) = \left( -\sin\left(\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\right), -\sin\left(\frac{x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right) \right). \quad (\text{B.22})$$

Il est aisé de voir que  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^2$  et continûment différentiable sur  $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ . Elle n'est par contre pas différentiable en 0, rendant inapplicable la première méthode de Lyapunov. Notons que,

$$\|f(x)\|_2^2 = \sin^2\left(\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\right) + \sin^2\left(\frac{x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right) \leq x_1^2 \left(\frac{x_1^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 + x_2^2 \left(\frac{x_2^2}{x_1^2 + x_2^2}\right)^2 \leq \|x\|_2^2. \quad (\text{B.23})$$

On cherche alors à calculer la différentielle homogène de  $f$ . En utilisant le développement de Taylor à l'ordre un de la fonction sinus et le fait que  $x_1^3/(x_1^2 + x_2^2) \xrightarrow{\|(x_1, x_2)\|_2 \rightarrow 0} 0$ , il est aisé de voir que

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{\|(x_1, x_2)\|_2} \left( \sin\left(\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\right) - \frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2} \right) \right| &= \left| \frac{1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} o\left(\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\right) \right| \\ &\leq \underbrace{\frac{|x_1|^3}{(x_1^2 + x_2^2)^{3/2}}}_{\leq 1} o(1) \xrightarrow{\|(x_1, x_2)\|_2 \rightarrow 0} 0. \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

En procédant de manière analogue pour le second terme, on en déduit que la différentielle homogène  $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $f$  est donnée par<sup>5</sup>  $h(0) = 0$  et

$$\forall x = (x_1, x_2) \neq 0, \quad h(x) = \left( -\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}, -\frac{x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \right). \quad (\text{B.25})$$

Afin d'appliquer le Théorème B.6, il reste à étudier le comportement des solutions de  $\dot{z} = h(z)$ . Pour cela, on introduit la fonction de Lyapunov continûment différentiable, définie positive et radialement non bornée  $V(x_1, x_2) = (x_1^2 + x_2^2)/2$  dont la dérivée de Lie le long des trajectoires du système est définie négative puisque pour tout  $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$ ,

$$\mathcal{L}_h V(x_1, x_2) = -\frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 + x_2^2} < 0. \quad (\text{B.26})$$

On déduit de la théorie générale des fonctions de Lyapunov (confère, e.g., (Khalil, 1996; Haddad and Chellaboina, 2008)) que l'origine de  $\dot{z} = h(z)$  est globalement asymptotiquement stable. On conclut du Théorème B.6 la stabilité exponentielle locale du système d'origine  $\dot{x} = f(x)$  en 0.

Le Théorème B.6 permet d'étendre la première méthode de Lyapunov au cas des fonctions admettant une différentielle homogène au point d'équilibre étudié. Cependant, ce théorème nécessite d'étudier la stabilité globale de l'équation différentielle d'un système auxiliaire, ce

---

5. La vérification de la continuité et de l'homogénéité est immédiate.

qui est une tâche en général bien plus complexe que la simple vérification des valeurs propres d'une matrice comme cela est le cas pour la première méthode de Lyapunov. De plus, ce théorème n'est pas d'une grande aide dans le cadre de l'étude de l'exemple illustratif (B.9). Il est en effet aisé de voir que le champ de vecteurs étudié  $f_{\alpha,\beta}$  est déjà homogène. Ainsi, l'équation auxiliaire du Théorème B.6 coïncide avec l'équation d'origine à savoir  $\dot{x} = f_{\alpha,\beta}(x)$ . Ces limitations poussent à la recherche de critères complémentaires.

### B.3 Critère de stabilité pour un champ de vecteurs admettant des dérivées directionnelles

Dans cette section, on cherche à étendre la première méthode de Lyapunov dans le cas de l'existence et de la régularité des dérivées directionnelles pour le champ de vecteurs étudié. En particulier, on va dans cette configuration établir l'existence et tirer profit d'un développement « directionnel » à l'ordre un de  $f$  au point d'équilibre étudié.

#### B.3.1 Développement « directionnel » à l'ordre un du champ de vecteur

**Lemme B.7** *Soient  $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs avec  $f(0) = 0$ . Soit  $R > 0$  tel que  $D(0, R) \subset D$ . Considérons la famille de fonctions  $(g_v : [0, R) \rightarrow \mathbb{R}^n)_{v \in \mathbb{S}^{n-1}}$  définie pour tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  et  $t \in [0, R)$  par  $g_v(t) = f(tv)$ . On formule les hypothèses suivantes.*

1. *Il existe  $r_0 > 0$  tel que pour tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ , la restriction de  $g_v$  sur l'intervalle  $[0, r_0)$ , notée  $g_v|_{[0, r_0)}$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*
2. *En notant  $g_v'|_{[0, r_0)}$  la dérivée de  $g_v|_{[0, r_0)}$ , la famille  $(g_v'|_{[0, r_0)})_{v \in \mathbb{S}^{n-1}}$  est équicontinue en 0, i.e.,*

$$\forall \epsilon > 0, \exists \eta > 0 / |\tau| \leq \eta \Rightarrow \forall v \in \mathbb{S}^{n-1}, \|g_v'|_{[0, r_0)}(\tau) - g_v'|_{[0, r_0)}(0)\|_2 \leq \epsilon. \quad (\text{B.27})$$

*Alors il existe une fonction  $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  telle que  $h(x) \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow 0} 0$  et vérifie :*

$$\forall x \in D, \quad f(x) = g_{v_x}'|_{[0, r_0)}(0) \|x\|_2 + h(x) \|x\|_2, \quad (\text{B.28})$$

*où pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $v_x = x / \|x\|_2$  et, par convention,  $v_0$  est un vecteur arbitraire de  $\mathbb{S}^{n-1}$ .*

**Démonstration.** En notant que  $g_v(0) = f(0) = 0$ , on déduit du fait que pour tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$

la fonction  $g_v$  est continûment dérivable que

$$\forall x \in D(0, r_0), \quad f(x) = f(\|x\|_2 v_x) = g_{v_x}(\|x\|_2) = \int_0^{\|x\|_2} g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(\tau) d\tau. \quad (\text{B.29})$$

Dès lors, pour tout  $x \in D(0, r_0)$ ,

$$\begin{aligned} \|f(x) - \|x\|_2 g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0)\|_2 &= \left\| \int_0^{\|x\|_2} g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(\tau) - g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0) d\tau \right\|_2 \\ &\leq \|x\|_2 \sup_{\tau \in [0, \|x\|_2]} \|g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(\tau) - g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0)\|_2. \end{aligned} \quad (\text{B.30})$$

Soit  $\epsilon > 0$ . Par équicontinuité de  $(g_v|'_{[0, r_0)})_{v \in \mathbb{S}^{n-1}}$  en 0, il existe  $\eta \in (0, r_0)$  tel que pour tout  $|\tau| \leq \eta$  et tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $\|g_v|'_{[0, r_0)}(\tau) - g_v|'_{[0, r_0)}(0)\|_2 \leq \epsilon$ . On en déduit alors que

$$\|x\|_2 \leq \eta \Rightarrow \|f(x) - g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0) \|x\|_2\|_2 \leq \epsilon \|x\|_2. \quad (\text{B.31})$$

En définissant indépendamment de  $\epsilon > 0$  la fonction  $h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  par

$$\forall x \in D, \quad h(x) = \begin{cases} \frac{f(x) - g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0) \|x\|_2}{\|x\|_2} & \text{si } x \neq 0; \\ 0 & \text{si } x = 0, \end{cases} \quad (\text{B.32})$$

on obtient que  $\|x\|_2 \leq \eta \Rightarrow \|h(x)\|_2 \leq \epsilon$ . Ainsi  $h(x) \xrightarrow{\|x\|_2 \rightarrow 0} 0$  et vérifie :

$$\forall x \in D, \quad f(x) = g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0) \|x\|_2 + h(x) \|x\|_2, \quad (\text{B.33})$$

ce qui termine la preuve.  $\square$

Le Lemme B.7 permet d'obtenir une forme généralisée d'un développement de Taylor à l'ordre un sous forme « directionnelle ». En effet, si  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de 0 avec  $f(0) = 0$ , le développement de Taylor à l'ordre un donne :

$$f(x) = J(f)_0 x + o(\|x\|_2). \quad (\text{B.34})$$

Le terme d'ordre 1 s'écrit sous la forme d'une matrice évaluée au point d'équilibre 0, multipliée par le vecteur  $x$ , représentant la déviation entre le point courant  $x$  et le point d'équilibre 0. Dans le cadre du développement « directionnel » du Lemme B.7, on remplace 1) la matrice Jacobienne évaluée au point d'équilibre 0 par la dérivée directionnelle  $g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0)$  dans la direction du vecteur  $x$  évaluée au même point d'équilibre; 2) la déviation entre le point

courant  $x$  et le point d'évaluation est remplacé par la déviation en norme  $\|x\|_2$ . Dans le cas d'une fonction  $\mathcal{C}^1$  au voisinage du point d'équilibre 0, le Lemme B.7 s'applique et permet de retrouver le développement de Taylor à l'ordre un usuel puisque  $g_{v_x}|'_{[0,r_0]}(0) = J(f)_0 v_x$  et donc  $\|x\|_2 g_{v_x}|'_{[0,r_0]}(0) = J(f)_0 x$ .

### B.3.2 Critères assurant la stabilité/instabilité du point d'équilibre

En se basant sur le développement directionnel présenté précédemment, on cherche à établir des critères permettant de garantir la stabilité ou l'instabilité du système au point d'équilibre étudié.

**Théorème B.8** *Soient  $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine et  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs localement lipschitzien tel que  $f(0) = 0$  et vérifiant les hypothèses du Lemme B.7. On suppose qu'il existe une matrice  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  telle que*

$$\sup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} v^\top P g_v|'_{[0,r_0]}(0) \triangleq -\gamma < 0. \quad (\text{B.35})$$

*Alors le système  $\dot{x} = f(x)$  est localement exponentiellement stable au voisinage du point d'équilibre 0.*

**Démonstration.** Puisque  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ , elle admet une unique racine carrée  $\sqrt{P} \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$ . Définissons la norme  $\|\cdot\|_{\sqrt{P}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  par  $\|x\|_{\sqrt{P}} = \|\sqrt{P}x\|_2$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .  $\mathbb{R}^n$  étant un  $\mathbb{R}$  espace vectoriel de dimension finie, il existe deux constantes<sup>6</sup>  $c_1, c_2 > 0$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_1 \|x\|_{\sqrt{P}} \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_{\sqrt{P}}$ . Définissons la fonction définie positive  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $V(x) = \|x\|_{\sqrt{P}}^2 / 2 = x^\top P x / 2$ . La dérivée de Lie le long des trajectoires du système est alors donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_f V(x) &= x^\top P f(x) = x^\top P g_{v_x}|'_{[0,r_0]}(0) \|x\|_2 + x^\top P h(x) \|x\|_2 \\ &= v_x^\top P g_{v_x}|'_{[0,r_0]}(0) \|x\|_2^2 + x^\top P h(x) \|x\|_2 \\ &\leq -2\gamma c_1^2 V(x) + x^\top P h(x) \|x\|_2. \end{aligned} \quad (\text{B.36})$$

L'ensemble  $D$  étant un ouvert, on fixe  $r > 0$  tel que  $D_{\|\cdot\|_2}(0, r] \subset D$ . Soit  $\epsilon \in (0, \gamma c_1^2 / (\|P\|_2 c_2^2))$  fixé. Il existe alors  $\eta \in (0, r)$  tel que  $\|x\|_2 < \eta \Rightarrow \|h(x)\|_2 < \epsilon$ . On en déduit que pour tout

---

6. Par exemple  $c_1 = \|\sqrt{P}\|_2^{-1}$  et  $c_2 = \left\|(\sqrt{P})^{-1}\right\|_2$ .

$x \in D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta)$ , et donc en particulier pour tout  $x \in D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2) \subset D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta)$ ,

$$\mathcal{L}_f V(x) \leq -2\gamma c_1^2 V(x) + \epsilon \|P\|_2 \|x\|_2^2 \leq -2 \underbrace{(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)}_{>0} V(x). \quad (\text{B.37})$$

Pour  $x_0 \in D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2)$  quelconque, la solution maximale<sup>7</sup> de  $\dot{x} = f(x)$  associée à cette condition initiale définie sur l'intervalle  $[0, t_1)$  avec  $t_1 \in (0, +\infty]$  vérifie  $x([0, t_1)) \subset D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2)$ . En effet, supposons par l'absurde que pour une condition initiale  $x_0 \in D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2)$  donnée non nulle<sup>8</sup>, il existe  $\tau \in [0, t_1)$  tel que  $\|x(\tau)\|_{\sqrt{P}} > \|x_0\|_{\sqrt{P}}$ . Posons alors  $t_0 = \inf\{t \in [0, t_1) : \|x(t)\|_{\sqrt{P}} > \|x_0\|_{\sqrt{P}}\}$ . On a, par continuité de  $x(t)$ ,  $\|x(t_0)\|_{\sqrt{P}} = \|x_0\|_{\sqrt{P}} < \eta/c_2$ . On déduit de (B.37) que  $\dot{V} \circ x(t_0) = \mathcal{L}_f V(x(t_0)) < 0$ . Ainsi, la fonction  $V \circ x$  est strictement décroissante dans un voisinage ouvert de  $t_0$ . En particulier, il existe  $t_2 > t_0$  tel que pour tout  $t \in [t_0, t_2)$ ,  $V(x(t)) \leq V(x(t_0))$ , c'est à dire que  $\|x(t)\|_{\sqrt{P}} \leq \|x_0\|_{\sqrt{P}}$ . On obtient alors, à la vue de la définition de  $t_0$ , une contradiction. On en déduit que pour tout  $t \in [0, t_0)$ ,  $\|x(t)\|_{\sqrt{P}} \leq \|x_0\|_{\sqrt{P}} < \eta/c_2$ . Ainsi, de (B.37) découle que pour  $x_0 \in D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2)$ ,

$$\forall t \in [0, t_1), \quad \dot{V} \circ x(t) \leq -2(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2) V \circ x(t). \quad (\text{B.38})$$

Après intégration, on obtient :

$$\forall t \in [0, t_1), \quad V(x(t)) \leq \exp(-2(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)t) V(x(0)), \quad (\text{B.39})$$

ce qui donne,

$$\forall t \in [0, t_1), \quad \|x(t)\|_{\sqrt{P}} \leq \exp(-(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)t) \|x(0)\|_{\sqrt{P}}. \quad (\text{B.40})$$

Ainsi, pour tout  $x_0 \in D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta c_1/c_2) \subset D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2)$ ,

$$\forall t \in [0, t_1), \quad \|x(t)\|_2 \leq \frac{c_2}{c_1} \exp(-(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)t) \|x(0)\|_2. \quad (\text{B.41})$$

La solution étant bornée sur  $[0, t_1)$  en norme  $\|\cdot\|_2$  par  $\frac{c_2}{c_1} \|x(0)\|_2 < \eta < r$ ,  $x([0, t_1)) \subset D_{\|\cdot\|_2}(0, r) \subset D$ , où  $D_{\|\cdot\|_2}(0, r]$  est un ensemble compact. Cela implique  $t_1 = +\infty$  (cf. Théorème B.3) et achève la preuve.  $\square$

Si l'on suppose la fonction  $f$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de 0, on rappelle que  $g_v|'_{[0, r_0)}(0) =$

7. L'existence d'une telle solution est garantie par le théorème de Cauchy-Lipschitz puisque  $f$  est supposée localement lipschitzienne.

8. Le cas  $x_0 = 0$  est immédiat car correspond à un point d'équilibre.



$J(f)_0 v$ . La condition d'application du (B.35) du Théorème B.8 devient donc

$$\sup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} v^\top P J(f)_0 v = \max_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} v^\top P J(f)_0 v < 0. \quad (\text{B.42})$$

Cela est alors équivalent au fait que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ,  $x^\top P J(f)_0 x < 0$ . Il s'agit donc de trouver une matrice  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  telle que  $P J(f)_0 + J(f)_0^\top P \in \mathcal{S}_n^{-*}$ . On retrouve la condition usuelle sous la forme d'une équation de Lyapunov.

Afin de faciliter sa vérification, la condition d'application (B.35) du Théorème B.8 peut être reformulée de la manière suivante par la paramétrisation de hypersphère unité.

**Lemme B.9** *Soit  $E_{n-1} = [0, \pi]^{n-2} \times [0, 2\pi]$ . Définissons pour tout  $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}) \in E_{n-1}$ ,  $u_\Theta = (u_{\Theta,1}, u_{\Theta,2}, \dots, u_{\Theta,n}) \in \mathbb{R}^n$  avec*

$$\forall i \in \{1, \dots, n-1\}, \quad u_{\Theta,i} = \left( \prod_{k=1}^{i-1} \sin(\theta_k) \right) \cos(\theta_i), \quad u_{\Theta,n} = \prod_{k=1}^{n-1} \sin(\theta_k). \quad (\text{B.43})$$

*Alors l'hypersphère unité est paramétrisée par  $u_\Theta$  puisque  $\mathbb{S}^{n-1} = \{u_\Theta, \Theta \in E_{n-1}\}$ . Ainsi la condition du (B.35) du Théorème B.8 devient :*

$$\sup_{\Theta \in E_{n-1}} u_\Theta^\top P g_{u_\Theta}|'_{[0,r_0]}(0) < 0. \quad (\text{B.44})$$

Une forme de réciproque faible du Théorème B.8 est donnée par le résultat suivant.

**Théorème B.10** *Soient  $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs localement lipschitzien tel que  $f(0) = 0$  et vérifiant les hypothèses du Lemme B.7. Supposons que l'une des deux hypothèses suivantes est vérifiée pour l'équation différentielle  $\dot{x} = f(x)$ .*

1. *Le point d'équilibre  $x = 0$  est localement quadratiquement stable, i.e., il existe  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  telle que  $V(x) = x^\top P x / 2$  soit une fonction de Lyapunov.*
2. *Il existe une fonction de Lyapunov  $V$  de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $x = 0$ .*

*Alors il existe une matrice  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  (respectivement  $P \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ ) telle que*

$$\sup_{v \in \mathbb{S}^{n-1}} v^\top P g_v|'_{[0,r_0]}(0) \leq 0. \quad (\text{B.45})$$

**Démonstration.** Dans le premier cas, il existe une matrice  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  telle que  $V(x) = x^\top P x / 2$  est une fonction de Lyapunov. Par définition, il existe  $\eta > 0$  tel que pour tout

$x \in D(0, \eta) \subset D$ ,  $\mathcal{L}_f V(x) \leq 0$ . Sur la base du Lemme B.7, on a

$$\forall x \in D, \quad \mathcal{L}_f V(x) = x^\top P f(x) = v_x^\top P g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0) \|x\|_2^2 + x^\top P h(x) \|x\|_2. \quad (\text{B.46})$$

Ainsi au voisinage de 0 on a

$$\mathcal{L}_f V(x) = v_x^\top P g_{v_x}|'_{[0, r_0)}(0) \|x\|_2^2 + o(\|x\|_2^2). \quad (\text{B.47})$$

Supposons qu'il existe  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que  $v^\top P g_v|'_{[0, r_0)}(0) > 0$ . Pour  $x = \epsilon v$  on obtient alors

$$\mathcal{L}_f V(\epsilon v) = \epsilon^2 \{v^\top P g_v|'_{[0, r_0)}(0) + o(1)\}, \quad (\text{B.48})$$

ce qui pour  $\epsilon$  arbitrairement proche de  $0^+$  contredit la condition  $\|x\|_2 < \eta \Rightarrow \mathcal{L}_f V(x) \leq 0$ . Par contradiction, on en déduit que pour tout vecteur  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $v^\top P g_v|'_{[0, r_0)}(0) \leq 0$ .

Dans le second cas,  $V$  admet au voisinage de  $x = 0$  un développement de Taylor à l'ordre 2 :

$$V(x) = V(0) + \nabla V(0)^\top x + \frac{1}{2} x^\top \mathcal{H}V(0) x + o(\|x\|_2^2), \quad (\text{B.49})$$

où  $\nabla V(0) \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathcal{H}V(0) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  dénotent respectivement le gradient et la hessienne de  $V$  en 0. Puisque  $V$  est une fonction de Lyapunov,  $V(0) = 0$  et il existe  $\eta > 0$  tel que  $0 < \|x\|_2 < \eta \Rightarrow V(x) > 0$ . On en déduit que  $\nabla V(0) = 0$  (prendre  $x = -\epsilon \nabla V(0)$  dans le développement de Taylor précédent avec  $\epsilon$  arbitrairement proche de  $0^+$ ). On obtient donc que

$$V(x) = \frac{1}{2} x^\top \mathcal{H}V(0) x + o(\|x\|_2^2), \quad (\text{B.50})$$

où, puisque  $V$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  au voisinage de  $x = 0$ ,  $\mathcal{H}V(0) \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$  par le théorème de Schwarz. Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $\mathcal{H}V(0)$ , qui est nécessairement réelle puisque la matrice est symétrique, et  $x_\lambda \in \mathbb{R}^n$  un vecteur propre unitaire associé. On a donc que pour tout  $\epsilon > 0$ ,

$$V(\epsilon x_\lambda) = \epsilon^2 \{\lambda/2 + o(1)\}. \quad (\text{B.51})$$

En utilisant une nouvelle fois que  $0 < \|x\|_2 < \eta \Rightarrow V(x) > 0$ , on a que  $\lambda \geq 0$  et donc  $\mathcal{H}V(0) \in \mathcal{S}_n^+(\mathbb{R})$ . De plus, en notant que

$$\nabla V(x) = \mathcal{H}V(0) x + o(\|x\|_2), \quad (\text{B.52})$$

et sur la base du Lemme B.7, on a que pour tout  $x \in D$ ,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f V(x) &= \nabla V(x)^\top f(x) \\ &= (\mathcal{H}V(0)x + o(\|x\|_2))^\top \left( g_v|'_{[0,r_0)}(0) \|x\|_2 + o(\|x\|_2) \right).\end{aligned}\quad (\text{B.53})$$

Supposons qu'il existe  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$  tel que  $v^\top \mathcal{H}V(0) g_v|'_{[0,r_0)}(0) > 0$ . En injectant  $x = \epsilon v$  dans le développement limité précédent, on obtient que

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_f V(\epsilon v) &= \epsilon (\mathcal{H}V(0)v + o(1))^\top \times \epsilon \left( g_v|'_{[0,r_0)}(0) + o(1) \right) \\ &= \epsilon^2 \{v^\top \mathcal{H}V(0) g_v|'_{[0,r_0)}(0) + o(1)\}.\end{aligned}\quad (\text{B.54})$$

Il existe donc  $\eta' > 0$  tel que  $0 < \epsilon < \eta' \Rightarrow \mathcal{L}_f V(\epsilon v) > 0$ , ce qui contredit l'hypothèse selon laquelle  $V$  est une fonction de Lyapounov pour le point d'équilibre  $x = 0$ . Par contradiction, on obtient que pour tout  $v \in \mathbb{S}^{n-1}$ ,  $v^\top \mathcal{H}V(0) g_v|'_{[0,r_0)}(0) \leq 0$ .  $\square$

Dans le cas contraire, l'instabilité de l'origine peut être assurée par le théorème suivant :

**Théorème B.11** *Soient  $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine et  $f : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  un champ de vecteurs localement lipschitzien tel que  $f(0) = 0$  et vérifiant les hypothèses du Lemme B.7. Soit  $\{0\} \subsetneq M \subset D$  un ensemble connexe par arc et positivement invariant<sup>9</sup>. Pour tout  $R > 0$ , posons  $S_R = \{x/\|x\|_2 : x \in (M \setminus \{0\}) \cap D_{\|\cdot\|_2}(0, R)\} \subset \mathbb{S}^{n-1}$ . S'il existe  $R_0 > 0$  et  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  tels que*

$$\inf_{v \in S_{R_0}} v^\top P g_v|'_{[0,r_0)}(0) = \gamma > 0, \quad (\text{B.55})$$

*alors  $\dot{x} = f(x)$  est instable à l'origine.*

**Démonstration** Supposons qu'il existe  $R_0 > 0$  et  $P \in \mathcal{S}_n^{+*}(\mathbb{R})$  tels que (B.55) soit vérifiée. Comme précédemment, on considère la norme définie par  $\|x\|_{\sqrt{P}} = \|\sqrt{P}x\|_2$ , ainsi que deux constantes  $c_1, c_2 > 0$  telles que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $c_1 \|x\|_{\sqrt{P}} \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_{\sqrt{P}}$ . Définissons la fonction définie positive  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $V(x) = \|x\|_{\sqrt{P}}^2/2 = x^\top P x/2$ . Soient  $r > 0$  tel que  $D_{\|\cdot\|_2}(0, r] \subset D$  et  $\epsilon \in (0, \gamma c_1^2/( \|P\|_2 c_2^2))$ . Soit la fonction  $h$  telle que fournie par le Lemme B.7. Puisque  $h(x) \rightarrow 0$  lorsque  $x \rightarrow 0$ , il existe  $\eta \in (0, \min(r, R_0))$  tel que  $\|x\|_2 < \eta \Rightarrow \|h(x)\|_2 < \epsilon$ . Pour tout  $x \in D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta)$ , on a que la dérivée de Lie de  $V$  le

---

9. i.e., pour tout  $x_0 \in M$ , la solution de  $\dot{x} = f(x)$  telle que  $x(0) = x_0$  vérifie  $x(t) \in M$  pour tout  $t \in \mathbb{R}_+$ .

long des trajectoires du système vérifie :

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_f V(x) &= x^\top P f(x) = x^\top P g_{v_x}|'_{[0,r_0)}(0) \|x\|_2 + x^\top P h(x) \|x\|_2 \\
&= v_x^\top P g_{v_x}|'_{[0,r_0)}(0) \|x\|_2^2 + x^\top P h(x) \|x\|_2 \\
&\geq (v_x^\top P g_{v_x}|'_{[0,r_0)}(0) - \epsilon \|P\|_2) \|x\|_2^2.
\end{aligned} \tag{B.56}$$

Puisque  $\eta \leq R_0$ , on a que  $S_\eta \subset S_{R_0}$  et donc

$$\inf_{v \in S_\eta} v^\top P g_v|'_{[0,r_0)}(0) \geq \inf_{v \in S_{R_0}} v^\top P g_v|'_{[0,r_0)}(0) = \gamma > 0. \tag{B.57}$$

Ainsi, pour tout  $x \in M \cap D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta)$ ,

$$\mathcal{L}_f V(x) \geq (\gamma - \epsilon \|P\|_2) \|x\|_2^2 \geq (\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2) \|x\|_{\sqrt{P}}^2 \geq \underbrace{2(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)}_{>0} V(x). \tag{B.58}$$

Fixons  $\epsilon' = \eta/c_2$  et supposons que l'origine est un point d'équilibre stable. Il existe alors  $\eta' > 0$  tel que pour toute condition initiale  $\|x_0\|_{\sqrt{P}} < \eta'$ , la solution de  $\dot{x} = f(x)$  avec  $x(0) = x_0$  est définie sur  $\mathbb{R}_+$  et pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|x(t)\|_{\sqrt{P}} < \eta/c_2$ . Ainsi,  $\|x_0\|_{\sqrt{P}} < \eta' \Rightarrow x(\mathbb{R}_+) \subset D_{\sqrt{P}}(0, \eta/c_2)$ .

Montrons que  $(M \setminus \{0\}) \cap D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta') \neq \emptyset$ . Soit  $a \in M \setminus \{0\}$  (qui n'est pas vide par hypothèse). Si  $\|a\|_{\sqrt{P}} < \eta'$ , on a l'élément recherché. Sinon,  $\|a\|_{\sqrt{P}} \geq \eta'$ . L'ensemble  $M$  étant supposé connexe par arc, il existe une fonction continue  $\phi : [0, 1] \rightarrow M$  telle que  $\phi(0) = 0$  et  $\phi(1) = a$ . La fonction  $\|\cdot\|_{\sqrt{P}} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}_+$  étant continue,  $\|\cdot\|_{\sqrt{P}} \circ \phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction continue telle que  $\|\phi(0)\|_{\sqrt{P}} = 0$  et  $\|\phi(1)\|_{\sqrt{P}} = \|a\|_{\sqrt{P}} \geq \eta' > 0$ . Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe  $t_0 \in (0, 1)$  tel que  $\|\phi(t_0)\|_{\sqrt{P}} \in (0, \eta')$ . En choisissant  $x_0 = \phi(t_0) \in M \setminus \{0\}$ , on a que  $x_0 \in (M \setminus \{0\}) \cap D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta')$ .

Fixons alors un  $x_0 \in (M \setminus \{0\}) \cap D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta')$  et considérons la solution maximale associée à cette condition initiale. Les développements précédents assurent que la solution est définie sur  $\mathbb{R}_+$  et que  $x(\mathbb{R}_+) \subset D_{\|\cdot\|_{\sqrt{P}}}(0, \eta/c_2) \subset D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta)$ . De plus,  $M$  étant positivement invariant avec  $x_0 \in M$ , on obtient que  $x(\mathbb{R}_+) \subset M$ . Ainsi,  $x(\mathbb{R}_+) \subset M \cap D_{\|\cdot\|_2}(0, \eta)$ . On déduit de (B.58) que

$$\forall t \geq 0, \quad \overbrace{V \circ x}^{\cdot}(t) \geq 2(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2) V \circ x(t). \tag{B.59}$$

Après intégration on obtient que

$$\forall t \geq 0, \quad V(x(t)) \geq \exp(2(\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)t) V(x_0). \tag{B.60}$$

Puisque,  $V(x(t)) = \|x(t)\|_{\sqrt{P}}^2/2$  avec  $x_0 \neq 0$ , on obtient finalement que

$$\forall t \geq 0, \quad \|x(t)\|_{\sqrt{P}} \geq \exp((\gamma c_1^2 - \epsilon \|P\|_2 c_2^2)t) \|x_0\|_{\sqrt{P}} \xrightarrow{t \rightarrow +\infty} +\infty. \quad (\text{B.61})$$

Cela contredit le fait que  $x(\mathbb{R}_+) \subset D_{\sqrt{P}}(0, \eta/c_2)$ . On en déduit que l'origine est bien un point d'équilibre instable.  $\square$

### B.3.3 Applications

Revenons tout d'abord sur l'Exemple B.1 qui a été utilisé dans (Lasota and Strauss, 1971) afin d'illustrer le Théorème B.6.

**Exemple B.2** *Considérons à nouveau le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par  $f(0) = 0$  et*

$$\forall x = (x_1, x_2) \neq 0, \quad f(x) = \left( -\sin\left(\frac{x_1^3}{x_1^2 + x_2^2}\right), -\sin\left(\frac{x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}\right) \right). \quad (\text{B.62})$$

*Il est aisé de montrer que la différentielle de  $f$  est bornée en norme 2 sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  par une constante  $K > 0$ . L'inégalité des accroissements finis garanti alors que  $0 \notin [x, y] \Rightarrow \|f(x) - f(y)\|_2 \leq K \|x - y\|_2$ . Lorsque  $0 \in [x, y]$ , on a  $\|x - y\|_2 = \|x\|_2 + \|y\|_2$ , donnant lieu à l'inégalité  $\|f(x) - f(y)\|_2 \leq \|f(x)\|_2 + \|f(y)\|_2 \leq \|x\|_2 + \|y\|_2 \leq \|x - y\|_2$ . On en déduit donc que le champ de vecteurs  $f$  est globalement lipschitzien.*

*En introduisant pour tout  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{S}^1$  et  $t \geq 0$ ,  $g_v(t) = f(vt) = (-\sin(tv_1^3), -\sin(tv_2^3))$ ,  $g_v$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}_+$  avec  $g'_v(t) = (-v_1^3 \cos(tv_1^3), -v_2^3 \cos(tv_2^3))$ . En notant que pour  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{S}^1$  on a  $|v_1|, |v_2| \leq 1$ , on déduit que pour  $\tau \in [0, \pi/2)$ ,*

$$\begin{aligned} \|g'_v(\tau) - g'_v(0)\|_2^2 &= \left\| v_1^3(1 - \cos(\tau v_1^3)), v_2^3(1 - \cos(\tau v_2^3)) \right\|_2^2 \\ &= v_1^6(1 - \cos(\tau v_1^3))^2 + v_2^6(1 - \cos(\tau v_2^3))^2 \\ &\leq 2(1 - \cos(\tau))^2 \xrightarrow{\tau \rightarrow 0^+} 0. \end{aligned} \quad (\text{B.63})$$

*Puisque le dernier terme de l'inégalité est indépendant de  $v \in \mathbb{S}^1$ , on en déduit l'équicontinuité de  $(g_v)_{v \in \mathbb{S}^1}$  en 0. Finalement, en prenant  $P = I_2$  et en utilisation la paramétrisation du cercle unité, on a que pour tout  $v = (\cos(\theta), \sin(\theta)) \in \mathbb{S}^1$  avec  $\theta \in [0, 2\pi)$ ,*

$$\begin{aligned} v^\top P g'_v(0) &= -\cos^4(\theta) - \sin^4(\theta) = -(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))^2 + 2\cos^2(\theta)\sin^2(\theta) = -1 + \frac{1}{2}\sin^2(2\theta) \\ &\leq -\frac{1}{2}. \end{aligned} \quad (\text{B.64})$$

*On peut alors appliquer le Théorème B.8 afin de conclure la stabilité exponentielle locale de*

*l'origine du système. On aboutit ainsi au même résultat que lors de l'application du Théorème B.6 sans avoir à étudier la stabilité globale des trajectoires d'un système auxiliaire.*

Revenons à présent sur le cas de l'exemple illustratif de la Sous-section B. On cherche à déterminer les couples  $(\alpha, \beta) \in (\mathbb{R}_+^*)^2$  tels que le système (B.9) est stable à l'origine. On introduit :

$$\forall v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^1, \quad \forall t \geq 0, \quad g_v(t) = f(tv) = \begin{bmatrix} -\alpha tv_1 + tv_1 v_2^2 \\ -\beta tv_2 - tv_1 v_2^2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.65})$$

Les conditions d'application du Lemme B.7 sont vérifiées. En effet 1) les fonctions  $g_v$  sont continûment dérivables sur  $\mathbb{R}_+$  :

$$\forall v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{S}^1, \quad \forall t \geq 0, \quad g'_v(t) = \begin{bmatrix} -\alpha v_1 + v_1 v_2^2 \\ -\beta v_2 - v_1 v_2^2 \end{bmatrix}; \quad (\text{B.66})$$

2) ces dernières étant constantes sur  $\mathbb{R}_+$ ,  $(g_v)_{v \in \mathbb{S}^1}$  est équicontinue en 0. En paramétrant  $\mathbb{S}^1$  avec les coordonnées  $v_1 = \cos(\theta)$  et  $v_2 = \sin(\theta)$  pour  $\theta \in [0, 2\pi]$ , la condition d'application du Théorème B.8 consiste à trouver  $P \in \mathcal{S}_2^{+*}(\mathbb{R})$  telle que

$$\max_{\theta \in [0, 2\pi]} \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{11} & P_{12} \\ P_{12} & P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\alpha \cos(\theta) + \cos(\theta) \sin^2(\theta) \\ -\beta \sin(\theta) - \cos(\theta) \sin^2(\theta) \end{bmatrix} < 0, \quad (\text{B.67})$$

où les coefficients de la matrice  $P$  doivent vérifier que  $P_{11} > 0$  et  $P_{11}P_{22} - P_{12}^2 > 0$  (ensemble des mineurs principaux de la matrice strictements positifs).

Les résultats obtenus sont illustrés à la Fig. B.2. L'application du Théorème B.8 pour  $P = I_2$  permet de conclure de la stabilité du système pour un grand nombre de valeurs du couple  $(\alpha, \beta)$  (Fig. B.2(a)). Néanmoins, l'application du Théorème B.8 pour une unique valeur de la matrice  $P$  fournit des résultats conservateurs. En effet, l'application du Théorème B.8 pour par exemple  $P = \text{diag}(0.2, 1)$  permet de modifier la zone sur laquelle la stabilité du point d'équilibre est garantie (Fig. B.2(b)), en incluant des couples  $(\alpha, \beta)$  pour lesquels la stabilité n'avait pas pu être établie avec  $P = I_2$  (par exemple  $\alpha = 0.2$  et  $\beta = 0.6$ ). Afin de réduire le conservatisme et de cumuler les résultats obtenus, le Théorème B.2 a été appliqué pour 400 matrices  $P \in \mathcal{S}_2^{+*}(\mathbb{R})$ . Le résultat obtenu est illustré à la Fig. B.2(c). Ainsi, non seulement le résultat obtenu englobe ceux des Fig. B.2(a) et Fig. B.2(b), mais il permet d'affiner la zone du plan pour laquelle les couples  $(\alpha, \beta)$  donnent lieu à un point d'équilibre stable. Ces résultats sont conformes avec ce qui avait été obtenu lors de l'analyse préliminaire, i.e., l'instabilité de l'origine lorsque  $0 < \alpha = \beta < 1/2$ .

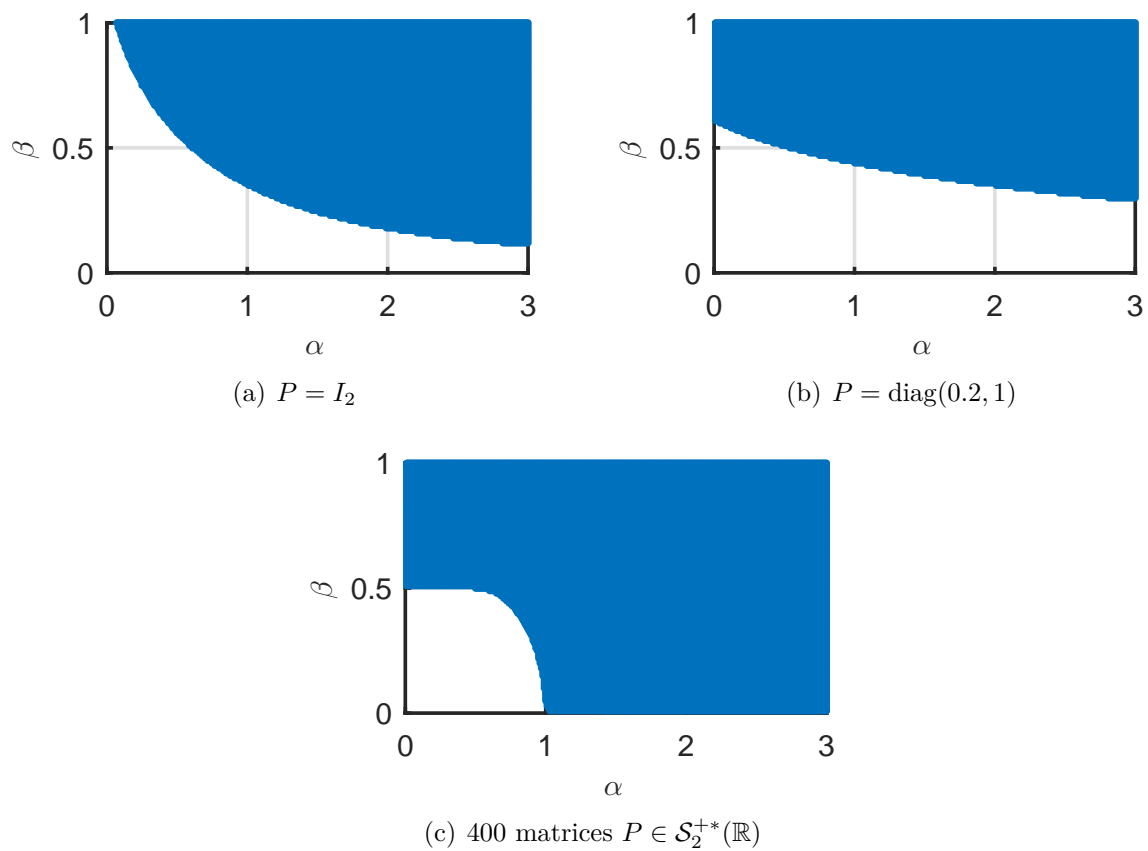


Figure B.2 Couples  $(\alpha, \beta)$  pour lesquels la stabilité de l'origine du système  $\dot{x} = f_{\alpha, \beta}(x)$  a été établie par application du Théorème B.8 (zones en bleu)

## B.4 Champs de vecteurs non continûment différentiable admettant un développement de Taylor à l'ordre un

Dans cette section, on étudie une famille de champs de vecteurs qui ne sont pas de classe  $\mathcal{C}^1$  mais qui sont localement lipschitziens et Fréchet différentiables au point d'équilibre étudié. De tels champs de vecteurs sont d'intérêt puisque s'y applique la première méthode de Lyapunov. Cela provient du fait que la régularité  $\mathcal{C}^1$  est une condition suffisante mais non nécessaire de l'existence d'un développement de Taylor à l'ordre un, comme cela est illustré par l'exemple développé ci-dessous.

### B.4.1 Exemple illustratif

Considérons à titre d'exemple le champ de vecteurs  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  défini par

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x) = \begin{bmatrix} -x_1 + |x_1| x_2 \\ -x_2 \end{bmatrix}. \quad (\text{B.68})$$

Montrons dans un premier temps que la fonction  $f$  est localement lipschitzienne. Posons pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ ,  $f_+(x) = (-x_1 + x_1 x_2, -x_2)$  et  $f_-(x) = (-x_1 - x_1 x_2, -x_2)$ . Ainsi pour  $x_1 \geq 0$  on a que  $f(x_1, x_2) = f_+(x_1, x_2)$ , alors que pour  $x_1 \leq 0$  on a que  $f(x_1, x_2) = f_-(x_1, x_2)$ . Les fonctions  $f_+$  et  $f_-$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $\mathbb{R}^2$ , il existe pour tout  $M > 0$  des constantes  $K_{+,M}, K_{-,M} \in \mathbb{R}_+$  telles que pour tout  $x, y \in [-M, M]^2$ ,  $x_1, y_1 \geq 0 \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_2 \leq K_{+,M} \|y - x\|_2$  et  $x_1, y_1 \leq 0 \Rightarrow \|f(y) - f(x)\|_2 \leq K_{-,M} \|y - x\|_2$ . Dans le cas où  $y_1 x_1 < 0$ , le segment  $[x, y]$  coupe l'axe généré par la seconde coordonnée en un unique point donné par  $z = (0, x_2 - x_1(y_2 - x_2)/(y_1 - x_1))$ . L'inégalité de Lipschitz est vérifiée sur le segment  $[x, z]$  pour la constante  $K_{-,M}$ , alors qu'elle l'est pour la constante  $K_{+,M}$  sur le segment  $[z, y]$ . En posant  $K_M = \max(K_{-,M}, K_{+,M})$ , on en déduit que

$$\|f(y) - f(x)\|_2 \leq \|f(y) - f(z)\|_2 + \|f(z) - f(x)\|_2 \leq K_M (\|y - z\|_2 + \|z - x\|_2). \quad (\text{B.69})$$

Puisque  $z \in [x, y]$  on vérifie que  $\|y - z\|_2 + \|z - x\|_2 = \|y - x\|_2$ . On obtient donc la majoration  $\|f(y) - f(x)\|_2 \leq K_M \|y - x\|_2$ . Cette inégalité étant vérifiée pour tout  $x, y \in [-M, M]^2$ , on en déduit que pour tout  $M > 0$ , la fonction  $f|_{[-M, M]^2}$  est lipschitzienne et donc que  $f$  est localement lipschitzienne.

La fonction  $f$  n'admet pas de dérivée partielle par rapport à  $x_1$  aux points  $(0, x_2)$  avec  $x_2 \neq 0$  dû à la présence de la valeur absolue. Elle ne peut donc pas être de classe  $\mathcal{C}^1$  au voisinage de



l'origine. Elle admet néanmoins un développement de Taylor à l'ordre un en 0 puisque :

$$\forall x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \|f(x) + I_2 x\|_2 = \left\| \begin{bmatrix} |x_1| x_2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2 = |x_1 x_2| \leq \frac{1}{2} \|(x_1, x_2)\|_2^2, \quad (\text{B.70})$$

dont on déduit que  $\|f(x) + I_2 x\|_2 / \|(x_1, x_2)\|_2 \rightarrow 0$  lorsque  $\|(x_1, x_2)\|_2 \rightarrow 0$ . Ainsi  $f$  admet bien un développement de Taylor à l'ordre un avec pour jacobienne  $J(f)_0 = -I_2$  qui est Hurwitz. La première méthode de Lyapunov permet de conclure la stabilité de l'origine du système  $\dot{x} = f(x)$ .

#### B.4.2 Cas général

Pour  $n \in \mathbb{N}^*$ , soit  $\mathcal{U}^n = \{-1, +1\}^n$ . On associe à un élément  $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n) \in \mathcal{U}^n$  l'ensemble  $\mathbb{R}_\mu^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : \forall i \in \{1, \dots, n\}, \mu_i x_i \geq 0\}$  et pour tout  $r > 0$ ,  $D_\mu(0, r) = D(0, r) \cap \mathbb{R}_\mu^n$ . Soit  $e_i$  le  $i$ -ème vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^n$ .

**Lemme B.12** *Soit  $0 \in D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine. Soient  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions continues avec  $g$  de classe  $\mathcal{C}^1$  dan un voisinage ouvert de l'origine et  $g(0) = 0$ . Supposons qu'il existe  $r > 0$  avec  $D(0, r] \subset D$  tel que pour tout  $\mu \in \mathcal{U}^n$  :*

- (A1)  $f|_{D_\mu(0, r)}$ , notée plus simplement  $f_\mu$ , est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $D_\mu(0, r) \setminus \{0\}$  avec matrice jacobienne bornée ;
- (A2) pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , la fonction  $(0, r) \ni t \rightarrow \partial f_\mu / \partial x_j(t \mu_j e_j)$  admet une limite en  $0^+$ .

Alors  $f \times g$  admet un développement de Taylor à l'ordre un en 0 donné par :

$$f(x)g(x) = f(0)\nabla g(0)^\top x + o(\|x\|_2). \quad (\text{B.71})$$

**Démonstration.** Fixons de manière arbitraire  $\mu \in \mathcal{U}^n$ . L'hypothèse (A2) assure, en vertu du théorème de prolongement de la dérivée, que la fonction  $[0, r) \ni t \rightarrow f_\mu(t \mu_j e_j)$  est dérivable en 0 et que la fonction dérivée est, sur la base de (A1), continue sur  $[0, r)$ . Ainsi,  $f_\mu$  admet des dérivées partielles en 0 qui sont tels que  $(\partial f_\mu / \partial x_j)|_{[0, r) \mu_j e_j}$  sont continues et donc bornées sur le compact  $[0, r/2] \mu_j e_j \subset \mathbb{R}_\mu^n$ . De plus, pour tout  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_\mu^n$  tel que  $\|x\|_2 < r$ ,

$$\begin{aligned} f(x) &= f(0) + \sum_{j=1}^n \left\{ f \left( \sum_{k=n+1-j}^n x_k e_k \right) - f \left( \sum_{k=n+2-j}^n x_k e_k \right) \right\} \\ &= f(0) + \sum_{j=1}^n \int_0^{x_{n+1-j}} \left( \frac{\partial f_\mu}{\partial x_{n+1-j}} \right) \left( \tau e_{n+1-j} + \sum_{k=n+2-j}^n x_k e_k \right) d\tau. \end{aligned} \quad (\text{B.72})$$

L'hypothèse (A1) garantit que les dérivées partielles de  $f_\mu$  sont bornées sur  $D_\mu(0, r) \setminus \{0\}$ .

De plus, il a été montré que les dérivées partielles sont également bornées le long des demi-axes (i.e.,  $\mathbb{R}_+ \mu_j e_j$  avec  $j \in \{1, \dots, n\}$ ) pour  $\|x\|_2 < r/2$ . On en déduit donc qu'il existe une constante  $M_\mu \geq 0$  telle que

$$\forall x \in \mathbb{R}_\mu^n, \quad \|x\|_2 < r/2 \Rightarrow |f(x) - f(0)| \leq M_\mu \|x\|_2. \quad (\text{B.73})$$

Ce résultat étant valable pour tout  $\mu \in \mathcal{U}^n$ , on obtient que pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$  tel que  $\|x\|_2 < r/2$ ,  $|f(x) - f(0)| \leq M \|x\|_2$  où  $M = \max\{M_\mu : \mu \in \mathcal{U}^n\}$  (le maximum existe puisque  $\text{Card}(\mathcal{U}^n) = 2^n < +\infty$ ). Donc, dans un voisinage ouvert de l'origine :

$$f(x) = f(0) + \mathcal{O}(\|x\|_2). \quad (\text{B.74})$$

La fonction  $g$  étant de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage de l'origine avec  $g(0) = 0$ , elle admet le développement de Taylor à l'ordre un suivant :

$$g(x) = \nabla g(0)^\top x + o(\|x\|_2). \quad (\text{B.75})$$

Finalement, on obtient le résultat escompté puisque

$$f(x)g(x) = f(0)\nabla g(0)^\top x + \underbrace{\left\{ \mathcal{O}(\|x\|_2) \times \nabla g(0)^\top x + o(\|x\|_2) \right\}}_{=o(\|x\|_2)}. \quad (\text{B.76})$$

□

Le produit de Hadamard de deux matrices  $U, V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , noté  $U \cdot V \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , est la matrice dont les coefficients sont tels que  $(U \cdot V)_{i,j} = (U)_{i,j}(V)_{i,j}$ .

**Théorème B.13** *Soit  $0 \in D$  un domaine. Soient  $f, g, h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  trois champs de vecteurs avec  $g(0) = h(0) = 0$  et tels que pour tout  $i \in \{1, \dots, n\}$ , la  $i$ -ème composante  $f_i$  et  $g_i$  des fonctions  $f$  et  $g$  vérifient les hypothèses du Lemme B.12. De plus, supposons que  $f \cdot g + h$  est localement lipschitzien,  $h$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  dans un voisinage ouvert de l'origine, et la matrice*

$$A \triangleq J(f(0) \cdot g + h)_0 = J(f(0) \cdot g)_0 + J(h)_0 \quad (\text{B.77})$$

*est Hurwitz. Alors le système  $\dot{x} = f(x) \cdot g(x) + h(x)$  est localement exponentiellement stable à l'origine.*

**Démonstration.** Sur la base du Lemme B.12, la fonction  $f \cdot g + h$  admet le développement

de Taylor à l'ordre un à l'origine suivant :

$$f(x) \cdot g(x) + h(x) = Ax + o(\|x\|_2). \quad (\text{B.78})$$

La conclusion découle de la première méthode de Lyapunov (Théorème B.5 pour les hypothèses du champ de vecteurs localement lipschitzien avec développement de Taylor à l'ordre un au point d'équilibre étudié.).  $\square$

En particulier, le Théorème B.13 s'applique à l'exemple de la Sous-section B. Plus généralement, toute fonction  $f$  de la forme  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \psi(|x_1|, |x_2|, \dots, |x_n|)$  où  $\psi$  est continûment différentiable satisfait les hypothèses de régularité du Théorème B.13.

## ANNEXE C    NON LINÉARISABILITÉ PAR RETOUR DE SORTIE DU MODÈLE BACT

L'objectif de cette annexe est de montrer que le modèle du BACT, lorsqu'une seule entrée de commande est considérée, n'est pas linéarisable par retour de sortie. En d'autres termes, toute technique de commande basée sur la technique de linéarisation par retour de sortie ne peut permettre de commander la globalité de la dynamique du système. De manière à démontrer cette propriété, des résultats généraux bien connus sur le contrôlabilité des systèmes sont rappelés.

### C.1 Rappels sur la linéarisation par retour de sortie

**Définition C.1 (Khalil (1996))** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine, i.e., un sous-ensemble ouvert et connecté de  $\mathbb{R}^n$ . Un système mono-entrée*

$$\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u, \quad (\text{C.1})$$

*où  $f, g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , est dit linéarisable par retour de sortie s'il existe un difféomorphisme  $T : D \rightarrow \mathbb{R}^n$  tels que  $\mathbf{0} \in T(D)$  et le changement de variable  $\mathbf{z} = T(\mathbf{x})$  vérifie*

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{A}\mathbf{z} + \mathbf{B}\gamma(\mathbf{x})[u - \alpha(\mathbf{x})] \quad (\text{C.2})$$

*avec  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^n$ , la paire  $(\mathbf{A}, \mathbf{B})$  est contrôlable,  $\alpha, \gamma : D \rightarrow \mathbb{R}$  et pour tout  $\mathbf{x} \in D$ ,  $\gamma(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$ .*

Avant d'introduire un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante permettant d'assurer la linéarisabilité par retour de sortie lorsque les fonctions  $f$  et  $g$  sont suffisamment régulières, on procède à quelques rappels préliminaires sur la notion de distribution de champs de vecteurs.

**Définition C.2** *Soit  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine. Pour des champs de vecteurs  $f_1, f_2, \dots, f_k : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ , on définit pour tout  $\mathbf{x} \in D$ ,*

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}) = \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1(\mathbf{x}), f_2(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (\text{C.3})$$

*La collection de l'ensemble des espaces vectoriels  $\mathcal{D}(\mathbf{x})$  lorsque  $\mathbf{x}$  décrit  $D$  est appelé une*

distribution et est notée

$$\mathcal{D} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{f_1, f_2, \dots, f_k\}. \quad (\text{C.4})$$

Un cas particulier de distribution, jouant un rôle essentiel dans les propriétés de linéarisabilité d'une certaine classe de systèmes, est introduite dans la définition ci-dessous.

**Définition C.3** *Une distribution  $\mathcal{D}$  est dite involutive si*

$$\forall g_1, g_2 \in \mathcal{D}, \quad [g_1, g_2] \triangleq \frac{\partial g_2}{\partial \mathbf{x}} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial \mathbf{x}} g_2 \in \mathcal{D}, \quad (\text{C.5})$$

où  $[\cdot, \cdot]$  est connu sous l'appellation de Braquets de Lie.

Afin de vérifier l'involutivité d'une distribution générée par un nombre fini de champs de vecteurs, on dispose du résultat suivant.

**Lemme C.1 (Khalil (1996))** *Une distribution  $\mathcal{D}$  générée par un nombre fini de champs de vecteurs  $f_1, f_2, \dots, f_k$  est involutive si et seulement si*

$$\forall 1 \leq i, j \leq k, \quad [f_i, f_j] \in \mathcal{D}. \quad (\text{C.6})$$

Sur la base de ces définitions, on peut introduire le résultat suivant portant sur la linéarisabilité par retour de sortie.

**Théorème C.2 (Khalil (1996))** *Soient  $D \subset \mathbb{R}^n$  un domaine et  $f, g \in \mathcal{C}^{n-1}(D, \mathbb{R}^n)$ . Le système mono-entrée  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u$  est linéarisable par retour de sortie si et seulement s'il existe un domaine  $D_0 \subset D$  tel que :*

- la matrice  $\mathcal{G}(\mathbf{x}) \triangleq [g(\mathbf{x}), \text{ad}_f g(\mathbf{x}), \dots, \text{ad}_f^{n-1} g(\mathbf{x})]$  est de rang  $n$  pour tout  $\mathbf{x} \in D_0$ , où  $\text{ad}_f g = [f, g]$  et pour tout  $k \geq 2$ ,  $\text{ad}_f^k g = [f, \text{ad}_f^{k-1} g]$  ;
- la distribution  $\mathcal{D} = \text{span}_{\mathbb{R}}\{g, \text{ad}_f g, \dots, \text{ad}_f^{n-2} g\}$  est involutive sur  $D_0$ .

## C.2 Étude du BACT

Afin de simplifier les calculs, on considère le modèle du BACT (4.66) sans tenir compte de la dynamique de l'actionneur. De manière à rendre le résultat indépendant de la modélisation particulière des coefficients de rigidité en torsion et en flexion, on suppose que  $k_\alpha$  est une fonction analytique<sup>1</sup> de  $\alpha$  sur  $\mathbb{R}$ , i.e.,  $k_\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ , et que  $k_h$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^3(\mathbb{R})$

---

1. On rappelle qu'une fonction analytique est une fonction de variable réelle ou complexe qui est développable en série entière au voisinage de chacun des points de son ensemble de définition.

de la variable  $h$ . En sélectionnant  $x_1 = h$ ,  $x_2 = \alpha$ ,  $x_3 = \dot{h}$ ,  $x_4 = \dot{\alpha}$  et  $u = \beta$ , la dynamique du BACT s'écrit, pour une vitesse de l'écoulement de l'air  $U \in \mathbb{R}_+$  fixée, sous la forme  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u$  où les fonctions  $f, g \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R}^4, \mathbb{R}^4)$  sont définies par<sup>2</sup>

$$f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ -k_1 k_h(x_1)x_1 - [k_2 U^2 + c_5 k_\alpha(x_2)]x_2 - c_1(U)x_3 - c_2(U)x_4 \\ -k_3 k_h(x_1)x_1 - [k_4 U^2 + c_6 k_\alpha(x_2)]x_2 - c_3(U)x_3 - c_4(U)x_4 \end{bmatrix}, \quad g(\mathbf{x}) = U^2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ g_3 \\ g_4 \end{bmatrix}. \quad (\text{C.7})$$

**Théorème C.3** *Supposons que  $k_h \in \mathcal{C}^3(\mathbb{R})$  et que  $k_\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$  est positive et non constante. Supposons également que  $U \geq 0$ ,  $x_\alpha \neq -m_T c_{m\beta}/(m_W c_{l\beta})$  et que l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :*

(A1)  $\rho b[g_3 + (0.5 - a)bg_4](c_{m_\alpha} c_{l_\beta} - c_{l_\alpha} c_{m_\beta}) = 0$  et  $g_4 c_\alpha c_{l_\beta} + g_3 c_h c_{m_\beta} \neq 0$  ;

(A2)  $\rho b[g_3 + (0.5 - a)bg_4](c_{m_\alpha} c_{l_\beta} - c_{l_\alpha} c_{m_\beta}) \neq 0$  et

$$U \neq U^* \triangleq \frac{g_4 c_\alpha c_{l_\beta} + g_3 c_h c_{m_\beta}}{\rho b[g_3 + (0.5 - a)bg_4](c_{m_\alpha} c_{l_\beta} - c_{l_\alpha} c_{m_\beta})}. \quad (\text{C.8})$$

Alors le système  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}) + g(\mathbf{x})u$  où  $f$  et  $g$  sont définies par (C.7) n'est pas linéarisable par retour de sortie.

Les inégalités présentent dans les hypothèses du Théorème C.3 ne présentent pas une limite d'un point de vue pratique. En effet, pour les valeurs numériques du modèle telles que consignées dans le Tab.4.2,  $U^* \approx -9.61 \text{ m/s} < 0$ . Ainsi, la condition (C.8) est bien satisfaite. De plus, pour les mêmes valeurs numériques,  $x_\alpha = -m_T c_{m\beta}/(m_W c_{l\beta}) \approx 3.50$ , correspondant à une position hypothétique de l'axe d'élasticité en dehors des limites physiques de la section d'aile.

*Démonstration du Théorème C.3.* Le cas  $U = 0$  est trivial car implique  $g = \mathbf{0}$ . On se focalise donc sur le cas  $U > 0$ . Supposons par contradiction que le système est linéarisable par retour de sortie. De par le Théorème C.2, il existe un domaine non vide  $D_0 \subset \mathbb{R}^n$  tel que les conditions 1 et 2 du théorème soient vérifiées.

- La condition 1 implique que  $\text{rang}[\mathcal{G}(\mathbf{x})] = 4$  pour tout  $\mathbf{x} \in D_0$ , i.e.,  $g(\mathbf{x})$ ,  $\text{ad}_f g(\mathbf{x})$ ,  $\text{ad}_f^2 g(\mathbf{x})$  et  $\text{ad}_f^3 g(\mathbf{x})$  sont linéairement indépendants pour tout  $\mathbf{x} \in D_0$ .
- La condition 2 impose que la distribution  $\mathcal{D} = \text{span}\{g, \text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g\}$  est involutive sur  $D_0$ . Sur la base du Lemme C.1, c'est équivalent au fait que  $[g, \text{ad}_f g] \in \mathcal{D}$ ,  $[g, \text{ad}_f^2 g] \in \mathcal{D}$  et  $[\text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g] \in \mathcal{D}$  sur  $D_0$ .

---

2. Le paramètre incertain  $\delta$  de la formulation d'origine est pour cette étude absorbé par  $k_\alpha$ .

Un calcul direct montre que  $[g, \text{ad}_f g] = \mathbf{0} \in \mathcal{D}$  et  $[g, \text{ad}_f^2 g] = \mathbf{0} \in \mathcal{D}$ . Dès lors, la condition 2 est équivalente à  $[\text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g] \in \mathcal{D}$  sur  $D_0$ . La condition 1 impliquant que pour tout  $\mathbf{x} \in D_0$  les vecteurs  $g(\mathbf{x})$ ,  $\text{ad}_f g(\mathbf{x})$  et  $\text{ad}_f^2 g(\mathbf{x})$  sont linéairement indépendants, on obtient que pour tout  $\mathbf{x} \in D_0$ ,

$$\text{rang} [g(\mathbf{x}), \text{ad}_f g(\mathbf{x}), \text{ad}_f^2 g(\mathbf{x}), [\text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g](\mathbf{x})] = 3. \quad (\text{C.9})$$

En introduisant pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$  la quantité :

$$\Delta(\mathbf{x}) = \det \left( [g(\mathbf{x}), \text{ad}_f g(\mathbf{x}), \text{ad}_f^2 g(\mathbf{x}), [\text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g](\mathbf{x})] \right) \in \mathbb{R}, \quad (\text{C.10})$$

on obtient donc que  $D_0 \subset F \triangleq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4 : \Delta(\mathbf{x}) = 0\}$ . Cela entraîne donc que l'intérieur de  $F$ , noté  $\mathring{F}$ , est non vide puisque  $D_0$  est un ouvert non vide contenu dans  $F$ . Un calcul direct montre que les braquets de Lie impliqués dans la définition de  $\Delta(\mathbf{x})$  sont donnés par les expressions suivantes :

$$\text{ad}_f g(\mathbf{x}) = [f, g](\mathbf{x}) = U^2 \begin{bmatrix} -g_3 \\ -g_4 \\ c_1(U)g_3 + c_2(U)g_4 \\ c_3(U)g_3 + c_4(U)g_4 \end{bmatrix}, \quad (\text{C.11})$$

$$\text{ad}_f^2 g(\mathbf{x}) = [f, \text{ad}_f g](\mathbf{x}) = U^2 \begin{bmatrix} -c_1(U)g_3 - c_2(U)g_4 \\ -c_3(U)g_3 - c_4(U)g_4 \\ L_1(x_1, x_2, U) \\ L_2(x_1, x_2, U) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.12})$$

$$[\text{ad}_f g, \text{ad}_f^2 g](\mathbf{x}) = \frac{\partial \text{ad}_f^2 g}{\partial \mathbf{x}} \text{ad}_f g(\mathbf{x}) - \frac{\partial \text{ad}_f g}{\partial \mathbf{x}} \text{ad}_f^2 g(\mathbf{x}) = U^4 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ k_1 g_3 g_4 s_h(x_1) + c_5 g_4^2 s_\alpha(x_2) \\ k_3 g_3 g_4 s_h(x_1) + c_6 g_4^2 s_\alpha(x_2) \end{bmatrix}, \quad (\text{C.13})$$

où les différents coefficients sont définis dans le Tab. 4.3 ainsi que par :

$$F_{31}(x_1, U) = k_1 [k_h(x_1) + x_1 k'_h(x_1)], \quad (\text{C.14a})$$

$$F_{41}(x_1, U) = k_3 [k_h(x_1) + x_1 k'_h(x_1)], \quad (\text{C.14b})$$

$$F_{32}(x_2, U) = k_2 U^2 + c_5 (k_\alpha(x_2) + x_2 k'_\alpha(x_2)), \quad (\text{C.14c})$$

$$F_{42}(x_2, U) = k_4 U^2 + c_6 (k_\alpha(x_2) + x_2 k'_\alpha(x_2)), \quad (\text{C.14d})$$

$$L_1(x_1, x_2, U) = -F_{31}(x_1, U)g_3 - F_{32}(x_2, U)g_4 \quad (\text{C.14e})$$

$$+ c_1(U)^2 g_3 + c_1(U) c_2(U) g_4 + c_2(U) c_3(U) g_3 + c_2(U) c_4(U) g_4, \quad (\text{C.14f})$$

$$L_2(x_1, x_2, U) = -F_{41}(x_1, U) g_3 - F_{42}(x_2, U) g_4 \quad (\text{C.14g})$$

$$+ c_1(U) c_3(U) g_3 + c_2(U) c_3(U) g_4 + c_3(U) c_4(U) g_3 + c_4(U)^2 g_4, \quad (\text{C.14h})$$

$$r(U) = g_3^2 c_3(U) + g_3 g_4 [c_4(U) - c_1(U)] - g_4^2 c_2(U), \quad (\text{C.14i})$$

$$s_h(x_1) = 2k'_h(x_1) + x_1 k''_h(x_1), \quad (\text{C.14j})$$

$$s_\alpha(x_2) = 2k'_\alpha(x_2) + x_2 k''_\alpha(x_2), \quad (\text{C.14k})$$

$$k_{\Delta h} = (k_3 g_3 - k_1 g_4) g_3 g_4 = -\frac{\rho b^2 c_{m\beta}}{d} g_3 g_4, \quad (\text{C.14l})$$

$$k_{\Delta\alpha} = (c_6 g_3 - c_5 g_4) g_4^2 = -\frac{\rho b c_{l\beta}}{d} g_4^2. \quad (\text{C.14m})$$

Le calcul du déterminant donne alors :

$$\Delta(\mathbf{x}) = U^{10} r(U) [k_{\Delta h} s_h(x_1) + k_{\Delta\alpha} s_\alpha(x_2)], \quad (\text{C.15})$$

où

$$r(U) = g_3^2 c_3(U) + g_3 g_4 [c_4(U) - c_1(U)] - g_4^2 c_2(U), \quad (\text{C.16a})$$

$$k_{\Delta h} = (k_3 g_3 - k_1 g_4) g_3 g_4 = -\frac{\rho b^2 c_{m\beta}}{d} g_3 g_4, \quad (\text{C.16b})$$

$$k_{\Delta\alpha} = (c_6 g_3 - c_5 g_4) g_4^2 = -\frac{\rho b c_{l\beta}}{d} g_4^2. \quad (\text{C.16c})$$

Pour tout  $1 \leq i \leq 4$ , la fonction  $U \rightarrow c_i(U)$  est affine. Donc  $U \rightarrow r(U)$  donnée par (C.16a) est une fonction polynomiale de degré inférieur ou égal à un. Sous l'hypothèse (A1),  $r$  est une fonction constante non nulle, i.e.,  $r(U) \neq 0$ . Sous l'hypothèse (A2),  $r$  est de degré un impliquant l'existence d'une unique vitesse  $U \in \mathbb{R}$  telle que  $r(U) = 0$ . Après calculs, cette vitesse est donnée par  $U = U^*$  où  $U^*$  est définie par (C.8). Ce cas de figure étant exclu par hypothèse, on obtient que  $r(U) \neq 0$ . Dans les deux cas,  $r(U) \neq 0$ , impliquant donc que  $F = \{\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4 : k_{\Delta h} s_h(x_1) + k_{\Delta\alpha} s_\alpha(x_2) = 0\}$ .

Puisque  $\mathring{F} \neq \emptyset$ , il existe  $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*, x_4^*) \in F$  et  $\epsilon > 0$  tel que pour tout  $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4$  vérifiant  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^*\|_\infty \leq \epsilon$ ,  $\mathbf{x} \in F$ , i.e.,  $k_{\Delta h} s_h(x_1) + k_{\Delta\alpha} s_\alpha(x_2) = 0$ , où  $\|\cdot\|_\infty$  dénote ici la norme infinie<sup>3</sup> du  $\mathbb{R}$  espace vectoriel  $\mathbb{R}^4$ . En particulier, pour tout  $x_2 \in (x_2^* - \epsilon, x_2^* + \epsilon)$ ,  $k_{\Delta h} s_h(x_1^*) + k_{\Delta\alpha} s_\alpha(x_2) = 0$ . L'égalité  $k_{\Delta\alpha} = 0$  étant vérifiée si et seulement si  $g_4 = 0$  (C.16c), i.e.,  $x_\alpha = -m_T c_{m\beta} / (m_W c_{l\beta})$ , cas de figure exclu par hypothèse. Il existe alors une constante  $\kappa_0 \triangleq -k_{\Delta h} s_h(x_1^*) / k_{\Delta\alpha} \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x_2 \in (x_2^* - \epsilon, x_2^* + \epsilon)$ ,

---

3. Il n'y a pas de restriction à considérer une norme particulière puisqu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.



$s_\alpha(x_2) = \kappa_0$ . Puisque  $k_\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$ , on a  $s_\alpha \in \mathcal{A}(\mathbb{R})$  impliquant par le principe de prolongement analytique<sup>4</sup> que  $s_\alpha(x_2) = \kappa_0$  pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ . Ainsi, par définition de  $s_\alpha$ , l'intégration de la fonction  $x_2 \rightarrow x_2 s_\alpha(x_2)$  fournit pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{\kappa_0}{2}x_2^2 = \int_0^{x_2} \kappa_0 \xi d\xi = \int_0^{x_2} \xi s_\alpha(\xi) d\xi = \int_0^{x_2} 2\xi k'_\alpha(\xi) + \xi^2 k''_\alpha(\xi) d\xi = \left[ \xi^2 k'_\alpha(\xi) \right]_{\xi=0}^{\xi=x_2} = x_2^2 k'_\alpha(x_2). \quad (\text{C.17})$$

En divisant par  $x_2^2$  les membres de gauche et de droite de (C.17), on obtient par continuité de  $k'_\alpha$  en 0 que pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $k'_\alpha(x_2) = \kappa_0/2$ . On en déduit l'existence d'une constante  $\kappa_1 \in \mathbb{R}$  telle que pour tout  $x_2 \in \mathbb{R}$ ,  $k_\alpha(x_2) = \kappa_0 x_2/2 + \kappa_1$ . La fonction  $k_\alpha$  étant supposée positive sur  $\mathbb{R}$ , on obtient  $\kappa_0 = 0$ . Cela contredit l'hypothèse que  $k_\alpha$  n'est pas une fonction constante, ce qui conclut la preuve par contradiction.  $\square$

---

4. On utilise ici le fait que deux fonctions analytiques définies sur un même ouvert connexe  $U$  qui coïncident sur un voisinage ouvert d'un point de  $U$  sont égales.

## ANNEXE D    RAPPELS MATHÉMATIQUES

Cette annexe vise à introduire certaines des notions mathématiques employées dans les Chapitres 6-8. Les différents éléments présentés sont essentiellement tirés des références (Brezis, 2010; Curtain and Zwart, 2012; Kato, 2013) dans lesquelles de plus amples détails peuvent être trouvés.

### D.1    Espaces vectoriels normés, espaces de Banach et espaces de Hilbert

Cette section vise à effectuer des rappels généraux sur les espaces vectoriels normés, les espaces de Banach et les espaces de Hilbert. Pour la suite  $\mathbb{K}$  désigne le corps des réels  $\mathbb{R}$  ou le corps des complexes  $\mathbb{C}$ .

**Définition D.1 (Espace vectoriel normé)** *Un espace vectoriel normé est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  doté d'une application, appelée norme,  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}_+$  vérifiant :*

- *séparation* :  $\forall x \in E, \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ;
- *homogénéité* :  $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{K} \times E, \|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$  ;
- *inégalité triangulaire* :  $\forall x, y \in E, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .

Des exemples typiques d'espaces vectoriels normés sont le corps  $\mathbb{R}$  muni de la valeur absolue  $|\cdot|$ , le corps  $\mathbb{C}$  muni du module  $|\cdot|$ ,  $\mathbb{K}^n$  muni de la  $p$ -norme  $\|x\|_p = (|x_1|^p + \dots + |x_n|^p)^{1/p}$  pour  $p \in [1, \infty)$  ou la norme infinie  $\|x\|_\infty = \max(|x_1|, \dots, |x_n|)$ , l'espace  $\mathcal{C}(K, \mathbb{K})$  des fonctions continues sur un compact  $K$  muni de la norme uniforme  $\|f\|_\infty = \sup_{x \in K} |f(x)|$ , etc.

**Définition D.2 (Convergence d'une suite)** *Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^\mathbb{N}$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est dite convergente si :*

$$\exists l \in E \ / \ \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} \ / \ \forall n \geq N, \|x_n - l\| < \varepsilon. \quad (\text{D.1})$$

*On dit alors que la suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $l$ .*

L'hypothèse de séparation intervenant dans la définition d'une norme assure l'unicité de la limite (lorsque existence).

**Définition D.3 (Normes équivalentes)** *Deux normes  $\|\cdot\|_1$  et  $\|\cdot\|_2$  sur un espace vectoriel  $E$  sont dites équivalentes s'il existe  $c_1, c_2 > 0$  tels que pour tout  $x \in E$ ,  $c_1 \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq c_2 \|x\|_1$ .*

Rappelons qu'en dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. On peut montrer que deux normes sont équivalent si et seulement si elles engendrent les mêmes suites convergentes (avec limites identiques).

La principale difficulté dans l'application de la Définition D.2 est qu'il faut préalablement deviner la valeur de la limite  $l$  afin de pouvoir établir (D.1). Cela est néanmoins en général difficile. De plus, dans la majorité des cas, seul l'établissement de la convergence de la suite, et non le calcul explicite de la limite, est essentiel. Pour cette raison, on introduit le concept de *suite de Cauchy*.

**Définition D.4 (Suite de Cauchy)** Une suite  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E^{\mathbb{N}}$  d'un espace vectoriel normé  $E$  est une suite de Cauchy si :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} / \forall n, m \geq N, \|x_n - x_m\| < \varepsilon. \quad (\text{D.2})$$

Il est aisé de montrer que toute suite convergente dans un espace vectoriel normé est une suite de Cauchy. La réciproque est fautive en général. Par exemple, dans l'ensemble des polynômes  $\mathbb{R}[X]$  doté de la norme uniforme sur  $[0, 1]$ , la suite  $(P_n)_{n \in \mathbb{N}} \in (\mathbb{R}[X])^{\mathbb{N}}$  définie par  $P_n(X) = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!}$  est de Cauchy mais ne converge pas dans  $\mathbb{R}[X]$ .

**Définition D.5 (Espace de Banach)** Un espace de Banach est un espace vectoriel normé dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Les exemples précédemment mentionnés d'espaces vectoriels normés sont des espaces de Banach. Notons également que tout  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie est de Banach. *A contrario*,  $\mathbb{R}[X]$  muni d'une norme quelconque n'est pas un espace de Banach. L'avantage des espaces de Banach est qu'il n'est pas nécessaire de deviner la limite d'une suite pour en établir la convergence. Il suffit pour cela de vérifier le critère (D.2).

**Définition D.6 (Produit scalaire)** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel. On appelle produit scalaire une application  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$  vérifiant :

- linéarité de la première entrée :  $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall x, y, z \in E, \langle \lambda x + \mu y, z \rangle = \lambda \langle x, z \rangle + \mu \langle y, z \rangle$  ;
- symétrie hermitienne :  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  ;
- définie positive :  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$  et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$ .

Dans le cas où  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ , la symétrie hermitienne se réduit à la simple symétrie.

**Proposition D.1 (Norme et inégalité de Cauchy-Schwartz)** Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel doté d'un produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{K}$ .

1. Norme associée au produit scalaire :  $\|x\| \triangleq \sqrt{\langle x, x \rangle}$  définit une norme sur  $E$ .
2. Inégalité de Cauchy-Schwartz : pour tout  $x, y \in E$ ,  $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$ .

On introduit alors la notion d'espace de Hilbert.

**Définition D.7 (Espace de Hilbert)** Un espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel doté d'un produit scalaire dont la norme associée  $\|\cdot\|$  est telle sur  $(\mathcal{H}, \|\cdot\|)$  est un espace de Banach.

Un exemple typique d'espace de Hilbert est  $\mathbb{K}^n$  doté du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \bar{y}_i$ . Plus généralement, l'ensemble des suites de carré sommable à coefficient dans  $\mathbb{K}$  est un espace de Hilbert lorsque doté du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \bar{y}_i$ .

Un autre exemple important d'espace de Hilbert est celui des fonctions de carré intégrable. Pour cela, rappelons que pour  $p \geq 1$ , l'ensemble  $\mathcal{L}^p(a, b)$  des fonctions  $p$ -intégrables sur un intervalle  $(a, b)$  se définit comme étant l'ensemble des fonctions  $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{C}$  mesurables telles que  $\int_a^b |f(x)|^p dx < \infty$ . On définit alors  $\|f\|_{L^p(a, b)} = \left( \int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$ . Cependant,  $(\mathcal{L}^p(a, b), \|\cdot\|_{L^p(a, b)})$  n'est pas un espace vectoriel normé car  $\|f\|_{L^p(a, b)} = 0$  implique que  $f$  est nulle presque partout<sup>1</sup> et non  $f = 0$ . De manière à ne pas distinguer deux fonctions mesurables  $f$  et  $g$  qui sont égales presque partout<sup>2</sup>, ce que l'on note  $f \stackrel{\text{p.p.}}{=} g$ , on définit l'espace  $L^p(a, b)$  comme étant le quotient de  $\mathcal{L}^p(a, b)$  par son sous-espace vectoriel constitué des fonctions nulles presque partout. Dès lors,  $(L^p(a, b), \|\cdot\|_{L^p(a, b)})$  est bien un espace vectoriel normé<sup>3</sup>. Rigoureusement, un élément  $[f] \in L^p(a, b)$  est une classe d'équivalence de fonctions qui sont égales presque partout, et donc indistinguables du point de vue de la théorie de l'intégration. Par simplicité, on identifie généralement une fonction à sa classe d'équivalence. Le théorème suivant assure la complétude de  $L^p(a, b)$ .

**Théorème D.2 (Théorème de Riesz-Fischer)** Pour  $p \geq 1$ ,  $(L^p(a, b), \|\cdot\|_{L^p(a, b)})$  est un espace de Banach. De plus, toute suite convergente dans  $L^p(a, b)$  présente une sous-suite qui converge presque partout.

---

1. Une fonction mesurable  $f$  est nulle presque partout si  $\lambda(\{x : f(x) \neq 0\}) = 0$  où  $\lambda$  représente la mesure de Lebesgue.

2. I.e.,  $f - g$  est nulle presque partout.

3. L'homogénéité se vérifie directement à partir de la définition et l'inégalité triangulaire est connue sous le nom d'inégalité de Minkowski.

Dans le cas particulier <sup>4</sup>  $p = 2$ , l'espace  $L^2(a, b)$  muni de son produit scalaire naturel  $\langle f, g \rangle_{L^2(a,b)} = \int_a^b f(x)g(x)dx$  est un espace de Hilbert.

**Définition D.8 (Ensemble dense dans un espace vectoriel normé)** Soit  $(E, \|\cdot\|_E)$  un espace vectoriel normé. Un ensemble  $X \subset E$  est dit dense dans  $E$ , ce que l'on note  $\overline{X} = E$ , si pour tout  $u \in E$  et tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $x \in X$  tel que  $\|x - u\| < \varepsilon$ .

En rappelant que la notation de Kronecker est telle que  $\delta_{i,j}$  vaut 1 si  $i = j$  et 0 sinon, on introduit le concept de base de Hilbert.

**Définition D.9 (Base de Hilbert)** Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert. Une famille de vecteurs  $(e_i)_{i \in I} \in \mathcal{H}^I$  est une base de Hilbert lorsque :

- famille orthonormée :  $\forall i, j \in I, \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{i,j}$  ;
- famille totale :  $\mathcal{H} = \overline{\text{vect}(e_i)_{i \in I}}$ .

Tout espace de Hilbert admet une base de Hilbert (par application du lemme de Zorn). Afin de caractériser de telles bases pour les espaces de Hilbert de dimension infinie usuellement rencontrés, on introduit la propriété suivante.

**Définition D.10 (Espace vectoriel normé séparable)** Un espace vectoriel normé  $E$  est séparable s'il existe un sous-ensemble  $X \subset E$  dénombrable<sup>5</sup> et dense dans  $E$ .

L'espace  $\mathbb{K}^n$  doté d'une norme quelconque ou l'espace  $L^p(a, b)$  pour  $p \in [1, \infty)$  muni de sa norme naturelle sont des espaces séparables. L'intérêt de cette notion réside dans le lemme suivant.

**Lemme D.3 (Base de Hilbert d'un espace de Hilbert séparable)** Toute base d'un espace de Hilbert séparable est au plus dénombrable.

Par exemple, en conséquence de la théorie sur les polynômes trigonométriques et les séries de Fourier, l'espace de Hilbert  $L^2(0, 1)$  muni de son produit scalaire naturel admet les bases de Hilbert classiques suivantes :

- $\{t \rightarrow 1\} \cup \{t \rightarrow \sqrt{2} \cos(2\pi nt), n \in \mathbb{N}^*\} \cup \{t \rightarrow \sqrt{2} \sin(2\pi nt), n \in \mathbb{N}^*\}$  ;
- $\{t \rightarrow 1\} \cup \{t \rightarrow \sqrt{2} \cos(\pi nt), n \in \mathbb{N}^*\}$  ;

---

4. On peut montrer grâce à l'identité du parallélogramme vérifiée par tout espace de Hilbert que  $L^p(a, b)$  muni de sa norme usuelle est un espace de Hilbert si et seulement si  $p = 2$ .

5. C'est-à-dire qu'il peut être mis en bijection avec  $\mathbb{N}$

–  $\{t \rightarrow \sqrt{2} \sin(\pi n t), n \in \mathbb{N}^*\}$ .

Finalement, on introduit le résultat suivant permettant d'écrire un élément dans une base de Hilbert.

**Lemme D.4 (Décomposition dans un espace de Hilbert séparable)** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert séparable et  $(e_n)_n$  une base de Hilbert associée.*

1. *Pour toute suite  $(\lambda_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  telle que  $\sum_{n=0}^{\infty} |\lambda_n|^2 < \infty$ , alors  $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n e_n \in \mathcal{H}$ .*
2. *Pour tout  $x \in \mathcal{H}$ ,  $\sum_{n=0}^{\infty} |\langle x, e_n \rangle|^2 < \infty$  et  $x = \sum_{n=0}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n$ .*

## D.2 Rappels d'analyse fonctionnelle

L'analyse fonctionnelle est une branche des mathématiques portant sur l'étude des espaces de fonctions, cadre dans lequel est formalisé la théorie des  $C_0$ -semi-groupes introduit dans le Chapitre 6. Cette section vise à faire de brefs rappels sur certains des résultats généraux de l'analyse fonctionnelle utiles dans le cadre de cette thèse.

**Définition D.11 (Opérateur linéaire)** *Soient  $E$  et  $F$  deux  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels. Un opérateur linéaire (ou simplement un opérateur)  $T$  de  $E$  dans  $F$  est une application  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  telle que  $D(T)$  est un sous espace vectoriel de  $E$  et pour tout  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$  et  $u, v \in E$ ,  $T(\alpha u + \beta v) = \alpha T u + \beta T v$ .*

L'image de l'opérateur  $\text{Im}(T) = T(D(T))$  et son noyau  $\text{Ker}(T) = T^{-1}(\{0\})$  sont respectivement des sous-espaces vectoriels de  $F$  et  $E$ . Par linéarité,  $T$  est injectif si et seulement si  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ .

**Définition D.12 (Opérateur inversible)** *Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels. Un opérateur  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  est inversible s'il existe une application  $S : D(S) \subset F \rightarrow E$  telle que  $D(S) = \text{Im}(T)$ ,  $ST = I_{D(T)}$  et  $TS = I_{\text{Im}(T)}$ . Dans ce cas,  $S$  est nommé l'inverse (algébrique) de  $T$  et on note  $S = T^{-1}$ .*

Il est aisé de montrer (Kato, 2013)[Section III.2] qu'un opérateur  $T$  est inversible si et seulement si  $\text{Ker}(T) = \{0\}$ . De plus, si  $T$  est un opérateur inversible,  $T^{-1}$  est linéaire et est donc un opérateur.

**Définition D.13 (Opérateur borné)** *Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés. Un opérateur  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  est borné s'il existe  $M \in \mathbb{R}_+$  tel que pour tout  $x \in D(T)$ ,  $\|Tx\|_F \leq M \|x\|_E$ .*

La notion d'opérateur borné coïncide avec la notion usuelle de continuité d'une fonction entre deux espaces métriques. En effet, il peut être montré qu'un opérateur est continu si et seulement s'il est borné (Kato, 2013)[Section III.2]. La plus petite des constantes  $M$  intervenant dans la définition d'un opérateur bornée fait office de norme de l'opérateur.

**Définition D.14 (Norme d'un opérateur borné)** Soient  $(E, \|\cdot\|_E)$  et  $(F, \|\cdot\|_F)$  deux espaces vectoriels normés. La norme d'un opérateur borné  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  est définie par :

$$\|T\| \triangleq \sup_{x \in D(T) \setminus \{0\}} \frac{\|Tx\|_F}{\|x\|_E}. \quad (\text{D.3})$$

On peut alors introduire l'espace vectoriel norme des opérateurs bornés entre deux espaces vectoriels normés.

**Définition D.15 (Espace vectoriel  $\mathcal{L}(E, F)$ )** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace vectoriel normé constitué des opérateurs bornés  $T : E \rightarrow F$  et doté de la norme introduite à la Définition D.14. Lorsque les deux espaces vectoriels normés coïncident, on note  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ .

Bien que centrale, la notion d'opérateur bornée peut se révéler trop trop forte. Cela conduit au concept plus faible d'opérateur fermé.

**Définition D.16 (Opérateur fermé)** Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels normés. Un opérateur  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  est fermé si pour toute suite  $(x_n)_n \in D(T)^\mathbb{N}$  telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E$  et  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in F$ , alors  $x \in D(T)$  et  $Tx = y$ .

L'application directe de la définition précédente afin de prouver qu'un opérateur est fermé est généralement fastidieuse. Une approche plus directe est la suivante. Supposons que  $T$  est un opérateur entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$  tel que  $T^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$ . Alors  $T$  est fermé. En effet, si  $(x_n)_n \in D(T)^\mathbb{N}$  est telle que  $x_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} x \in E$  et  $Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} y \in F$ , alors par continuité de  $T^{-1}$  on a que  $x_n = T^{-1}Tx_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} T^{-1}y$ . Par unicité de la limite on en déduit que  $x = T^{-1}y \in D(T)$  et donc  $y = Tx$ .

**Exemple D.1** Soit  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  l'espace des fonctions de carré intégrable. On introduit l'opérateur  $T = \frac{d}{dx}$  défini sur

$$D(T) = \left\{ z \in L^2(0, 1) : \frac{dz}{dx} \in L^2(0, 1), z(0) = 0, z \in \text{AC}[0, 1] \right\}. \quad (\text{D.4})$$

Il est possible d'appliquer directement la définition afin de prouver que  $T$  est fermé (Curtain and Zwart, 2012)[Exemple A.3.45]. Néanmoins, si on introduit l'opérateur  $S$  défini sur  $\mathcal{H}$  par

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (Sz)(x) = \int_0^x z(\xi) d\xi, \quad (\text{D.5})$$

on vérifie de manière directe que 1)  $S \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ ; 2)  $TS = I_{\mathcal{H}}$  et  $ST = I_{D(t)}$ , i.e.,  $T^{-1} = S$ . On en déduit que  $T$  est fermé.

Le théorème suivant permet, dans le cadre des espaces de Banach, de déduire du caractère fermé d'un opérateur son caractère borné.

**Théorème D.5 (Théorème du graphe fermé)** (Kato, 2013)[III.5.20] *Un opérateur  $T : E \rightarrow F$  fermé défini sur la globalité d'un espace de Banach  $E$  et à valeur dans un espace de Banach  $F$  est borné.*

Dans le cadre de la théorie des  $C_0$ -semi-groupes, un opérateur  $A : D(A) \subset E \rightarrow E$  n'est généralement pas défini sur l'espace tout entier, i.e.,  $D(A) \neq E$ . Cependant, il est défini sur un sous espace  $D(A)$  dont les éléments sont arbitrairement proches de tout élément de l'espace vectoriel normé  $E$ . Cela se formalise par la notion d'opérateur densément défini comme suit.

**Définition D.17 (Opérateur densément défini)** *Un opérateur  $T : D(T) \subset E \rightarrow F$  entre deux espaces vectoriels normés  $E$  et  $F$  est densément défini si  $\overline{D(T)} = E$ .*

Il est bien connu que dans  $\mathbb{R}^n$  doté du produit scalaire  $\langle x, y \rangle = x^\top y$ , en notant  $A^\top$  la matrice transposée d'une matrice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^\top y \rangle$  pour tout  $x, y \in \mathbb{R}^n$ . En interprétant les matrices en tant qu'opérateurs sur  $\mathbb{R}^n$ , on dit que  $A^\top$  est l'opérateur adjoint de  $A$ . Ce concept se généralise dans les espaces de Hilbert de la façon suivante.

**Définition D.18 (Opérateur adjoint)** *Soit  $\mathcal{H}$  un espace de Hilbert et  $T : D(T) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  un opérateur densément défini. On définit l'opérateur adjoint  $T^* : D(T^*) \subset \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$  comme suit.  $D(T^*)$  est l'ensemble des  $y \in \mathcal{H}$  tel qu'il existe  $y^* \in \mathcal{H}$  vérifiant*

$$\forall x \in D(T), \quad \langle Tx, y \rangle = \langle x, y^* \rangle. \quad (\text{D.6})$$

Dans ce cas, on pose  $T^*y = y^*$ .



La caractère densément défini de  $T$  permet d'assurer l'unicité de la définition de  $T^*$ . De plus, lorsque  $T$  est fermé et densément défini, on montre que  $T^*$  est également fermé et densément défini. Une nouvelle fois, l'application directe de la définition pour calculer un opérateur adjoint est relativement difficile, notamment pour déterminer  $D(T^*)$ . Une méthode alternative utilise la propriété suivante. Si  $T$  est un opérateur densément défini sur l'espace de Hilbert  $\mathcal{H}$  tel que  $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , alors  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$  (Kato, 2013)[III.5.30]. L'intérêt de cette approche est que puisque  $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ , le théorème de représentation de Riesz assure que  $(T^{-1})^*$  est défini sur  $\mathcal{H}$  tout entier. On a alors directement que  $D(T^*) = \text{Im}((T^{-1})^*)$ .

**Exemple D.2** Soit  $\mathcal{H} = L^2(0, 1)$  l'espace des fonctions de carré intégrable. On introduit l'opérateur  $T = \frac{d}{dx}$  défini sur

$$D(T) = \left\{ z \in L^2(0, 1) : \frac{dz}{dx} \in L^2(0, 1), z(0) = 0, z \in \text{AC}[0, 1] \right\}. \quad (\text{D.7})$$

De l'Exemple D.1,

$$\forall z \in \mathcal{H}, \quad \forall x \in [0, 1], \quad (T^{-1}z)(x) = \int_0^x z(\xi) d\xi, \quad (\text{D.8})$$

avec  $T^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ . Par calcul direct et application du Théorème de Fubini :

$$\langle T^{-1}z_1, z_2 \rangle = \int_0^1 \int_0^x z_1(\xi) \overline{z_2(x)} d\xi dx = \int_0^1 \int_\xi^1 z_1(\xi) \overline{z_2(x)} dx d\xi = \langle z_1, (T^{-1})^* z_2 \rangle, \quad (\text{D.9})$$

avec  $((T^{-1})^* z)(x) = \int_x^1 z(\xi) d\xi$ . On en déduit :

$$D(T^*) = \text{Im}((T^{-1})^*) = \left\{ z \in L^2(0, 1) : \frac{dz}{dx} \in L^2(0, 1), z(1) = 0, z \in \text{AC}[0, 1] \right\}, \quad (\text{D.10})$$

$$d'où T^* = ((T^{-1})^*)^{-1} = -\frac{d}{dx}.$$

Pour conclure cette section, on effectue des rappels sur l'ensemble résolvant.

**Définition D.19** Soit  $T$  un opérateur fermé sur un  $\mathcal{C}$ -espace vectoriel normé  $E$ . On définit l'ensemble résolvant  $\rho(T)$  comme étant l'ensemble des  $\lambda \in \mathbb{C}$  tels que  $(\lambda I_E - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$ .

Il est à noter que d'après ce qui précède,  $(\lambda I_E - T)^{-1} \in \mathcal{L}(E)$  implique que  $\lambda I_E - T$  et donc de surcroît  $T$  est fermé. Ainsi, lorsque  $T$  est non fermé, on a nécessairement  $\rho(T) = \emptyset$ . Lorsque  $E$  est un espace de Banach,  $\rho(T)$  est un sous ensemble ouvert de  $\mathbb{C}$  (Kato, 2013)[III.6.7]. Le

complémentaire de  $\rho(T)$ , noté  $\sigma(T) = \mathbb{C} \setminus \rho(T)$ , est appelé le spectre de  $T$ . Contrairement à la dimension finie, l'ensemble des valeurs propres de l'opérateur  $T$ , noté  $\sigma_p(T)$ , ne correspond pas toujours à l'ensemble du spectre de  $T$ . En d'autres termes, il existe en dimension infinie des opérateurs  $T$  tels que  $\sigma_p(T) \subsetneq \sigma(T)$  (cf., e.g., (Curtain and Zwart, 2012)[Exemple A.4.6]).

### D.3 Espaces de Sobolev

La notion usuelle de dérivation des fonctions se révèle très restrictive. Par exemple, une fonction aussi simple qu'un échelon n'admet pas de fonction dérivée. Les notions de dérivée faible (au sens des distributions) et d'espaces de Sobolev visent à fournir un cadre plus général. Pour cela rappelons que  $\mathcal{C}_c^\infty(a, b)$  désigne l'ensemble des fonctions  $f$  infiniment dérivables à support compact, i.e., il existe  $[c, d] \subset (a, b)$  tel que  $x \notin [c, d] \Rightarrow f(x) = 0$ .

**Définition D.20 (Dérivée faible)** *Une fonction  $u \in L^2(a, b)$  admet  $v \in L^2(a, b)$  pour dérivée faible si*

$$\forall \phi \in \mathcal{C}_c^\infty(a, b), \quad \int_a^b u(x) \phi'(x) dx = - \int_a^b v(x) \phi(x) dx. \quad (\text{D.11})$$

Par densité de  $\mathcal{C}_c^\infty(a, b)$  dans  $L^1(a, b)$ , il est immédiat de déduire l'unicité de la dérivée faible. De plus, une simple intégration par partie montre que si  $u \in \mathcal{C}^1((a, b); \mathbb{R})$ , alors  $u$  est faiblement dérivable et la dérivée faible coïncide avec la dérivée usuelle des fonctions. Par la suite, on note  $u'$  la dérivée faible de  $u$ . Si  $u'$  admet elle-même une dérivée faible, on la note  $u''$ , etc.

**Définition D.21 (Espace de Sobolev  $H^m(a, b)$ )** *Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on définit l'espace de Sobolev :*

$$H^m(a, b) \triangleq \left\{ f \in L^2(a, b) : \forall k \leq m, f^{(k)} \in L^2(a, b) \text{ existe} \right\}. \quad (\text{D.12})$$

*On dote cet espace de la norme :*

$$\|f\|_{H^m(a, b)} \triangleq \left( \sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{L^2(a, b)}^2 \right)^{1/2}. \quad (\text{D.13})$$

Sur la base de la complétude de  $L^2(a, b)$  et de la définition de la dérivée faible, il est aisé de déduire le résultat suivant.

**Théorème D.6 (L'espace de Sobolev  $H^m(a, b)$  est un espace de Hilbert)** *Pour  $m \in \mathbb{N}$ , l'espace de Sobolev  $H^m(a, b)$  est un espace de Hilbert lorsque doté du produit scalaire associé à sa norme :*

$$\langle f, g \rangle_{H^m(a, b)} \triangleq \sum_{k=0}^m \langle f^{(k)}, g^{(k)} \rangle_{L^2(a, b)}. \quad (\text{D.14})$$

Dans le cadre d'EDP, il est nécessaire de pouvoir définir des conditions à la frontière. Or, comme vu précédemment, un élément de  $L^2(a, b)$  et de surcroît de  $H^m(a, b)$  est une classe d'équivalence de fonctions qui ne diffèrent que sur un ensemble négligeable de points. Ainsi, définir  $f(a) = 0$  n'a pas de sens dans la mesure où la fonction  $g$  définie par  $g(a) = 1$  et  $g|_{(a,b)} = f|_{(a,b)}$  sont telles que  $f = g$  dans  $L^2(a, b)$  alors même que  $f(a) \neq g(a)$ . Pour définir correctement une condition portant sur un point spécifique du domaine ou de la frontière, il faut le faire sur une fonction suffisamment régulière de classe d'équivalence. On introduit pour cela la notion de continuité absolue.

**Définition D.22 (Absolue continuité)** Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$ . Une fonction  $f : I \rightarrow \mathbb{C}$  est absolument continue si pour tout  $\varepsilon > 0$ , il existe  $\delta > 0$  tel que pour toute suite  $([a_n, b_n])_{n \in \mathbb{N}} \in I^{\mathbb{N}}$  de sous-intervalles d'intérieurs disjoints,

$$\sum_{n \geq 0} (b_n - a_n) < \delta \Rightarrow \sum_{n \geq 0} |f(a_n) - f(b_n)| < \varepsilon. \quad (\text{D.15})$$

On note  $\text{AC}(I)$  l'ensemble des fonctions absolument continues sur  $I$ .

En particulier, toute fonction absolument continue est uniformément continue et donc de surcroît continue. *A contrario* toute fonction lipchitzienne est absolument continue. Les inclusions réciproques sont fausses. Par exemple 1) la fonction connue sous le nom *d'escalier du diable* de Cantor est uniformément continue mais n'est pas absolument continue; 2) La fonction  $x \rightarrow \sqrt{x}$  sur  $[0, 1]$  est absolument continue mais n'est pas lipchitzienne. On a la proposition suivante.

**Lemme D.7** Une fonction  $f$  est absolument continue sur  $[a, b]$  si et seulement s'il existe  $g \in L^1([a, b])$  tel que

$$\forall x \in [a, b], \quad f(x) = f(a) + \int_a^x g(\xi) d\xi. \quad (\text{D.16})$$

De plus, le théorème de différentiation de Lebesgue assure que  $f$  est dérivable presque partout avec  $f' = g$  presque partout.

Il est à noter que le produit de deux fonctions absolument continues est absolument continue. De plus, la formule d'intégration par partie demeure valable lorsqu'elle est appliquée à deux fonctions absolument continues. L'intérêt des fonctions absolument continues dans le cadre des espaces de Sobolev réside dans la proposition suivante (Brezis, 2010, Théorème 8.2 en page 204).

**Lemme D.8**  $H^1(a, b) \subset AC[a, b]$  dans le sens où pour toute fonction  $f \in H^1(a, b)$  il existe une unique fonction  $g \in AC[a, b]$  telle que  $f = g$  presque partout, i.e.,  $f = g$  dans  $H^1(a, b)$ . Dans ce cas, la dérivée faible de  $f$  coïncide dans  $L^2(a, b)$  avec la dérivée classique de  $g$  définie presque partout.

Ainsi, pour  $f \in H^1(a, b)$ , on peut imposer la condition à la frontière en la spécifiant via l'unique fonction absolument continue  $g$  telle que  $f = g$  dans  $H^1(a, b)$ . De manière à alléger les notations, on assimile par la suite une classe d'équivalence de  $H^1(a, b)$  à son unique élément appartenant à  $AC[a, b]$ .

Finalement, on introduit deux célèbres inégalités des espaces de Sobolev.

**Lemme D.9** Pour  $f \in H^1(0, l)$  telle que  $f(0) = 0$ , l'inégalité de Poincaré assure que (Hardy et al., 1952) :

$$\|f\|_{L^2(0, l)}^2 \leq \frac{4l^2}{\pi^2} \|f'\|_{L^2(0, l)}^2, \quad (\text{D.17})$$

tandis que l'inégalité de Agmon fournit (Krstic and Smyshlyaev, 2008) :

$$\|f\|_{\infty}^2 \leq 2 \|f\|_{L^2(0, l)} \|f'\|_{L^2(0, l)}. \quad (\text{D.18})$$

#### D.4 Étude du caractère $\mathcal{C}^1$ de $t \rightarrow \langle X(t), X(t) \rangle$

Soit  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe sur un espace de Hilbert  $(\mathcal{H}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ , et soit  $\mathcal{A}$  son générateur infinitésimal défini sur  $D(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}$ . Pour  $X_0 \in D(\mathcal{A})$  fixé, on pose  $X(t) = T(t)X_0$  l'unique solution de l'équation différentielle abstraite  $(dX/dt)(t) = \mathcal{A}X(t)$  avec  $t \geq 0$  et  $X(0) = X_0$ . On introduit pour tout  $t \geq 0$ ,  $\mathcal{E}(t) = \langle X(t), X(t) \rangle / 2$ . Alors  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$  et on a

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle = \langle \mathcal{A}X(t), X(t) \rangle. \quad (\text{D.19})$$

En effet, puisque  $T(t)$  est un  $C_0$ -semi-groupe, il existe  $M, \omega \geq 0$  tels que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\|T(t)\|_{\mathcal{H}, 2} \leq Me^{\omega t}$ . De plus, on a que :

$$\begin{aligned} \frac{\mathcal{E}(t+h) - \mathcal{E}(t)}{h} &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle X(t+h), X(t+h) \rangle - \langle X(t), X(t) \rangle}{h} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle X(t+h) - X(t), X(t+h) \rangle}{h} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\langle X(t+h) - X(t), X(t) \rangle}{h}. \end{aligned} \quad (\text{D.20})$$

Le second terme est tel que, de par l'inégalité de Cauchy-Schwartz et le fait que  $\dot{X}(t) = \mathcal{A}T(t)X_0 = T(t)\mathcal{A}X_0$  (Théorème 6.2),

$$\begin{aligned}
\left| \frac{\langle X(t+h) - X(t), X(t) \rangle}{h} - \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle \right| &= \left| \left\langle \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \dot{X}(t), X(t) \right\rangle \right| \\
&\leq \left\| \frac{X(t+h) - X(t)}{h} - \dot{X}(t) \right\| \|X(t)\| \\
&\leq \left\| \frac{T(t+h)X_0 - T(t)X_0}{h} - \mathcal{A}T(t)X_0 \right\| \|T(t)X_0\| \\
&\leq \|T(t)\| \|X_0\| \left\| T(t) \left( \frac{T(h) - I}{h} - \mathcal{A} \right) X_0 \right\| \\
&\leq \|T(t)\|^2 \|X_0\| \left\| \left( \frac{T(h) - I}{h} - \mathcal{A} \right) X_0 \right\| \\
&\leq M^2 e^{2\omega t} \|X_0\| \left\| \left( \frac{T(h) - I}{h} - \mathcal{A} \right) X_0 \right\| \\
&\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,
\end{aligned} \tag{D.21}$$

où la limite découle du fait que  $X_0 \in D(\mathcal{A})$  et par définition du générateur infinitésimal d'un  $C_0$ -semi-groupe (Définition 6.2). De manière analogue,

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\langle X(t+h) - X(t), X(t+h) \rangle}{h} - \langle \dot{X}(t), X(t+h) \rangle \right| \\
&\leq \|T(t)\| \|T(t+h)\| \|X_0\| \left\| \left( \frac{T(h) - I}{h} - \mathcal{A} \right) X_0 \right\| \\
&\leq M^2 e^{\omega(2t+h)} \|X_0\| \left\| \left( \frac{T(h) - I}{h} - \mathcal{A} \right) X_0 \right\| \\
&\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0.
\end{aligned} \tag{D.22}$$

Finalement, puisque :

$$\begin{aligned}
\left| \langle \dot{X}(t), X(t+h) \rangle - \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle \right| &\leq \|\dot{X}(t)\| \|X(t+h) - X(t)\| \\
&\leq \|T(t)\mathcal{A}X_0\| \|T(t)(T(h) - I)X_0\| \\
&\leq \|T(t)\|^2 \|\mathcal{A}X_0\| \|(T(h) - I)X_0\| \\
&\leq M^2 e^{2\omega t} \|\mathcal{A}X_0\| \|(T(h) - I)X_0\| \\
&\xrightarrow{h \rightarrow 0} 0,
\end{aligned} \tag{D.23}$$

où la limite découle de la définition même d'un  $C_0$ -semigroupe (Définition 6.1), on en déduit que  $\mathcal{E}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+$  et que pour tout  $t \geq 0$ ,

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \langle \dot{X}(t), X(t) \rangle = \langle \mathcal{A}X(t), X(t) \rangle. \quad (\text{D.24})$$

L'expression précédente montre que  $\dot{\mathcal{E}}$  est continue sur  $\mathbb{R}_+$ . En effet, pour tout  $X_0 \in D(\mathcal{A})$ ,  $\mathcal{A}X_0 \in D(\mathcal{A})$  et  $\mathcal{A}T(t)X_0 = T(t)\mathcal{A}X_0$  pour tout  $t \geq 0$  (Théorème 6.2). On a donc

$$\dot{\mathcal{E}}(t) = \langle \mathcal{A}T(t)X_0, T(t)X_0 \rangle = \langle T(t)\mathcal{A}X_0, T(t)X_0 \rangle. \quad (\text{D.25})$$

Puisque  $T(t)$  est fortement continu sur  $\mathbb{R}_+$  (Théorème 6.1), on obtient par continuité du produit scalaire que  $\mathcal{E}$  est continûment différentiable, i.e.,  $\mathcal{E} \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{R})$ .

## ANNEXE E SIMULATION DU MODÈLE EDP DE L'AILE FLEXIBLE

### E.1 Discrétisation des EDP couplées

Afin de simuler le modèle EDP de l'aile, on a recours à la méthode de discrétisation dite de Galerkin (Brenner and Scott, 2007; Ciarlet, 2002). Le modèle de l'aile est donné par

$$\rho\omega_{tt} + (EI\omega_{yy} + \eta_\omega EI\omega_{t yy})_{yy} = \rho(\alpha_\omega\phi + \beta_\omega\phi_t + \gamma_\omega\omega_t), \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (\text{E.1a})$$

$$I_w\phi_{tt} - (GJ\phi_y + \eta_\phi GJ\phi_{ty})_y = I_w(\alpha_\phi\phi + \beta_\phi\phi_t + \gamma_\phi\omega_t), \quad \text{sur } (0, l) \times \mathbb{R}_+, \quad (\text{E.1b})$$

$$\omega(0, t) = \omega_y(0, t) = \omega_{yy}(l, t) = \phi(0, t) = 0, \quad \forall t \geq 0, \quad (\text{E.1c})$$

$$-(EI\omega_{yy} + \eta_\omega EI\omega_{t yy})_y(l, t) + m_s\omega_{tt}(l, t) = L_{\text{tip}}(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{E.1d})$$

$$(GJ\phi_y + \eta_\phi GJ\phi_{ty})(l, t) + J_s\phi_{tt}(l, t) = M_{\text{tip}}(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{E.1e})$$

Les déplacement en torsion et en flexion sont approximés sous la forme :

$$\omega(y, t) = \sum_{i=0}^n a_i(t) f_i(y) = a(t)^\top f(y), \quad (\text{E.2a})$$

$$\phi(y, t) = \sum_{j=0}^p b_j(t) h_j(y) = b(t)^\top h(y), \quad (\text{E.2b})$$

avec les fonctions de base utilisées pour la projection :

$$f(y) = \begin{bmatrix} f_0(y) \\ f_1(y) \\ \vdots \\ f_n(y) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad h(y) = \begin{bmatrix} h_0(y) \\ h_1(y) \\ \vdots \\ h_p(y) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}, \quad (\text{E.3})$$

et les fonctions temporelles :

$$a(t) = \begin{bmatrix} a_0(t) \\ a_1(t) \\ \vdots \\ a_n(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} b_0(t) \\ b_1(t) \\ \vdots \\ b_p(t) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{p+1}. \quad (\text{E.4})$$

Les fonctions de projection sont choisies de manière à ce que  $(f_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(h_j)_{0 \leq j \leq p}$  forment deux familles libres. De plus, de manière à pouvoir respecter les conditions à la frontière (E.1c) et les commandes à la frontière (E.1d) et (E.1e), on impose les conditions suivantes :

$$\forall i \in \{0, \dots, n\}, \quad f_i(0) = f'_i(0) = f''_i(l) = 0, \quad (\text{E.5a})$$

$$f'''_0(l) = 1, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}, \quad f'''_i(l) = 0, \quad (\text{E.5b})$$

$$\forall j \in \{0, \dots, p\}, \quad h_j(0) = 0, \quad (\text{E.5c})$$

$$h'_0(l) = 1, \quad \forall j \in \{1, \dots, p\}, \quad h'_j(l) = 0. \quad (\text{E.5d})$$

On adopte alors les fonctions polynomiales suivantes :

$$f_o(y) = \frac{y^2}{2} \left( \frac{y}{3} - l \right), \quad (\text{E.6a})$$

$$f_i(y) = \frac{(y-l)^{i+3} - (-l)^{i+2}(i+3)y - (-l)^{i+3}}{(i+1)(i+2)(i+3)}, \quad i \in \{1, \dots, n\}, \quad (\text{E.6b})$$

$$h_o(y) = y, \quad (\text{E.6c})$$

$$h_j(y) = \frac{(y-l)^{j+1} - (-l)^{j+1}}{j+1}, \quad j \in \{1, \dots, p\}. \quad (\text{E.6d})$$

Le caractère échelonné de ces deux familles de fonctions, i.e.,  $f_i$  (respectivement  $g_j$ ) est un polynôme de degré  $i+3$  (respectivement  $j+1$ ), assure le caractère libre des familles  $(f_i)_{0 \leq i \leq n}$  et  $(h_j)_{0 \leq j \leq p}$ .

En injectant les approximations (E.2a-E.2b) dans (E.1a-E.1b), on obtient :

$$\rho f^\top \ddot{a} + \left( E I f''^\top a + \eta_\omega E I f''^\top \dot{a} \right)'' = \rho \left( \alpha_\omega h^\top b + \beta_\omega h^\top \dot{b} + \gamma_\omega f^\top \dot{a} \right), \quad (\text{E.7a})$$

$$I_w h^\top \ddot{b} - \left( G J h^\top b + \eta_\phi G J h^\top \dot{b} \right)' = I_w \left( \alpha_\phi h^\top b + \beta_\phi h^\top \dot{b} + \gamma_\phi f^\top \dot{a} \right). \quad (\text{E.7b})$$

On projette alors les équations (E.7a-E.7b) dans les bases de fonctions utilisées pour discrétiser le problème. Pour cela, on pré-multiplie l'équation (E.7a) (respectivement (E.7b)) par  $f$  (respectivement  $h$ ) et on intègre suivant la variable spatiale sur l'intervalle  $[0, l]$ . On obtient



de la sorte les EDO suivantes.

$$M_{\rho,f,f}\ddot{a} + \int_0^l f(y) \left( EIf''^\top a + \eta_\omega EIf''^\top \dot{a} \right)''(y) dy = M_{\rho\alpha\omega,f,h}b + M_{\rho\beta\omega,f,h}\dot{b} + M_{\rho\gamma\omega,f,f}\dot{a}, \quad (\text{E.8a})$$

$$M_{I_w,h,h}\ddot{b} - \int_0^l h(y) \left( GJh'^\top b + \eta_\phi GJh'^\top \dot{b} \right)'(y) dy = M_{I_w\alpha_\phi,h,h}b + M_{I_w\beta_\phi,h,h}\dot{b} + M_{I_w\gamma_\phi,h,f}\dot{a}, \quad (\text{E.8b})$$

où

$$M_{\zeta,p,q} \triangleq \int_0^l \zeta(y)p(y)q(y)^\top dy. \quad (\text{E.9})$$

## E.2 Discrétisation de la commande

De manière à pouvoir tenir compte de la commande, on injecte les approximations (E.2a-E.2b) dans les conditions à la frontière (E.1d-E.1e), ce qui donne

$$-(EIf''^\top a + \eta_\omega EIf''^\top \dot{a})'(l, t) + m_s f(l)^\top \ddot{a}(t) = L_{\text{tip}}(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{E.10a})$$

$$(GJh'^\top b + \eta_\phi GJh'^\top \dot{b})(l, t) + J_s h(l)^\top \ddot{b}(t) = M_{\text{tip}}(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{E.10b})$$

En intégrant par parties on obtient alors

$$\begin{aligned} \int_0^l f(y) \left( EIf''^\top a + \eta_\omega EIf''^\top \dot{a} \right)''(y) dy &= -f(l)L_{\text{tip}} + m_s f(l)f(l)^\top \ddot{a} \\ &\quad - \int_0^y f'(y) \left( EIf''^\top a + \eta_\omega EIf''^\top \dot{a} \right)'(y) dy \\ &= -f(l)L_{\text{tip}} + m_s f(l)f(l)^\top \ddot{a} + M_{EI,f'',f''}a + M_{\eta_\omega EI,f'',f''}\dot{a}, \end{aligned} \quad (\text{E.11a})$$

$$\int_0^l h(y) \left( GJh'^\top b + \eta_\phi GJh'^\top \dot{b} \right)'(y) dy = h(l)M_{\text{tip}} - J_s h(l)h(l)^\top \ddot{b}(t) - M_{GJ,h',h'}b - M_{\eta_\phi GJ,h',h'}\dot{b}. \quad (\text{E.11b})$$

En injectant les deux identités précédentes dans (E.8a-E.8b), on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \left( M_{\rho,f,f} + m_s f(l)f(l)^\top \right) \ddot{a} + (M_{\eta_\omega EI,f'',f''} - M_{\rho\gamma\omega,f,f})\dot{a} + M_{EI,f'',f''}a \\ = f(l)L_{\text{tip}} + M_{\rho\alpha\omega,f,h}b + M_{\rho\beta\omega,f,h}\dot{b}, \end{aligned} \quad (\text{E.12a})$$

$$\begin{aligned} \left( M_{I_w,h,h} + J_s h(l)h(l)^\top \right) \ddot{b} + (M_{\eta_\phi GJ,h',h'} - M_{I_w\beta_\phi,h,h})\dot{b} + \left( M_{GJ,h',h'} - M_{I_w\alpha_\phi,h,h} \right) b \\ = h(l)M_{\text{tip}} + M_{I_w\gamma_\phi,h,f}\dot{a}, \end{aligned} \quad (\text{E.12b})$$

Le modèle approximé de (E.1a-E.1e) à des fins de simulations prend alors la forme des deux

EDO couplées (E.12a-E.12b). En spécifiant à la fois les entrées de commande  $L_{\text{tip}}$  et  $M_{\text{tip}}$  et les nombres  $n$  et  $p$  de fonctions employées pour discrétiser l'espace, il est alors possible de calculer en amont l'ensemble des matrices intervenant dans (E.12a-E.12b). On peut ainsi intégrer numériquement ces équations afin d'obtenir l'évolution temporelle des fonctions inconnues  $a$  et  $b$ . En injectant ces résultats dans (E.2a-E.2b), on obtient l'évolution approchée des déplacements flexibles  $\omega(t, y)$  et  $\phi(t, y)$  de l'aile telle que décrite par (E.1a-E.1e).

Pour des simulations en boucle ouverte, on impose dans (E.12a-E.12b)  $L_{\text{tip}} = M_{\text{tip}} = 0$ . Pour des simulations du système en boucle fermée avec une entrée de commande du type :

$$L_{\text{tip}}(t) = -k_1[\omega_t(l, t) + \varepsilon_1\omega(l, t)] + m_s\omega_{tt}(l, t) + u_1(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{E.13a})$$

$$M_{\text{tip}}(t) = -k_2[\phi_t(l, t) + \varepsilon_2\phi(l, t)] + J_s\phi_{tt}(l, t) + u_2(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{E.13b})$$

on utilise une nouvelle fois l'approximation (E.7a-E.7b), amenant à considérer :

$$L_{\text{tip}}(t) = -k_1[f(l)^\top \dot{a}(t) + \varepsilon_1 f(l)^\top a(t)] + m_s f(l)^\top \ddot{a}(t) + u_1(t), \quad t \geq 0, \quad (\text{E.14a})$$

$$M_{\text{tip}}(t) = -k_2[h(l)^\top \dot{b}(t) + \varepsilon_2 h(l)^\top b(t)] + J_s h(l)^\top \ddot{b}(t) + u_2(t), \quad t \geq 0. \quad (\text{E.14b})$$

Ces deux dernières équations sont alors injectées dans (E.12a-E.12b) afin d'obtenir le modèle approximé de simulation du système bouclé composé de (E.1a-E.1e) et de (E.13a-E.13b).